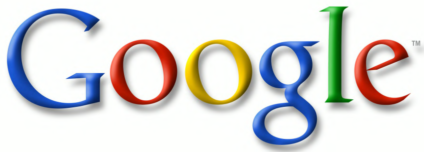
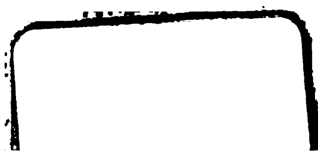








Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

im Verein mit anderen Mathematikern

und unter besonderer Mitwirkung der Herren

Felix Müller und **Albert Wangerin**

herausgegeben

von

Carl Ohrtmann.

Zwölfter Band.

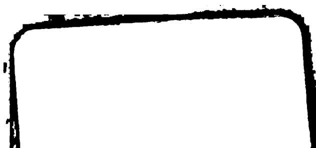
Jahrgang 1880.

Berlin.

Druck und Verlag von G. Reimer.

1882.





[illegible]
[illegible]

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

	Seite
A. Favaro. Sulla interpretazione matematica del papiro Rhind . .	1
†A. Marre. Dos reglas de la aritmética de los Indos	1
J. L. Heiberg. Die Kenntnisse des Archimedes über die Kegelschnitte	1
†F. Gustafsson. De codicibus Boëti de institutione arithmetica librorum Bernensibus	2
H. Weissenborn. Die Uebersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelhard von Bath	2
A. Hochheim. Al Kâfi fîl Hisâb. III.	3
H. Schapira. Mischnath Ha-Midoth	3
S Günther. Ein mathematisch-geographisches Dokument aus dem zehnten Jahrhundert	4
M. Steinschneider. Abraham Ibn Esra	5
M. Curtze. Kurze Replik an Herrn Zebrawski	6
M. Curtze. Die Ausgabe von Jordanus' „De numeris datis" durch Herrn Treutlein	6
Ch. Henry. Prologus N. Ocreati in Helceph ad Adelardum Batensem	7
G. Berchet. Il planisfero di Giovanni Leardo	7
L. Rodet. Le Souan-pan des Chinois	8
A. Marre. Deux nouvelles lettres du P. Jaquemet de l'Oratoire . .	9
†S. Günther. Der Wapowski-Brief des Coppernicus	9
†C. Malagola. Der Aufenthalt des Coppernicus in Bologna, deutsch von M. Curtze	9
A. Favaro. Le aggiunte autografe di Galileo al Dialogo sopra i due massimi sistemi	9
A. Favaro. Ragguaglio dei manoscritti Galileani nella biblioteca nazionale di Firenze	10
P. Gilbert. Examen des publications récentes sur Galilée	10
E. Wohlwill. Erklärung und Abwehr	11
F. Dvorsky. Neues über J. Kepler	11
B. Boncompagni. Intorno ad un trattato di aritmetica del P. D. Smeraldo Borghetti Lucchesse	11
F. Ritter. À propos d'une lettre de Fermat	11

Seite
P. Gilbert. Extrait d'une lettre à M. Darboux 11
Fragments inédits de Pascal 12
E. Narducci. Notizie ad un opera del Conte G. M. Mazzuchelli . 12
Ch. Henry. Mémoire de Léonard Euler 12
G. Eneström. Cartas inéditas de Bernoulli à Euler 13
G. Govi. Sur quelques lettres inédites de Lagrange 13
G. Lorenzoni. Un facsimile di alcune lettere inedite di Lagrange 13
E. Schering. Briefe von Lagrange an Euler, Laplace und Canterzoni 13
E. Schering. Briefe der Sophie Germain an Gauss 13
G. de Courcel. Avertissement 14
S. Germain. Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques 14
A. Genocchi. Il carteggio de S. Germain e C. F. Gauss 14
E. Mailly. Notice sur Ernest Quetelet 14
G. Basso. Cenni biografici su Silvestro Gherardi 15
Tresca. Discours prononcé aux funérailles de M. Morin 15
A. Laisant, F. G. Teixeira. Notice sur G. Bellavitis 15
J. Bertrand, Bouquet, Laussedat, Dumas, Rolland. Discours prononcés aux funérailles de M. Chasles 15
G. Darboux. Notice biographique sur M. Chasles 16
†E. Dühring. Robert Mayer, der Galilei des neunzehnten Jahrhunderts 16

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik Bd. I. . 16
G. Eneström. Om Matematikens historia såsom studieämne vid Nordens högskoler 28
†A. Favaro. Le matematiche nello studio di Padova 28
P. Tannery. L'arithmétique des Grecs dans Pappus 28
B. Krummbiegel und A. Amthor. Das Problema bovinum des Archimedes 30
A. Marre. Extrait d'un manuscript 31
C. Henry. Lettre à M. Darboux 32
C. Henry. Sur une valeur approchée de $\sqrt{2}$ 32
H. Brocard. Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers 32
R. Peiper. Fortolfi Rythmimachia 32
A. Favaro. Sulla elica calcolatoria di Fuller 33
A. Favaro. Appendice alle notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni 33
O. Stolz. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung 34
A. Maggi. Sulla storia delle funzioni cilindriche 34
A. Sachse. Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen 35
C. Taylor. On the history of geometrical continuity 35
†G. J. Allman. Greek geometry 35
M. Baker. The history of Malfatti's problem 35
H. de la Goupillière. Correspondance 36
A. Wernicke. Die Entdeckung der endlichen Lichtgeschwindigkeit durch Römer 36
E. Öhler. Beitrag zur Geschichte der mechanischen Theorie der Wärme 36
De Gasparis. Relazione intorno ad una memoria di G. Celoria . 37
G. Bellavitis. Quindicesima rivista di giornali 37

Seite

Capitel 2. Philosophie (Methodik, Pädagogik).

H. Girard. La philosophie scientifique 38
L. Buys. La science de la quantité 40
D. S. Peirce. On the algebra of logic 41
B. Halsted. Statement and reduction of syllogism 44
B. Halsted. Algorithmic division in logic 44
J. Venn. On the various notations for expressing the common propositions of logic 44
J. Venn. On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions 45
H. McColl. Calculus of equivalent statements 45
Ch. Ladd. On de Morgan's extension of the algebraic processes . 45
T. N. Thiele. Analytiske Studier om den rene Mathematiks Principer 46
H. F. Th. Beyda. Das Unendliche 49
J. Bienaymé. Lettre à M. Darboux 52
P. Fambri e P. Cassani. Tra fisica e metafisica 52
V. A. Julius. Beschouwingen over de Grondslagen der natuurkunde 52
W. B. Taylor. On the nature and origine of force 53
Challis. On Newton's „Regula tertia philosophandi“ 54
G. Bellavitis. Transunto della 4ª parte delle considerazioni delle matematiche pure 54
J. Gilles. Bedenkliche Richtungen in der Mathematik, nebst Bemerkungen von V. Schlegel 54
Häbe. Die Hülfsmittel des mathematischen Unterrichts 55
H. Wronski. Einleitung in den mathematischen Unterricht von L. Niedzwiecki 56
Krumme. Lehrsätze für Rechnen, Mathematik und geometrisches Zeichnen 58
J. C. V. Hoffmann. Ueber Determinanten 58
J. C. V. Hoffmann. Neue Beiträge zu den Incorrectheiten . . . 59
J. Gruber. Quotient und Bruch 59

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Capitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

†D. A. Klempt. Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra 60
E. Netto. Zur Theorie der Discriminanten 60
W. J. C. Sharp. On some formulae in the theory of equations . . 62
E. West. Sur les équations algébriques 62
P. Mansion. Toute équation algébrique a une racine 63
J. Farkas. Ueber Summen gleichartiger Potenzen von den Wurzeln einer algebraischen Gleichung 63
A. H. Anglin. Mathematical notes 63
J. D. H. Dickson. A new method of investigating relations between functions of the roots of an equation and its coefficients . . . 65
L. Kronecker. Ueber die Irreductibilität von Gleichungen 65
A. E. Pellet. Sur une classe d'équations 66
A. E. Pellet. Sur les fonctions linéaires 67
L. Gegenbauer. Ueber Sturm'sche Reihen 67
Ch. Biehler. Sur une application de la méthode de Sturm 68
Laguerre. Sur quelques propriétés des équations algébriques qui ont toutes leurs racines réelles 68
Laguerre. Théorèmes généraux sur les équations algébriques . . 69

Seite
Laguerre. Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation 69
E. Lucas. Sur un théorème de M. Laguerre 70
L. Lévy. Sur le même théorème 70
Ch. Vénard. Sur une règle de M. Laguerre 70
Candèze. Sur une règle de M. Laguerre 70
H. Laurent. Correspondance 70
E. Lucas. Sur l'extension du théorème de Descartes 71
Laguerre. Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique 71
Ch. Biehler. Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles 72
Laguerre. Sur la détermination d'équations numériques ayant un nombre donné de racines imaginaires 72
A. Siebel. Untersuchungen über algebraische Gleichungen 73
G. de Longchamps. Théorème d'algèbre 73
S. Réalis. Correspondance 74
A. Pujet. Sur la fonction résolvante d'une équation 74
E. Schröder. Ueber die Eigenschaften der Binomialcoefficienten, welche mit der Auflösung der trinomischen Gleichung zusammenhängen 74
K. E. Hoffmann. Ueber die Auflösung der trinomischen Gleichungen durch kettenbruch-ähnliche Algorithmen 75
J. Tetmajer. Auflösung trinomischer Gleichungen 75
S. Günther. Eine didaktisch wichtige Lösung trinomischer Gleichungen 76
v. Schäwen. Zur Lösung trinomischer Gleichungen, nebst Bemerkung von S. Günther 76
A. Kjeldgaard. En tilnärmelsesvis Beregning af de reelle Rödder i Ligningen $x^n + px + q = 0$ 76
E. Bardey. Bemerkung, nebst Erwiderung von Hoffmann 77
J. O'Regan, J. H. Turrill, Scott, W. H. Lowry. Lehrsätze und Aufgaben aus der Theorie der Gleichungen 77
L. F. M. Ferreira. Sur l'équation du deuxième degré 77
J. Diekmann. Die Grundtypen der lösbaren quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten 77
H. Gerlach. Ueber reciproke Gleichungen 78
A. P. L. Claussen. Trigonometrische Auflösung der quadratischen und cubischen Gleichungen 78
Th. Sinram. Beitrag zu den Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades mit rationalen Wurzeln 78
E. Kummer. Ueber die cubischen und biquadratischen Gleichungen, für welche die zu ihrer Auflösung nöthigen Quadrat- und Cubikwurzelausziehungen alle rational auszuführen sind 79
Franke. Ueber Gleichungen dritten und vierten Grades 79
R. Rawson, A. Anderson. Solution of a question 80
W. Ligowski. Zurückführung der vollständigen Gleichung vierten Grades auf eine reciproke Gleichung zweiten Grades 80
M. Lederer. Ueber eine Auflösung einer biquadratischen Gleichung 81
H. Krey. Ueber Hermite's Auflösung der Gleichung fünften Grades 81
†J. Tetmajer. Trigonometrische Auflösung binomischer Gleichungen 82
L. F. M. Ferreira. Sur un problème 82
Kniseley, J. L. Kitchin, E. W. Symons, T. R Terry, J. J. Sylvester. Lösungen specieller Gleichungen 82
A. Freeman. Note on the value of the least root of an equation 82

Seite

Capitel 2. Theorie der Formen.

C. Dahl. Bevis for en Sätning af Invarianttheorien 82
F. de Bruno. Sur un théorème général dans la théorie des covariants 83
F. de Bruno. Sur quelques théorèmes relatifs au développement des fonctions et aux covariants 83
F. de Bruno. Notes on modern algebra 83
W. Braun. Zur Berechnung der Doppelwurzel einer binären Form . 86
F. Franklin. On the calculation of the generating function . . . 86
A. Cayley. On the finite groups of linear transformations 86
L. Wedekind. Das Doppelverhältnis und die absolute Invariante binärer biquadratischer Formen 87
A. Cayley. On the theorem of the finite number of the covariants of a binary quantic 88
C. le Paige. Note sur certains covariants des formes algébriques binaires, nebst Bericht von Folie 89
†C. le Paige. Sur la représentation géométrique des covariants d'une forme biquadratique 90
J. Petersen. Om binäre Formers Kovarianter 90
†E. Bonsdorff. Method att utreckte relationer emellan binäre formers covarianter 90
†E. Bonsdorff. Om binära formers discriminanter 90
E. Winter. Ueber das simultane Formensystem einer binären Form zweiter Ordnung 90
E. d'Ovidio. La relazione fra gli otto invarianti fondamentali di due forme binarie biquadratiche 91
E. d'Ovidio. Sopra due covarianti simultanei di due forme binarie biquadratiche 91
E. d'Ovidio. Il risultante di due forme binarie biquadratiche . . . 91
E. d'Ovidio. Nota sui covarianti lineari fondamentali di due cubiche binarie 92
E. d'Ovidio. Nota sulle forme binarie del 5° ordine 93
v. Gall. Das vollständige Formensystem einer binären Form achter Ordnung, nebst Nachtrag 93
B. Igel. Wann ist eine binäre Form m^{ter} Ordnung Theiler einer binären Form n^{ter} Ordnung 94
J. J. Sylvester. On certain ternary cubic form equations 95
F. Gerbaldi. Nota sopra il significato geometrico del covariante di 9° ordine di una forma cubica ternaria 95
P. Gordan. Ueber das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form 96
P. Gordan. Typische Darstellung einer ternären biquadratischen Form 96
A. Capelli. Sopra le forme ternarie a più serie di variabili . . . 99

Capitel 3. Elimination und Substitution. Determinanten, symmetrische Functionen.

Ch. Biehler. Sur un procédé d'élimination 103
Ch. Biehler. Correspondance 103
Ch. Biehler. Sur la transformation du déterminant de M. Sylvester en celui de Cauchy 103
Ventéjol. Correspondance 103
A. Brill. Ueber eine Eigenschaft der Resultante 104
C. le Paige. Sur l'élimination 104

Seite
A. Cayley. On a formula of elimination 104
J. J. Sylvester. On the exact relation 104
Ch. Biehler. Sur les équations linéaires 105
C. Jordan. Sur la réduction des substitutions linéaires 105
Pasch. Ein algebraischer Satz, nebst geometrischen Anwendungen 105
G. Bellavitis. Giuocco americano 106
†O. Hesse. Die Determinanten von A. Zdziarski 106
R. Hoppe. Elemente der Determinantentheorie 106
R. F. Scott. A treatise on the theory of determinants 107
L. Lindelöff. Bidrag till läran om determinanter 107
C. W. Borchardt. Remarque relative à un mémoire de M. Sylvester 108
A. Schmitz. Ueber die Anwendbarkeit der französischen Methode zur Auflösung linearer Gleichungen 108
E. Fürstenau. Beiträge zur Theorie der Determinanten 108
F. Mertens. Ueber die Bedingungen der algebraischen Theilbarkeit eines ganzen Ausdruckes von n^2 willkürlichen Elementen durch die Determinante der letzteren 109
B. Igel. Zur Theorie der Determinanten 109
G. v. Escherich. Die Determinanten höheren Ranges 109
C. le Paige. Sur les déterminants bordés 110
C. le Paige. Sur quelques propriétés des déterminants 110
R. F. Scott. On cubic determinants 110
R. F. Scott. Note on a determinant theorem of Mr. Glaisher's . . 111
M. Nöther. Notiz über eine Classe symmetrischer Determinanten 112
L. Gegenbauer. Ueber eine specielle symmetrische Determinante 112
S. Günther. Ueber einen Satz von den symmetralen Determinanten 112
Lengauer. Zum Beweise des Cayley'schen Satzes von den symmetralen Determinanten 112
F. J. Studnička. Ueber einige Determinanten mit Binomialcoefficienten als Elementen 113
F. J. Studnička. Ueber eine neue Determinantentransformation . 113
F. J. Studnička. Ueber einen neuen Determinantensatz, nebst Bemerkung 114
Pasch. Ueber gewisse Determinanten in der Lehre von den Kegelschnitten 115
C. L. Landré. Eene stelling omtrent determinanten 115
G. Dötsch. Zum Unterrichte in der Determinantenlehre 115
J. W. L. Glaisher. On some algebraical expressions which are unaltered by certain substitutions 116
E. Hunyady. Der Satz von Desargues über perspectivische Dreiecke 116
B. Hansted. Théorème relatif à la théorie des nombres 117
†L. C. y Ricart. Aplicacion de las determinantes à la resolucion de las ecuaciones de cuarto grado 117
†L. C. y Ricart. Applicaciones de las determinantes à la trigonometria 117
L. Kronecker. Ueber die symmetrischen Functionen 117
F. Mertens. Zur Theorie der symmetrischen Functionen 118
L. Crocchi. Una relazione fra le funzioni simmetriche semplici e le funzioni simmetriche complete 119
A. R. Forsyth. The symmetric functions of the roots of an equation 119

Seite

Dritter Abschnitt. Zahlentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

†R. Dedekind. Lejeune-Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie 120
H. Brocard. Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers 120
†Fleck. Factoren, grösster gemeinschaftlicher Theiler und kleinster gemeinschaftlicher Dividend 120
†Grosscurth und Gudila-Godlewski. Factorentabelle 120
A. v. Braunmühl. Ein Verfahren zur Division ganzer Zahlen . . 121
J. H. Hummel. Evolution by subtraction 121
C. Crone. Bevis for en Sätning af Taltheorien 121
Landry. Décomposition de $2^{64}+1$ 121
Le Lasseur. Autres décompositions 121
W. W. Johnson. Solutions of a problem 122
E. Catalan. Lettre à M. Hermite 122
B. Hansted. Théorème relatif à la théorie des nombres 122
Th. Pepin. Mémoire sur les lois de réciprocité relatives aux résidus des puissances 122
L. Kronecker. Ueber den vierten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste 123
L. Kronecker. Sur la loi de réciprocité 123
A. Genocchi. Sur la loi de réciprocité de Legendre étendue aux nombres premiers 123
L. Gegenbauer. Ueber das cubische Reciprocitätsgesetz 124
J. J. Sylvester. Sur la loi de réciprocité dans la théorie des nombres 124
R. Dedekind. Réponse à une remarque de M. Sylvester. 124
L. Gegenbauer. Algorithmen zur Bestimmung des verallgemeinerten Legendre'schen Symbols 125
L. Kronecker. Ueber die Potenzreste gewisser complexer Zahlen 125
G. Zolotareff. Sur la théorie des nombres complexes 125
P. Bachmann. Ergänzung einer Untersuchung von Dirichlet . . . 126
G. Cantor. Zur Theorie der zahlentheoretischen Functionen . . . 127
G. Frattini. Un teorema aritmetico 128
A. Cayley. On the binomial equation $x^p-1=0$ 128
E. Catalan. Théorème de Staudt et de Clausen 128
A. E. Pellet. Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier 129
J. J. Sylvester. Sur les diviseurs des fonctions cyclotomiques . . 129
Th. Pepin. Démonstration d'un théorème de M. Sylvester 129
E. Lucas. Sur les fonctions cyclotomiques 129
R. Dedekind. Sur la théorie des nombres complexes idéaux . . . 129
G. Dostor. Questions sur les nombres 129
G. Dostor. Sommation des cubes d'un certain nombre d'impairs consécutifs 130
G. Dostor. Propriété de la suite naturelle des nombres impairs . 130
O. Schlömilch. Notiz über gewisse periodische Decimalbrüche . 130
S. Roberts. Note on a problem of Fibonacci's 130
S. Roberts. On the integral solution of $x^2-2Py^2=-z^2$ 130
Th. Pepin. Nouveaux théorèmes sur l'équation indéterminée $ax^4+by^4=z^2$ 131
E. Lucas. Sur un théorème d'Euler 131
E. Lucas. Théorèmes généraux sur l'impossibilité des équations cubiques indéterminées 131
E. Lucas. Sur les cas d'impossibitité de l'équation $x^3+y^3=Az^3$. 132

Seite
R. Hoppe. Rationales Dreieck, dessen Seiten auf einander folgende ganze Zahlen sind . . . 132
F. Bessel. Rationale sphärische Dreiecke . . . 132
A. Kunerth. Berechnung der ganzzahligen Wurzeln unbestimmter quadratischer Gleichungen . . . 132
E. Lucas. Sur un problème de Diophante . . . 133
S. Réalis. Sur quelques questions se rattachant au problème de Pell 133
David. Sur la partition des nombres . . . 133
A. Cayley. On the theorems of the 2, 4, 8 and 16 squares . . . 133
S. Roberts. On the impossibility of the general extension of Euler's theorem . . . 133
C. Henry. Généralisation d'un théorème d'aiithmétique . . . 134
Lefébure. Sur la résolution de l'équation $x^n+y^n=z^n$ en nombres entiers . . . 134
Th. Pepin. Sur diverses tentatives de démonstration du théorème de Fermat . . . 134
A. Korkine. Sur l'impossibilité de la relation algébrique $x^n+y^n+z^n=0$ . . . 134
O. Schier. Zur Theorie der Potenzsummen . . . 135
A. Desboves. Théorème sur les équations cubique et biquadratique 135
Th. Pepin. Sur quelques équations biquadratiques et indéterminées 136
Th. Pepin. Sur la réduction d'une formule biquadratique à un carré 136
Th. Pepin. Nouvelles formules pour réduire à un carré la valeur d'un polynôme rationnel du 4me degré . . . 136
Scott, G. Eastwood, F. Pisani. Lösungen von Aufgaben . . . 137
Th. Pepin. Sur quelques équations indéterminées du second degré et du quatrième . . . 137
E. Catalan. Un nouveau théorème empirique . . . 137
C. Henry. Remarque sur un article des Nouvelles Annales . . . 138
Sondat, M. Rochetti, E. Fauquembergue. Lösungen von Aufgaben . . . 138. 139
Th. Pepin. Solution d'un problème de Frénicle . . . 139
Kniseley, H. Pollexfen, Moret-Blanc, J. Lissençon, E. Santomauro. Lösungen und Aufgaben zahlentheoretischen Inhalts . 139
†E. Frisby. On magic squares . . . 139

Capitel 2. Theorie der Formen.

F. Mertens. Zur Lehre von den quadratischen Formen mit positiver Determinante . . . 140
J. Gierster. Ueber Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante . . . 141
Th. Pepin. Compositions des formes quadratiques binaires . . . 143
A. Markoff. Sur les formes quadratiques binaires définies . . . 143
H. Poincaré. Sur les formes cubiques ternaires . . . 144
H. Poincaré. Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire . . . 144
C. Jordan. Sur l'équivalence des formes . . . 145
L. Charve. De la réduction des formes quadratiques ternaires positives 145

Capitel 3. Kettenbrüche.

Laguerre. Sur la réduction en fractions continues . . . 148
G. Humbert. Sur une généralisation de la théorie des fractions continues . . . 148
C. Schmidt. Ueber die Eigenschaften des aus einer Quadratwurzel hervorgehenden Kettenbruches . . . 148

Seite
B. Hansted. Théorème relatif à la théorie des nombres 148
Hermes. Rechenschema für die Verwandlung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch 149
W. Jung. Ein neuer Kettenbruch für die Zahl π 149

Vierter Abschnitt. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

F. Gerbaldi. Sopra alcune applicazioni di una formola combinatoria 151
F. J. Studnička. Ueber eine neue Formel der Combinatorik . . . 152
L. P. M. Pegado. Théorie générale des combinaisons avec répétitions 152
P. Boschi. Ricerche sopra una questione di partizioni di numeri . 153
M. Lionnet. Note relative aux intersections intérieures des diagonales d'un polygone convexe 153
M. d'Ocagne. Remarque sur un problème d'analyse combinatoire . 153
P. G. Tait. Mathematical notes 154
T. P. Kirkman, W. J. C. Sharp, J. L. Kitchin, Ch. Ladd. Lehrsätze und Aufgaben über Combinationen 154
M. Laquière. Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier 154
D. B. de Haan. Gelukspelen met dobbelsteenen 154
†Théorie mathématique du jeu de la bouillotte 155
J. L. Kitchin, G. Heppel, L. Tanner, Matz, W. H. Lowry. Aufgaben über Wahrscheinlichkeit bei Spielen 155
O. Stone. A quasi proof of the arithmetical mean 155
J. Lüroth. Ein Problem der Fehlertheorie 156
D. McAlister. On the law of the geometric mean in the theory of errors 156
E. L. de Forest. On unsymmetrical adjustments and their limits . . 156
E. L. de Forest. On a theorem in probability 157
E. L. de Forest. On some properties of polynomials 157
Em. Czuber. Zur Theorie der Fehlerellipse 158
H. Seeliger. Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über die Vertheilung zufälliger Fehler 158
H. Seeliger. Bemerkung über die allgemeine Cauchy'sche Interpolationsmethode 159
T. N. Thiele. Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systématiques par la méthode des moindres carrés 160
J. M. de Tilly. Correspondance 162
C. H. Kummell. Proof of some remarkable relations in the method of least squares 162
J. W. L. Glaisher. On the method of least squares 162
L. Giletta. Intorno ai fondamenti del principio dei minimi quadrati 163
G. Jung. Statica grafica 164
J. W. L. Glaisher. Note on a point in the method of least squares 164
Matz, Seitz, C. J. Monro, G. J. Griffiths, Nash, Crofton, G. Heppel. Aufgaben über Bestimmung mittlerer Werthe . . 164
A. Percin. Note sur une application de la loi de probabilité du tir 165
M. W. Drobisch. Ueber die nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwartende Dauer der Ehen 165
O. Schlömilch. Zur Schuldentilgungs- und Rentenrechnung . . . 165
E. B. Elliott. The construction of the government sinking fund . . 165
Th. B. Sprague. Explanation of a new formula for interpolation . 166
W. Küttner. Zur mathematischen Statistik 166
G. King und G. F. Hardy. Notes on the practical application of Mr. Makeham's formula to the graduation of mortality tables . 167
J. Sorley. Observations on the graduation of mortality tables . . 167

Seite
Th. Miller. A theory of statistics 169
Th. Gessner. Das Abstimmen im Lichte der Wahrscheinlichkeit . 169
H. McColl, C. J. Monro, S. Tebay, W. J. Macdonald, Ch. Ladd, E. Blackwood, T. J. Sanderson, E. B. Elliott, C. Leudesdorf, A. E. Drinkwater, H. G. Day, J. A. Kealy, J. Hammond, J. E. A. Steggall, W. J. C. Sharp, Matz, W. A. Whitworth. Aufgaben über Wahrscheinlichkeit 170
M. Laquière. Rectification d'une formule de probabilité 171
M. Laquière. Note sur un problème de probabilité 171
E. B. Seitz. Solution of a problem 172
Crofton, Seitz, A. Martin, C. J. Monro, H. J. Day, E. B. Elliott, W. A. Whithworth, Matz, Casey. Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeit 172

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

W. Gallenkamp. Algebraische Analysis und analytische Geometrie 173
R. Götting. Einleitung in die Analysis 173
F. J. Studnička. Allgemeine algebraische Formenlehre 174
E. Amigues. Note sur la série de Taylor 174
O. Schlömilch. Ueber den verallgemeinerten Taylor'schen Satz . 174
C. L. Landré. By de sommatie formule van Euler 175
D. André. Second mémoire sur la sommation des séries 175
A. Harnack. Ueber die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Functionen 176
U. Dini. Serie di Fourier 177
Ch. Hermite. Sur la série de Fourier 177
W. J. C. Sharp. On Fourier's theorem 184
G. Cantor. Bemerkungen über trigonometrische Reihen 184
R. Hoppe. Bemerkung über trigonometrische Reihen 184
P. Appell. Sur les séries divergentes à termes positifs 185
E. Beltrami. Relazione sull' una memoria di G. Ascoli 185

Capitel 2. Besondere Reihen.

G. Dostor. Somme des carrés et somme des cubes des $n+1$ nombres entiers consécutifs 186
Moret-Blanc. Solution d'une question 186
F. J. Studnička. Zur Polynomialformel 187
G. Frobenius. Ueber die Leibniz'sche Reihe 188
V. M. Arnaud. Solution d'une question 188
E. Cesaro. Sur la série harmonique 189
W. J. C. Sharp. Solution of a question 189
Stieltjes. Notiz über einen elementaren Algorithmus 189
E. Catalan. Remarque sur une série 190
S. Roberts. On certain series 190
E. Cesaro. Une démonstration de la formule de Stirling 190
E. Frisby. On a series for the determination of π 190
W. Ligowski. Bestimmung einer Summe 191
P. Appell. Développement en série entière de $(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ 191
A. Radicke. Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen 193
†A. Radicke. Démonstration du théorème de Staudt et de Clausen 194

Seite
†A. Radicke. Démonstration d'un théorème de Stern 194
E. Lucas. Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern, concernant les nombres de Bernoulli 194
W. Jung. Bemerkungen über die Bernoulli'schen Zahlen 195
J. W. L. Glaisher. Algebraical proof of the fractional series for the cotangent and cosecant 195
F. Tissérand. Sur le développement d'une fonction quelconque du rayon vecteur dans le mouvement elliptique 195
F. Karlinski. Berechnungsmethode einer Bessel'schen Formel . . 196

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

J. Worpitzky. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung . 199
J. Hoüel. Cours de calcul infinitésimal 205
C. v. Brand. Grundriss der Differentialrechnung 206
F. G. Teixeira. Sur les principes du calcul infinitésimal 206
A. Cayley. Note on a paper of Riemann 206
R. Hoppe. Ueber einige principielle Punkte der Infinitesimaltheorie 207

Capitel 2. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

P. du Bois-Reymond. Ueber den Satz $\lim f'(x) = \lim \frac{f(x)}{x}$ . . . 208
J. Macnie. Introduction to differentiation 208
P. Mansion. Démonstration d'une relation 208
P. Mansion. Dérivées des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire 208
G. Halphén. Sur une formule d'analyse 209
J. Hammond. On general differentiation 209
F. G. Teixeira. Sur les dérivées d'ordre quelconque 210
J. C. Glashan. Change of the independent variable 210

Capitel 3. Integralrechnung.

†C. Köhler. Ueber die Integration 211
P. du Bois-Reymond. Ein allgemeiner Satz der Integrirbarkeitslehre 211
A. E. Pellet. Sur les intégrales de fonctions algébriques 212
W. Braun. Zur Integration gewisser gemischt goniometrischer Differentiale 212
E. Beltrami. Intorno ad un teorema di Abel 213
E. Beltrami. Intorno ad alcune serie trigonometriche 213
J. Tetmajer. Eine neue Formel zur Integration durch Reihen . . 215
R. Hoppe. Excentrischer Kugelsector 216
B. Abakanowicz. Der Integrator 217

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

P. du Bois-Reymond. Beweis eines Fundamentalsatzes der Integralrechnung 217
H. Stabenow, T. R. Terry, Tanner, Nash. Solutions of a question 218
W. Kapteyn. Neuer Beweis 218
Ch. Hermite. Sur une intégrale 219

Seite
W. Ligowski. Directe Bestimmung eines Integrals 219
Ph. Gilbert. Note sur quelques intégrales définies 220
T. R. Terry. Note on a class of definite integrals 220
O. Schlömilch. Ueber den Quotienten zweier Gammafuntionen . . 221
O. Schlömilch. Ueber den reciproken Werth der Gammafunction . 222
O. Schlömilch. Ueber eine Verwandte der Gammafunction . . . 223
G. de Longchamps. Sur les intégrales eulériennes de seconde espèce 224
†A. Berger. Sur quelques applications de la fonction Gamma . . 225
E. Schröder. Bestimmung des infinitären Werthes des Integrals $\int_0^1 (u)_n du$, nebst Nachschrift von O. Schlömilch 225
J. Cockle. On a certain definite integral 227
P. Wiecke. Ueber die Fehlergrenze bei Anwendung der Simpson'schen Regel 227
D. Trowbridge. On the quadrature of curves 228
B. Baillaud. Sur le calcul numérique des intégrales définies . . . 228
R. Radau. Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur d'une intégrale définie 229
R. Radau. Sur les formules de quadrature à coefficients égaux . . 230
R. Radau. Sur la formule de quadrature de Gauss 230
O. Callandreau. Sur la formule de quadrature de Gauss 230
E. Catalan. Sur la quadrature des courbes paraboliques 231
F. August. Ueber eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Methode der mechanischen Quadratur 231
P. Barbarin. Note sur le planimètre polaire 233
E. B. Elliott. An expansion for $\int_0^\infty \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x^n} dx$, n being a positive integer 233

Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

H. G. Zeuthen. Bevis for, at Ligningen $f(x, y, y') = 0$ har et fuldständigt Integral 234
H. G. Zeuthen. Sur la détermination d'intégrales algébriques de différentielles algébriques 235
P. Cazzaniga. Sulla integrazione delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e di 1° grado 236
L. Königsberger. Ueber algebraisch-logarithmische Integrale nicht homogener linearer Differentialgleichungen 237
L. Königsberger. Ueber den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen von Differentialgleichungen 237
H. Laurent. Sur la théorie des équations différentielles ordinaires 238
A. Steen. Om Differentialligningers Integration ved bestemte Integrale 240
L. Fuchs. Ueber eine Classe von Functionen mehrerer Variabeln . 241
L. Fuchs. Ueber Functionen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen entstehen 241
L. Fuchs. Auszug aus einem Schreiben an H. Borchardt 243
F. Casorati. Sull' equazione fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali lineari 243
G. Mittag-Leffler. Sur la théorie des équations différentielles linéaires 245

Seite
D. André. Intégration de trois espèces d'équations différentielles linéaires 246
G. Dillner. Sur une classe d'équations différentielles linéaires . . 247
P. C. V. Hansen. Bemärkninger om algebraisk Integration af specielle lineäre Differentialligninger 248
B. Hansted. Nogle Methode til at integrere visse lineare Differentialligninger ved bestemte Integraler 249
P. Appell. Sur les équations différentielles linéaires à une variable indépendante 249
P. Appell. Sur la transformation des équations différentielles linéaires 249
P. Appell. Sur les équations différentielles linéaires 249. 250
B. Hansted. Quelques transformations de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants 251
F. Brioschi. Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine 251
F. Brioschi. Sur une classe d'équations différentielles linéaires . . 251
F. Brioschi. Sur quelques équations différentielles linéaires . . . 252
F. Brioschi. Sopra una classe di equazioni differenziali integrabili per funzioni ellittiche 253
F. Brioschi. Sulla generazione di una classe di equazioni differenziali lineari integrabili per funzioni ellittiche 253
F. Brioschi. Di una proprietà delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine 254
Ch. Hermite. Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé 254
E. Picard. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques 256
E. Picard. Sur une classe d'équations différentielles linéaires . . 257
G. Mittag-Leffler. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques 257
G. Mittag-Leffler. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre 258
Escary. Sur quelques remarques, relatives à l'équation de Lamé . 258
G. Floquet. Sur quelques équations différentielles linéaires 259
H. Gyldén. Sur une équation différentielle du second ordre . . . 260
H. Gyldén. Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre 260
J. Farkas. Sur l'application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires 260
Y. Villarceau. Sur l'intégration des équations linéaires 261
G. Humbert. Sur l'équation hypergéométrique 261
A. Cayley. On the Schwarzian derivative and the polyhedral functions 262
E. Picard. Sur certaines équations différentielles linéaires du second ordre 263
R. Hoppe. Ueber die zweite Speciallösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung 264
Laguerre. Remarques sur les équations différentielles linéaires du second ordre 266
S. Spitzer. Note über lineare Differentialgleichungen 266
S. Spitzer. Construction einiger linearer Differentialgleichungen . 267
S. Spitzer. Integration einiger linearer Differentialgleichungen . . 267
S. Spitzer. Integration zweier Differentialgleichungen 268
J. Cockle. On the relations of certain symbols 268
J. Cockle. On the binomial biordinal 270
J. Cockle. Supplement to „Exercises“ 271
†J. Cockle. Supplementary paper on primary forms 271
P. Mansion. Intégration d'une équation différentielle d'Abel . . . 271

Seite
G. Darboux. Sur les systèmes formés d'équations linéaires à une seule variable indépendante 271
E. Picard. Sur les équations linéaires simultanées 273
J. N. Hazzidakis. Ueber eine Eigenschaft der Systeme von linearen homogenen Differentialgleichungen 274
Krankenhagen. Transformationen zweier Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 275
E. Meissel. Merkwürdige Eigenschaft des Integrals einer Gleichung 275
Haag. Note sur une classe d'équations différentielles 276
J. N. Hazzidakis. Ueber eine Differentialgleichung zweiter Ordnung 277
W. H. L. Russell. On the integration of differential equations . . 277
W. J. C. Sharp. Solution of two questions 277

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

A. Voss. Geometrische Interpretation einer Differentialgleichung . 278
A. Mayer. Zur Pfaff'schen Lösung des Pfaff'schen Problems . . . 279
W. Zajaczkowski. Ueber eine gewisse Eigenschaft der Pfaff'schen Function 280
W. Zajaczkowski. A theorem relating to pfaffians 281
H. W. L. Tanner. Note on a generalization of Pfaff's problem . . 281
N. Schaposchnikoff. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1ter Ordnung 283
Ch. Méray. Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles 283
E. Beltrami. Relazione sulla memoria di G. B. Favaro 283
Th. Gilbert. Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, nebst Bericht von Mansion . . . 283
H. W. L. Tanner. Note on a general method of solving differential equations of the first ordre with several dependent variables . 284
J. Collet. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre 284
J. Cockle. Solution of a question 285
F. Siacci. Un teorema di meccanica analitica 285
Krankenhagen. Zur Theorie der partiellen linearen Differentialgleichungen 286
F. Siacci. Sopra una proposizione di Jacobi 286
A. Winckler. Ueber den letzten Multiplicator eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung 287
L. V. Turquan. Intégration d'un nombre quelconque d'équations simultanées 289
L. V. Turquan. Intégration d'un système particulier de deux équations simultanées, nebst Rapport von Mansion 289
Ph. Gilbert. Sur une propriété de la fonction de Poisson 290
A. V. Bäcklund. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 290
A. V. Bäcklund. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung 291
S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen 292
S. Lie. Résumé einer Integrationstheorie 293
W. Ermakoff. Differentialgleichungen zweiter Ordnung 294
W. Ermakoff. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei Variabeln 294
W. de Romilly. Note sur certaines équations différentielles . . . 295
F. G. Teixeira. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires du deuxième ordre 295

Seite
P. Appell. Sur les séries hypergéométriques de deux variables . 296
P. Appell. Sur la série $F_3(\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma xy)$ 296
P. Appell. Sur quelques formules relatives aux fonctions hypergéométriques de deux variables 297
Wolstenholme. A form of the equation determining the foci and directrices of a conic 298
S. Earnshaw. On the integral of Laplace's equation in finite terms 298

Capitel 7. Variationsrechnung.

P. du Bois-Reymond. Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung 299

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

R. Lipschitz. Principes d'un calcul algébrique 303
Duport. Sur un mode particulier de représentation des imaginaires 304
F. Casorati. Il calcolo delle differenze finite 305
J. Thomae. Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen 306
S. Pincherle. Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche 307
S. Pincherle. Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome 308
C. Weierstrass. Zur Functionenlehre 310
C. Weierstrass. Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn Mittag-Leffler 311
G. Mittag-Leffler. Funktions teoretiska studier 312
C. Weierstrass. Untersuchungen über die $2r$-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen 313
E. Schering. Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen 315
W. Dyck. Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen 315
W. Dyck. Notiz über eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlechte drei 319
L. Königsberger. Ueber die Erweiterung des Abel'schen Theorems auf Integrale beliebiger Differentialgleichungen 319
L. Königsberger. Allgemeine Bemerkungen zum Abel'schen Theorem 320
L. Königsberger. Erweiterung des Abel'schen Satzes von der Form der algebraisch-logarithmisch ausdrückbaren Integrale algebraischer Functionen 322
R. C. Rowe. Memoir on Abel's theorem 322
F. Lindemann. Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz 323
M. Nöther. Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen 323
G. Hettner. Ueber die algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen 326
A. Wassilieff. Ueber rationale den doppelt-periodischen analoge Functionen 326
E. Picard. Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable, liées par une relation algébrique 326

Seite
E. Picard. Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable 326
E. Picard. Mémoire sur les fonctions entières 327
E. Picard. Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes 328
E. Picard. Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann 328
N. Herz. Zur Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen 330
E. McClintock. Note on a theorem for expanding functions of functions 330
O. Stolz. Bemerkung über einen Satz des Herrn Picard 330
H. Léauté. Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées dans cet intervalle 330
Gascheau. Note sur les conditions de continuité et de discontinuité des fonctions algébriques 331
G. Frobenius. Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen 331
Laguerre. Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynôme entier 332
Laguerre. Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels 332
Laguerre. Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$ 332
G. Humbert. Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions 332
G. Humbert. Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme 334
G. Humbert. Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques 334
E. Laguerre. Sur quelques théorèmes de M. Hermite 335
E. Laguerre. Sur les équations algébriques dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre . 336
A. Sachse. Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen . . 336
P. du Bois-Reymond. Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen, nebst Anzeige von A. Sachse 336
W. Scheibner. Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in der Entwickelung einer beliebigen Potenz des Radiusvectors nach der mittleren Anomalie 337. 338
W. de Maximowitch. Conditions pour que les constantes arbitraires d'une expression générale soient distinctes entre elles . 338
J. J. Walker. On theorems in the calculus of operations 339

Capitel 2. Besondere Functionen.

O. Schlömilch. Ueber das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel 340
H. W. L. Tanner. On powers of functions of the form $\frac{ax+b}{cx+d}$ . . 340
J. W. L. Glaisher. Note on an algebraical identity 341
A. Cayley. Table of $\Delta^m o^n : \Pi(m)$ up to $m = n = 20$ 341
G. Bellavitis. Dei libri di ragione a scrittura doppia 341
G. Bellavitis. Sviluppo in serie delle funzioni implicite 341
H. Léauté. Note sur le calcul approché par la méthode de Poncelet des radicaux de la forme $\sqrt{x^2-y^2}$ 342

Seite
P. Appell. Sur une classe de polynômes 342
H. Lamb. Note on a theorem relating to quadratic expressions . . 344
Laisant. Remarques sur les fonctions 1^x et $(-1)^x$ 344
Laguerre. Sur la fonction exponentielle 344
J. A. M. da Silva. Sur une formule du calcul intégral 345
Laguerre. Sur l'approximation des fonctions circulaires au moyen de fonctions algébriques 345
Y. Villarceau. Application de la méthode des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires 345
Y. Villarceau. Note sur la théorie des sinus des ordres supérieurs 345
J. Farkas. Sur la théorie des sinus des ordres supérieurs 346
J. Farkas. Sur l'application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires . 346
J. Liouville. Leçons sur les fonctions doublement périodiques . 347
H. Laurent. Théorie élémentaire des fonctions elliptiques 348
S. Pincherle. Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome 349
Ch. Hermite. Sur une formule d'Euler 349
G. Battaglini. Sull' equazione differenziale ellittica 350
W. Scheibner. Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form 350
F. Klein. Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung 351
L. Bianchi. Ueber die Normalformen dritter und fünfter Classe des elliptischen Integrals erster Gattung 352
A. Brill. Ueber das Additionstheorem und das Umkehrproblem der elliptischen Functionen 353
F. Gräfe. Ableitung des Additionstheorems der elliptischen Integrale 353
Müller. Neue Ableitung des Additionstheorems für elliptische Integrale 354
Ph. Gilbert. Note sur la formule d'addition des fonctions elliptiques 354
J. Griffiths. Notes 355
G. Morera. Sopra una nuova costruzione geometrica del teorema dell' addizione degli integrali ellittici 355
H. H. Turner. On the curves represented by the equation $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$ and their envelopes . . 356
Kleiber. Ableitung eines Systems von Formeln für die elliptischen Functionen 356
J. W. L. Glaisher. Systems of formulae in elliptic functions . . . 356
J. W. L. Glaisher. On the deduction of trigonometrical from elliptic function formulae 357
N. M. Ferrers. Note on elliptic functions 357
M. M. V. Wilkinson. An elliptic function identity 358
J. W. L. Glaisher. On some elliptic function and trigonometrical theorems 358
J. W. L. Glaisher. A system of trigonometrical formulae 358
J. W. L. Glaisher. On the addition equation for the third elliptic integral 359
A. G. Greenhill. Integrals expressed by inverse elliptic functions 360
Ch. Hermite. Sur une proposition de la théorie des fonctions elliptiques 360
G. Darboux. Note sur deux intégrales elliptiques 360
G. Mittag-Leffler. Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce 361

Seite

H. J. S. Smith. On the kind of periodicity presented by some elliptic functions 361
J. Farkas. Sur une classe de deux fonctions doublement périodiques 361
J. Farkas. Sur les fonctions elliptiques 362
J. W. L. Glaisher. A chapter in elliptic functions 362
J. W. L. Glaisher. Note on a method of obtaining the q-formula for the sine-amplitude in elliptic functions 363
D. André. Développements, par rapport au module, des fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$ 363
D. B. de Haan. Sur la différentiation de quelques intégrales elliptiques 363
P. Appell. Intégration de certaines équations différentielles à l'aide des fonctions Θ 363
J. Thomae. Convergenz der Thetareihen 364
F. Klein. Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen 365
F. Klein. On the transformation of elliptic functions 365
E. Meissel. Beiträge zur Sphärik 365
A. Enneper. Eine Gleichung zwischen Thetafunctionen 365
David. Sur la transformation des fonctions Θ 366
G. Frobenius. Zur Theorie der Transformation der Thetafunctionen 367
F. Klein. Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Functionen 367
Elliot. Généralisation de deux théorèmes sur les fonctions Θ . . . 368
Elliot. Sur le problème de l'inversion 369
K. Schwering. Ueber eine Art Curven, deren Bogen durch ein elliptisches oder hyperelliptisches Integral erster Gattung ausgedrückt wird 369
G. Darboux. Sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique 370
Ch. Hermite. Sur quelques applications des fonctions elliptiques . 370
L. Königsberger. Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf niedere Integralformen 370
J. Ptaszycki. Extrait d'une lettre à M. C. Neumann 372
G. Hettner. Ueber die Reduction der Integrale einer besonderen Classe von algebraischen Differentialen auf die hyperelliptischen Integrale 372
G. Hettner. Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen 373
W. R. Roberts. On the periods of the first class of hyperelliptic integrals 374
M. Krause. Ueber die Transformation fünften Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 375
M. Krause. Ueber die lineare Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 375
M. Krause. Ueber die Multiplication der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 376
H. Stahl. Zur Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems 376
Appell. Sur les fonctions de deux variables à trois ou quatre paires de périodes 379
G. Pick und M. Ungar. Grundzüge der Theorie einer Classe Abel'scher Integrale 379
A. Cayley. A memoir on the single and double theta-functions . . 380
A. Cayley. On a theorem relating to the multiple theta-functions . 382
Elliot. Sur la transformation des intégrales abéliennes 382
F. Schottky. Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln 383

Seite
G. Frobenius. Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln 385
M. Nöther. Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten 389
E. Heine. Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy 392
F. Tisserand. Sur les transcendantes qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des perturbations planétaires 394
O. Callandreau. Sur les transcendantes qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des perturbations planétaires 394
G. Darboux. Sur les transcendantes qui jouent un rôle important dans la théorie des perturbations planétaires 394
Escary. Remarque relative à deux intégrales obtenues par Lamé . 395
Laguerre. Sur une propriété des polynômes X_n de Legendre . . 396
A. R. Forsyth. On certain integrals 396
E. J. Routh. On functions analogous to Laplace's functions . . . 397
F. Niemöller. Formeln zur numerischen Berechnung des allgemeinen Integrals der Bessel'schen Differentialgleichung 397
E. Lommel. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen 398
N. Sonine. Recherche sur les fonctions cylindriques 400
J. König. Ueber Reihenentwickelung nach Bessel'schen Functionen 403

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.

G. Cantor. Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten . . . 404
W. J. Stringham. Regular figures in n-dimensional space 405
W. Killing. Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie 405
W. Killing. Die Rechnung in den nicht-Euklidischen Raumformen 406
G. Chrystal. Non-Euclidian geometry 406
E. Ricordi. I circoli nella geometria non euclidea 407
P. Cassani. Intorno ad alcune generazioni della retta e del piano 407

Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

J. H. Graf. Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche . . . 408
P. G. Tait. On the colouring of maps 408
P. G. Tait. Note on a theorem of the geometry of position . . . 409
P. G. Tait. Solution af a question 409
De Polignac. Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications 409
O. Simony. Ueber jene Flächen, welche aus ringförmig geschlossenen, knotenfreien Bändern durch in sich selbst zurückkehrende Längsschnitte erzeugt werden 410
H. Durège. Ueber die Hoppe'sche Knotencurve 411
R. Hoppe. Bemerkung betreffend die Auflösung eines Knotens in 4ter Dimension 411
E. Cesaro. Sur l'existence de certains polyèdres 413
F. Röllner. Ueber einfach und mehrfach zusammenhängende Polyederflächen 413
E. Hess. Anwendungen und Erweiterungen des Steiner-Lindelöf'schen Satzes 413

Seite

Capitel 3. Elementare Geometrie. (Planimetrie. Trigonometrie. Stereometrie.)

Szwajkart. Abriss der Geometrie 414
V. Schlegel. Lehrbuch der elementaren Mathematik 414
F. Hoza. Elemente der ebenen Geometrie 415
J. K. Becker. Lehrbuch der Elementargeometrie 416
E. Glinzer. Lehrbuch der Elementar-Geometrie 417
G. Wagner. Ueber geometrische Constructionsaufgaben 417
A. Mukhopadhyay. Proof of Euclid I. 25 417
R. Tucker, J. L. Kitchin. Solutions of a question 417
A. Pánek. Berechnung der Dreiecksfläche aus den Seitenlängen . 418
N. v. Lorenz. Nachtrag zu einer Dreiecksaufgabe 418
G. Dostor. Surfaces de certains triangles 418
G. Dostor. Distances mutuelles entre les pieds des six bissectrices d'un triangle 418
A. Haussner. Constructionsaufgaben 418
G. Dostor. Distances des trois sommets d'un triangle au centre d'un certain cercle 419
M. d'Ocagne. Démonstration de quelques théorèmes 419
S. Kantor. Geometrische Untersuchungen 419
Cochez, N. H. Capel, A. L. Selby, E. Rutter, H. G. Day, D. Eastwood, J. Openshaw, W. J. C. Miller, H. Murphy, J. O'Regan, J. M. Fauré, Lannes, A. Leinekugel, E. Fauquembergue, W. P. Casey. Weitere Lehrsätze und Aufgaben über Dreieck und Viereck 420
A. Pánek. Zur Lehre vom Viereck 420
G. Dostor. Les trois quadrilatères convexes d'Albert Girard . . . 420
Schlosser. Vom Studirtische 421
E. Sailer. Geometrische Aufgabe 421
A. Miller. Neue Beziehungen am regulären Zehneck 421
M. Lederer. Neue Beziehungen am regulären Zwölfeck 421
F. Englert. Die Anzahl der innerhalb eines n-Ecks fallenden Schnittpunkte seiner Diagonalen 422
J. W. L. Glaisher. Theorem connected with a certain figure inscribed in a circle 422
R. Hoppe. Planimetrische Aufgabe 422
G. Dostor. Extension du théorème d'Hippocrate 423
C. H. C. Lopez. Solution d'un problème de géométrie élémentaire 423
A. Schiappa Monteiro. Solution d'un problème au moyen de la méthode des équipollences 424
W. J. C. Miller, J. A. Kealy, F. D. Thomson, Scott, A. Droz. Weitere Lehrsätze und Aufgaben über Kreis und Kreisfiguren 424
E. Bergold. Ebene Trigonometrie 424
D. Besso. Elementi di trigonometria 425
J. W. Stringham. On vector ratios considered as trigonometrical functions of angles 426
G. Dostor. Relations entre les lignes trigonométriques des angles d'un triangle 426
G. Dostor. Formules de réduction trigonométrique 427
M. Baker. Discussion of a geometrical problem 427
J. W. L. Glaisher. Note on a trigonometrical identity involving products of four sines 428
H. Hart. Trigonometrical identity, nebst Addition 428
J. W. L. Glaisher. On certain algebraical expansions 429
J. W. L. Glaisher. Theorems in elementary trigonometry, nebst Addition 429

Seite
J. W. L. Glaisher. Trigonometrical theorems involving the products of four sines and four cosines 429
A. Cayley. A theorem in spherical trigonometry 430
S. Günther. Die merkwürdigen Linien im sphärischen Dreieck . . 431
Meissel. Lösung einer Classe von Aufgaben der Sphärik 431
A. Enneper. Ueber ein Problem aus der Lehre vom Maximum und Minimum 432
W. W. Johnson, A. S. Christie and E. B. Seitz. Solutions of a problem 433
†Websky. Ueber die Berechnung der Elemente einer monoklinischen Krystallgattung 433
A. Schiappa Monteiro. Sur l'aire latérale et le volume d'un coin conique 433
H. Wittek. Ueber den Begriff der geraden Pyramide 434
†H. J. S. Smith. On the distribution of circles on a sphere . . . 434
Chéfik-Bey. Solution des exercices sur le tétraèdre proposés par M. Genty 434
E. Lemoine. Quelques théorèmes sur les tétraèdres 435
E. Hain. Ueber das Gesetz der Säulenverjüngung 435
J. Neuberg. Sur le nombre des sphères qui touchent quatre plans donnés 435
L. Maleyx. Sur l'évaluation de certains volumes 436
C. Morgan, Genese, Cochez, A. McMurchy, G. Eastwood, E. B. Elliott, Wolstenholme, W. Wilkins, Moret-Blanc, A. Leinekugel. Weitere Lehrsätze und Aufgaben aus der Trigonometrie und Stereometrie 437

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

H. Drasch. Ueber die Stellung der synthetischen Geometrie zur darstellenden Geometrie 437
†Lazarski. Studien über verschiedene Probleme der darstellenden und neueren Geometrie 438
†Lazarski und Rembach. Linearperspective 438
C. Pelz. Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie 438
J. Streissler. Zur orthogonalen Axonometrie 439
Tesar. Der orthogonal-axonometrische Verkürzungskreis 439
Ch. Wiener. Die Abhängigkeit der Rückkehrelemente einer unebenen Curve von der Curve selbst 439
C. L. Landré. Over de perspectief van den bol 441
Röllner. Ueber Reflexe auf Kreisen 441
C. Pelz. Zur Construction der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Flächen zweiten Grades 441
G. H. A. Kröhncke. Handbuch zum Abstecken von Curven . . . 442
D. Sidersky. Neuer Ellipsograph 442

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

F. Buchbinder. Behandlung der Kegelschnitte 442
W. Gallenkamp. Synthetische Geometrie 442
Laguerre. Sur la géométrie de direction 445
F. Klein. Ueber die geometrische Definition der Projectivität auf den Grundgebilden erster Stufe 447

Seite
G. Darboux. Sur le théorème fondamental de la géométrie projective . . . 447
F. Schur. Ueber den Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie 448
Em. Weyr. Beiträge zur Curvenlehre . . . 449
E. Weyr. Ueber Polargruppen . . . 453
H. Schubert. Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden . . . 454
J. Keller. Die einander doppelt conjugirten Elemente in reciproken Systemen . . . 456
†H. J. S. Smith. On inverse figures in geometry . . . 457
†E. Bonsdorff. Ueber cyklisch-projectivische Systeme . . . 457
J. S. Vaněček. Ueber die Verschiebung geometrischer Gebilde . 457
E. Hunyady. Der Satz von Desargues über perspectivische Dreiecke . . . 116. 457
L. Wedekind. Lagenbeziehungen bei ebenen perspectivischen Dreiecken . . . 457
R. O. Consentius. Ueber die Bestimmung der schiefen Lage zweier projectivischer Strahlenbüschel in der Ebene . . . 458
G. Dostor. Théorie générale des polygones étoilés . . . 458
F. Kessler. Beiträge zur Geometrie des Zirkels . . . 459
R. Mehmke. Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene . . . 460
Talayrach. Extrait d'une lettre . . . 460
C. Taylor. On Gaskin and Plücker's properties of the orthocyle . 460
J. Petersen. Die Steiner'sche Lösung der Malfatti'schen Aufgabe 461
Anonyme. Composition mathématique . . . 462
Weill. Théorème sur les polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux circonférences . . . 462
A. Schiappa Monteiro. Recherche sur un certain cercle variable 463
A. Ribaucour. Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles . . 463
G. Gribodo. Sopra una proprietà dei poli di un fascio di rette in involuzione . . . 464
W. Binder. Ueber Projectiv-Constructionen der Curven zweiter Ordnung . . . 464
C. Taylor. On a section of Newton's Principia . . . 465
C. Taylor. On Newton's organic description of curves . . . 465
J. A. Grunert. Ueber Newton's Methode zur Beschreibung eines Kegelschnittes durch fünf und vier gegebene Punkte . . . 465. 466
F. Amodeo. Teorema di geometria proiettiva . . . 467
E. Wiskočil. Bestimmung der Curven zweiter Ordnung aus fünf reellen Elementen . . . 467
E. Hunyady. Ueber die von Möbius gegebenen Kriterien in der Theorie der Kegelschnitte . . . 468
H. Durège. Ueber die von Möbius gegebenen Kriterien für die Art eines Kegelschnittes . . . 468
C. Pelz. Zur Construction der Schnittpunkte von Geraden mit Kegelschnitten . . . 468
J. Carnoy. Théorèmes sur les coniques . . . 469
J. Carnoy. Propriétés descriptives nouvelles des coniques, nebst Rapport von P. Mansion und C. le Paige . . . 469
F. Gräfe. Ueber das Pascal'sche Sechseck . . . 470
Weill. Sur le triangle inscrit et circonscrit à deux coniques . . . 471
M. Genty. Constructions diverses . . . 471
G. de Longchamps. Sur le centre de courbure en un point d'une conique . . . 472
W. Marx. Synthetischer Nachweis des Euler'schen Satzes über Krümmungsradien . . . 473

Seite
C. Pelz. Die Krümmungshalbmesser-Constructionen der Kegelschnitte 473
†E. G. Démonstration géométrique d'une propriété des foyers extérieurs au plan d'une conique 475
Ch. Ladd. The nine-line conic 475
J. Streissler. Zur Transformation der Kegelschnitte 475
V. Jeřábek. Zur Theorie der confocalen Kegelschnitte 475
Marx. Ueber einige geometrische Oerter 475
W. Jeřábeck. Anmerkung zu einem früheren Aufsatze 476
F. Tomeš. Ellipsenconstructionen 476
†F. Tomeš. Das Sechseck mit eingeschriebenem und umschriebenem Kegelschnitt 477
T. N. Thiele. En Konstruktion af Ellipsens Axer 477
Anonyme. Solution d'une question 477
C. Taylor. On the directrice of a parabola inscribed in a triangle 477
Genese, H. T. Gerrans, J. Openshaw, Scott, Wolstenholme, Clifford, F. Tirelli, D. Edwardes, J. O'Regan, E. Rutter, J. S. Jenkins, A. Anderson, Townsend, L. H. Rosenthal, A. L. Selby, Lieber, H. Murphy, Presson, Dufaure, Moret-Blanc. Weitere Lösungen und Aufgaben 478
S. Kantor. Metrische Formel für das Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten 478
M. Trebitscher. Ueber Beziehungen zwischen Kegelschnittbüscheln und rationalen Curven dritter Classe 479
R. Sturm. Ueber die ebenen Curven dritter Ordnung 479
A. Milinowski. Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung 480
R. Heger. Eine Construction von Curven dritter Ordnung aus conjugirten Punkten 482
E. Weyr. Ueber Projectivität und Involution auf ebenen rationalen Curven dritter Ordnung 483
Em. Weyr. Ueber Involutionen bei Curven dritten Grades 484
C. le Paige. Relation zwischen den singulären Elementen cubischer Involutionen 484
Em. Weyr. Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn le Paige . . 484
Em. Weyr. Ueber biquadratische Involutionen zweiter Stufe und ihre typischen Curven 486
Em. Weyr. Ueber vollständig eingeschriebene Vielseite 487
S. Kantor. Ueber gewisse Curvenbüschel dritter und vierter Ordnung 488
C. Andréeff. Ueber die Construction der Polaren in Bezug auf die geometrischen ebenen Curven 489
C. Dewulf. Correspondance 489

B. Räumliche Gebilde.

F. Aschieri. Sulle forme collineari e reciproche nell'ordinaria geometria 490
P. E. Neumayr. Ueber die Begründung der projectiven Beziehung der reellen Elemente zweier Grundgebilde erster Stufe in der reinen Geometrie 491
G. Kilbinger. Problem der homologen Kreise in collinearen Räumen 492
P. H. Schoute. Over het projecteeren op oppervlakken 494
H. Schröter. Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurve dritter Ordnung 494
J. Ph. Weinmeister. Die Flächen zweiten Grades 500
G. Veronese. Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e di superficie di 2° ordine 502

Seite
G. Königs. Propriété des courbes ou des surfaces du second ordre homofocales 503
E. Hunyady. Beitrag zur Theorie der Flächen zweiten Grades . . 503
R. Heger. Zur Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten 504
L. F. Marrecas Ferreira. Solution d'une question de géométrie . 505
F. Schur. Ueber die gemeinsamen Tangenten zweier Flächen zweiten Grades, welche ein windschiefes Viereck gemein haben . . 505
H. G. Zeuthen. Konstruktion af det ottende Skjäringspunkt mellem de Flader af anden Orden, som gaa gjennem syv givne Punkter 506
G. Bauer. Ueber eine Eigenschaft des geradlinigen Hyperboloids 506
P. Cassani. La quadrica dei dodici punti 507
H. Drasch. Zur Construction der Schmiegungsebene der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiter Ordnung 507
H. Drasch. Tangentenconstruction für die Berührungslinie zwischen einer windschiefen Fläche und ihrer Leitfläche 508
Peschka. Normalenflächen längs ebener Flächenschnitte 509
Ed. Weyr. Construction der Osculationshyperboloide windschiefer Flächen 509
W. Jeřábek. Ueber den Ort des Centrums der Collineation zwischen einer Nichtregelfläche zweiter Ordnung und einem System von Kugelflächen 510
Kröber. Ueber die Aehnlichkeitspunkte der Kugeln einer Dupin'schen Kugelschaar 510
C. le Paige. Bemerkungen über cubische Involutionen 511
R. O. Consentius. Der cubische Kreis 512
C. Pelz. Ueber die Focalcurven des Quetelet 512
Caron. Sur l'épure des 27 droites d'une surface du troisième degré 513
†H. J. J. Smith. On skew surfaces of the third order 514
A. Milinowski. Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung 514
Em. Weyr. Notiz über harmonische Mittelpunkte eines Quadrupels 514
C. Juel. En geometrisk Fremstilling af Hovedegenskaber ved Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit 514
A. Ameseder. Die Regelfläche vierten Grades mit zwei Doppelgeraden 516
A. Ameseder. Ueber rationale Regelflächen vierten Grades . . . 516
A. Ameseder. Zur Theorie der Regelflächen vierten Grades mit Doppelkegelschnitt 516
A. Ameseder. Ueber Regelflächen vierten Grades, deren Erzeugende sich zu Quadrupeln gruppiren 516
Laquière. Théorie géométrique des courbes anallagmatiques . . . 517
E. Catalan. Sur la cyclide 517
P. H. Schoute. Sur une transformation géométrique d'un problème de la théorie des enveloppes 517
G. Bruno. Sopra i tetraedri trirettangoli i cui spigoli sono tutti normali ad una quadrica data 518

C. Abzählende Geometrie.

L. Saltel. Conférences de géométrie supérieure 518
A. Cayley. On Schubert's method of the contacts of a line with a surface 520
G. Halphén. Observations sur la théorie des caractéristiques . . . 521
H. Schubert. Réponse aux observations de M. Halphén 521

Seite
H. Schubert. Sur l'évaluation du nombre des coniques faisant partie d'un système et satisfaisant à une condition simple 522
H. Schubert. Ueber die ein-zweideutige Beziehung zwischen den Elementen einstufiger Elementargebilde 522
H. Schubert. Ueber die Erhaltung des Geschlechts bei zwei-eindeutig auf einander bezogenen Plancurven 524
H. Schubert. Ueber dreipunktige Berührung von Curven 524
H. Schubert. Anzahlgeometrische Behandlung des Dreiecks . . . 525
H. Schubert. Bemerkung zu der Bestimmung der Torsallinien einer Regelfläche 526
Peschka. Beitrag zur Theorie der Normalenflächen 526
A. Voss. Zur Untersuchung der Fläche der Centra 528
J. C. Malet. On a limit to the number of curves belonging to a plane curve of any order 529

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Coordinaten.

H. Emsmann. Zum vieraxigen Coordinatensystem 530
Ch. Forestier. Sur les diverses équations d'une courbe en coordonnées polaires par rapport au même pôle et au même axe . 531
V. Wood. Quaternions 531
E. Anthony. Notes on quaternions 531
A. Cayley. A geometrical construction relating to imaginary quantities 531
H. Daubrawa. Ueber allgemeine Transformationssymbole in der Krystallographie 532

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

W. Gallenkamp. Algebraische Analysis und analytische Geometrie 533
P. Frost. General expression for the radius of curvature in dipolar coordinates 533

B. Theorie der algebraischen Curven.

E. Holst. Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions à des recherches purement géométriques 533
E. Picard. Sur une propriété des fonctions et des courbes algébriques 534
F. P. Ruffini. Di alcune singolarità nei fasci e nelle reti di linee piane algebriche 534
H. A. Schwarz. Essai d'une démonstration d'un théorème de géométrie 535
J. Casey. On cubic transformations 535
Ch. Biehler. Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques 539
A. Brill. Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven 539
†C. Le Paige. Sur la représentation géométrique des covariants d'une forme biquadratique 541
De Saint-Germain. Des courbes algébriques qui ont plusieurs axes de symétrie 542
F. Franklin. Note on the intersection of two curves 542

Seite
G. Gruss. Ueber Beziehungen zwischen mehreren projectivischen Curvenbüscheln und deren Erzeugnissen 542
Em. Weyr. Ueber eine recurrente Formel zur Herstellung von Involutionsgleichungen 544
J. Rosanes. Zur Theorie der Kegelschnitte 545
F. Folie et C. le Paige. Mémoire sur les courbes du troisième ordre 545
F. Folie, E. Catalan, J. M. de Tilly. Rapport sur un mémoire de M. Saltel 546
Em. Weyr. Remarque sur l'existence de l'évolution dans les courbes du troisième et du quatrième ordre 546
A. Brill. Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkten 547
J. Freyberg. Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curven 4ter Ordnung 547

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

E. Hain. Zur Construction symmetrischer Punktsysteme 547
D. J. Korteweg. Oplossingen der vraagstukken vorkomende in Briot et Bouquet's „Géométrie analytique" 548
H. Hart. On the criteria for determining the nature of a conic . . 548
R. W. Genese. On he equation to the real and to the imaginary directrices and latera recta of a conic 549
W. Jung. Zur Theorie der Kegelschnitte 549
C. Taylor. Tangential coordinates 549
E. Hain. Neue Herleitung der Kreistangentengleichung 550
G. Dostor. Lieu des centres des cercles tangents intérieurement à un demi-cercle et extérieurement aux deux demi-cercles 550
Weill. Sur le cercle qui passe par les pieds des trois normales abaissées d'un point de l'ellipse sur la courbe 551
A. Börsch. Die einem Dreieck umschriebene Ellipse kleinsten Inhalts 552
A. Hall. Parallel chords in an ellipse 553
E. Lucas. Note sur la construction des normales à l'ellipse . . . 553
J. Neuberg. Sur les normales à l'ellipse 553
K. Zahradnik. Ueber das Normalenproblem für die Parabel . . . 554
Weill. Théorèmes sur la parabole 554
A. M. de Lépinay. Sur un lieu géométrique 555
Le Cointe. Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une conique et à un cercle 556
G. Darboux. Correspondance 557
†G. Krammer. Ueber zwei in einer Ebene liegende Curven zweiter Ordnung 559
E. Lucas. Sur un théorème de Chasles concernant les coniques homofocales 559
E. Lucas. Sur trois coniques confocales deux à deux 560
Laguerre. Sur les coniques qui passent par trois points et ont un double contact avec un cercle donné 561
Ed. Mahler. Das Erzeugnis zweier gewisser Systeme von Kegelschnitten, die mit einander projectivisch sind 561
†Myjkowski. Lösung von zwei Aufgaben aus der analytischen Geometrie 562
Genese, T. R. Terry, Wolstenholme, Evans, R. Knowles, C. H. Sampson, D. Edwardes, Moret-Blanc. Lösungen von Aufgaben 562. 563
J. Mayer. Zur Trisection des Winkels 563

Seite
J. S. Vaněček. Schiebung eines Winkels in seiner Ebene 563
J. J. Walker, Wolstenholme, G. Turriff, C. K. Pillai, R. Graham, A. W. Scott, Townsend, R. Rawson, Hall, W. E. Wright, C. Bickerdike, Lannes, T. Morley, H. Murphy, Nash, J. L. Kitchin, E. W. Symons, R. Knowles, J. E. A. Steggall, Robaglia. Lösungen von Aufgaben . . 564

D. Andere specielle Curven.

A. Hall. On a curve of the fourth degree 564
H. Hart. On the focal conics of a bicircular quartic 565
H. M. Jeffery. On plane and spherical curves of the fourth class with quadruple foci 566
G. Frattini. Risoluzione di sei equazioni fra nove quantità . . . 566
Bourguet. Correspondance 566
Wolstenholme, G. Heppel, Ch. Ladd, G. Turriff, R. Knowles, J. E. Steggall, E. Fauquembergue, A. Droz, C. Bickerdike, J. J. Sylvester, J. J. Walker, W. J. C. Sharp. Lösungen von Aufgaben 567
A. Vietor. Die Polarkreispaare einer Cykloide 567
G. Fouret. Sur quelques questions concernant les cycloïdes et épicycloïdes 568
G. Fouret. Sur la construction de la tangente à une courbe . . . 568
J. M. Ingalls. Curves of pursuit 568

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

Anonym. Repetitorium der analytischen Geometrie 568
W. Jung. Beitrag zur Theorie der Rotationsflächen 569
Desmartres. Sur les surfaces à génératrices circulaires 569
W. Řehořowský. Ueber developpable Flächen 569
A. Voss. Zur Theorie des Riemann'schen Krümmungsmasses . . . 570
A. Voss. Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke 570
H. Hovestadt. Beitrag zur Krümmungstheorie 572
J. Simonides. Ueber die Krümmung der Flächen 572
De Salvert, P. Mansion. Sur l'expression du rayon de courbure de la section normale d'une surface 572
R. R. Webb. Some applications of a theorem in solid geometry . . 573
S. Lie. Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation 573
A. Fais. Sulle principali proprietà delle traiettorie ortogonali delle generatrici delle superficie rigate 574
L. Bianchi. Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung 576
S. Lie. Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung . 576. 577. 578
A. Enneper. Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien 579
A. v. Braunmühl. Ueber ein Problem des Minimums 581
R. Hoppe. Lehrbuch der analytischen Geometrie 582
R. Hoppe. Ueber die Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel 582
R. Hoppe. Ueber Parallelen geschlossener Curven 582
R. Hoppe. Ueber dreifach gekrümmte Curven und deren Parallelen 586

Seite
H. Poincaré. Sur les courbes définies par une équation différentielle 588
H. Résal. Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite 589

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

G. Darboux. Sur le contact des courbes et des surfaces 590
G. Darboux. Sur le contact des coniques et des surfaces 596
Moutard. Sur le contact des coniques et des surfaces 596
E. W. Hyde. Proof of a proposition in solid geometry 596
A. Cayley. On the number of constants in the equation of a surface 596
G. Kohn. Ueber algebraische Raumcurven 597
G. Westphal. Ueber das simultane System zweier quaternärer Formen zweiten Grades 597

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

F. Hočevar. Ueber die Erweiterung eines geometrischen Lehrsatzes von Varignon 597
Genese, J. J. Walker. Lösungen von Aufgaben 598
H. Laurent. Réduction des polynômes au 2ième degré 598
A. Maynz. Einige Lehrsätze aus der analytischen Geometrie . . . 598
F. Mertens. Zwei Berührungsaufgaben 600
Moret-Blanc. Questions proposées par M. H. Faure 601
H. M. Taylor. On the equation of the two planes which can be drawn through two given points to touch a quadric 602
†Dziwiński. Gleichung der Berührungscylinder und Kegel der Flächen zweiten Grades 602
O. Rüthnick. Ueber zwei auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegende Kegelschnitte 603
N. Herz. Einige Eigenschaften von Kugelbüscheln und Kugelschaaren 603
Th. Craig. Determination of a sphere which cuts five given spheres at the same angle 604
Gambey, H. Courbe. Solutions de questions 604
K. Schwering. Ueber eine eigenthümliche Deformation der Kegelschnitte 605
A. Strnad. Ueber die Kegelfläche zweiten Grades 607
G. Westphal. Ueber das simultane System zweier quaternärer Formen zweiten Grades 607
J. B. Göbel. Ueber einige Eigenschaften des Cylindroids 608
W. R. Roberts. On the satellite of a line meeting a cubic . . . 609
F. Gerbaldi. Sui sistemi di cubiche gobbe 609

D. Andere specielle Raumgebilde.

H. M. Jeffery. On spherical curves of the third class with three single foci 610
Brill. Mathematische Modelle 610. 616
O. Böklen. Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle 617
C. Schilling. Die Minimalfläche fünfter Classe 617
Niewenglowski. Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima. 619

Capitel 4. Liniengeometrie. (Complexe, Strahlensysteme.)

†A. Hirst. On the complexes generated by two correlative planes . 619
C. Stéphanos. Sur la théorie des connexes conjugués 619

Seite
F. Schur. Zur Theorie der Strahlencomplexe zweiten Grades . . . 620
G. Battaglini. Sui complessi di secondo grado 620
F. Aschieri. Rappresentazione sullo spazio punteggiato di alcune forme di 3ª specie composte di rette 621

Capitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

E. Bertini. Sulle trasformazioni univoche piane 621
S. Kantor. Ueber cyklische Gruppen in der quadratischen und Cremona'schen Transformation 623
S. Kantor. Ueber successive lineare Transformationen 623
S. Kantor. Sur les transformations linéaires successives dans le même espace de r dimensions 623
S. Kantor. Zur Theorie der successiven quadratischen Transformationen in der Ebene 623
E. Amigues. Recherches sur deux modes de transformation des figures solides 625
F. Aschieri. Di una particolare corrispondenza univoca fra elementi di spazi a tre dimensioni 626

B. Conforme Abbildung.

F. Lucas. Géométrie des polynômes 626
A. Cayley. On a theorem relating to conformable figures 627
Ed. Weyr. Ueber die äquivalente Abbildung zweier Flächen . . . 628
G. Holzmüller. Ueber die conforme Abbildung mittels ganzer und gebrochener Functionen 628
Th. Craig. Orthomorphic projection of an ellipsoid upon a sphere . 630
A. Tissot. Sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques 632

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

Laplace. Oeuvres complètes 635
W. Schell. Theorie der Bewegung und Kräfte 635
Gilles. Die Newton'sche Anziehungskraft ist auf Bewegung nicht zurückführbar 636

Capitel 2. Kinematik.

H. Résal. Sur les différentes branches de la cinématique 636
A. Mannheim. Cours de géométrie descriptive 636
W. Kapteyn. Théorème de géométrie plane 639
F. Wittenbauer. Theorie der Beschleunigungscurven 640
H. Résal. Sur quelques théorèmes de cinématique 641
L. Geisenheimer. Beziehung zwischen den Krümmungsradien reciproker, collinearer und inverser ebener Curven 643
L. Burmester. Ueber das bifocal-veränderliche System 643
M. d'Ocagne. Applications de géométrie cinématique 645
C. F. Geiser. Ueber einen fundamentalen Satz aus der kinematischen Geometrie des Raumes 645

Seite

Schönemann. Ueber die Construction von Normalen und Normalebenen gewisser krummer Flächen und Linien 646
R. S. Ball. Notes on non-euclidean geometry 647
G. Halphén. Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide 647
Ad. Schumann. Ueber die Flächenräume und Bogenlängen, welche bei der Bewegung eines starren Systems von einer Geraden umschrieben werden 648
G. Gautero. Sul movimento di una superficie che ne tocca costantemente un altra fissa 649
W. Hess. Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariabeln Ebene 649
A. Mannheim. Construction de la normale à la surface de Glaisher 650
A. Mannheim. La surface de l'onde considérée comme surface limite 650
A. Mannheim. Nouvelle génération de la surface de l'onde . . . 652
L. Burmester. Ueber die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten 652
†P. Wiecke. Beitrag zur Theorie des Watt'schen Parallelogramms 653
A. de Saint-Germain. Sur le parallélogramme de Watt 653
F. Masi. Dei giunti derivati del quadrilatero sferico 654
G. Gautero. Di una classe di meccanismi a tre membri 654

Capitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

E. W. Hyde. Mechanics by quaternions 654
M. d'Ocagne. Sur la composition des forces 655
G. Chrystal. On Minding's system of forces 655
P. G. Tait. On Minding's theorem 656
F. J. van den Berg. Oplossing eenede prijsvraag 656
F. J. van den Berg. Over de vergelijking des door drie gegeven richtlijnen bepaalde hyperboloïde 657
R. Hoppe. Elementarer Beweis für die Existenz eines Mittelpunktes gleichgerichteter Kräfte 657
C. J. Monro, M. Jenkins. Solution of a question 657
G. Dostor. Détermination algébrique très simple du centre de gravité du trapèze 657
R. Hoppe. Schwerpunkt eines Vielecks 658
P. Jolmen. Schwerpunkt des Vierecks 658
E. Nöggerath. Ueber den Schwerpunkt des Vierecks 658
Stoll. Ueber den Schwerpunkt des Vierecks 658
C. Guidi. Sulla determinazione delle forze interne nelle tracce omogenee e reticolari 659
G. Schubring. Gleichgewicht einer Kette in einem besonderen Falle 659
†F. Wagner. Grundträk af Ligerägtstläron 659
G. Schnack. Foreläsninger over grafisk Statik 659
†Th. Eddy. Neue Constructionen aus der graphischen Statik . . . 660
G. Bellavitis. Sulla statica 660
A. Favaro. Sopra alcuni esercizii di statica grafica 660
J. J. Walker, L. Leidhold, T. R. Terry, Wolstenholme, E. W. Symons, E. Rutter, Townsend, J. C. Sharp, W. J. C. Miller, Moncourt, J. Hammond. Lösungen von Aufgaben aus der Statik 660
G. Jung. Soluzione geomeccanica di alcune problemi d'interpolazione 660

Seite

B. Hydrostatik.

L. Matthiessen. Ueber die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren der Satelliten der Erde und des Jupiter 661
K. Stier. Ueber die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren und die Umdrehungsgeschwindigkeit einer flüssigen Masse bei gegebener Energie 662
K. Zöppritz. Ueber Schwankungen des Meeresspiegels infolge von geologischen Veränderungen 663
A. Angot. Tables nouvelles pour calculer les hauteurs au moyen des observations barométriques 664
E. Rouché. Sur la machine pneumatique 664
H. v. Jettmar. Ueber das Metacentrum 664

Capitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

G. Helm. Beiträge zur geometrischen Behandlung der Mechanik . 665
A. Mayer. Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen 666
F. Siacci. Nota intorno ad una legge di reciprocità dinamica . . 667
Ph. Gilbert. Rectification aux formules sur les mouvements relatifs 667
J. Loudon. Notes on relative motion 667
N. Herz. Die lebendige Kraft eines bewegten Körpers 668
O. Simony. Ueber eine Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen einiger allgemeiner Sätze der Mechanik 668
G. J. Michaelis. Over het beginsel van het behond der energie . 669
A. Handl. Neue Art der elementaren Ableitung der Formel für die Fliehkraft 671
K. L. Bauer. Zur Behandlung der Lehre von der gleichförmig beschleunigten Bewegung 671
H. Hart. On the path of a projectile 671
A. J. Pick. Elementare Ableitung der Formel für die östliche Abweichung frei fallender Körper 671
H. H. Bates. On the movement of a particle attracted towards a point 672
Nordmann. Ueber eine Art der Centralbewegung 672
R. Hoppe. Ueber die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze . . . 672
G. Bardelli. Intorno ad alcune relazioni geometriche e meccaniche concernenti le linee gobbe 672
H. A. Howe. Three approximations of Kepler's problem 673
H. Hart. Integration of the rectangular equations of motion in a special case 673
H. Gyldén. Sur l'orbite que parcourt un point matériel par un sphéroïde 674
†H. Gyldén. Ueber die Bahn eines materiellen Punktes unter Wirkung einer gewissen Centralkraft 675
H. G. Zeuthen. Nogle tilsyneladende Paradoxer i Läaren om Centralbevægelse 675
A. H. Curtis. On free motion under the action of several central forces 675
G. Morera. Sul moto di un punto attratto da due centri fissi colla legge di Newton 676
A. Legoux. Sur les trajectoires d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale 676
C. Wex. Aufgaben aus der rationellen Mechanik 677

Seite

V. G. Imchénetzky. Détermination en fonction des coordonnées de la force qui fait mouvoir un point matériel sur une section conique . . . 677
U. Dainelli. Sul movimento per una linea qualunque . . . 678
J. G. Wallentin. Zur elementaren Ableitung der allgemeinen Gleichungen der oscillatorischen Bewegung . . . 678
H. Résal. Théorie élémentaire des brachistochrones . . . 679
R. R. Webb. The brachistochrone problem of a system . . . 679
G. Formenti. Sul problema delle tautocrone . . . 680
C. Müller. Ueber barytrope und tautobaryde Curven . . . 680
H. Geelmuyden. Die conische Pendelbewegung . . . 681
H. Résal. Du problème inverse du mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution . . . 681
F. Wittenbauer. Theorie der Bewegung auf developpabeln Flächen 681
J. Farkas. Mittlerer verticaler Druck des symmetrischen Pendels auf seine Axe . . . 682
G. Govi. Nouvelle méthode pour déterminer la longueur du pendule simple . . . 683
G. Darboux. Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps . . . 683
H. Léauté. Sur l'établissement des équations données par M. Résal pour présenter le mouvement d'une courbe funiculaire plane . . 683
H. Léauté. Équations des petites oscillations d'un fil inextensible en mouvement dans l'espace . . . 683
H. Léauté. Détermination des torsions moyennes développées aux extrémités d'une corde pesante oscillante autour d'une position de repos apparent . . . 683
R. Hoppe. Ueber die freie Bewegung eines Körpers ohne Einwirkung eines Kräftepaares . . . 684
A. G. Greenhill. The application of elliptic coordinates and Lagrange's equations of motion to Euler's problem of two centres of forces . . . 685
E. Brassinne. Détermination de trois axes d'un corps solide sur lesquelles les forces centrifuges exercent, par suite de la rotation, un effet maximum . . . 686
S. Tebay, Townsend, T. R. Terry, Matz, J. C. Monro, J. J. Walker, G. S. Carr. Lösungen von Aufgaben aus der Dynamik fester Körper . . . 687
M. Deprez. Sur un nouvel indicateur dynamométrique . . . 687
†F. van Rysselberghe. Description d'un régulateur elliptique isochrone . . . 687
Y. Villarceau. Sur les régulateurs à ailettes . . . 687
Philipps. De la compensation des températures dans les chronomètres . . . 688
C. Rozé. Études de la chronométrie . . . 688
Ph. Gilbert. Sur l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités des aiguilles d'une montre . . . 689
H. Léauté. Recherche du coefficient de régularité du mouvement dans les transmissions par câbles . . . 689
H. Léauté. Règles pratiques pour l'établissement des transmissions télodynamiques . . . 689

B. Hydrodynamik.

J. M. Hill. Some properties of the equations of hydrodynamics . . 690
H. A. Rowland. On the motion of a perfect incompressible fluid when no solid bodies are present . . . 691

Seite
P. Paci. Sopra una trasformazione delle equazioni fondamentali della idrodinamica . . . 692
O. Tumlirz. Ueber die Fortpflanzung von Kugel- und Cylinderwellen endlicher Schwingungsweiten . . . 692
W. M. Hicks. On the motion of two spheres in a fluid . . . 694
W. M. Hicks. On the problem of two pulsating spheres in a fluid . . . 695
A. G. Greenhill. On the general motion of a liquid ellipsoid under the gravitation of its own parts . . . 696
W. M. Hicks. On the condition of steady motion of two cylinders in a fluid . . . 696
A. G. Greenhill. On the steady motion of a top . . . 696
N. M. Ferrers. On the motion of water contained in certain cylindrical vessels . . . 697
†J. J. Adair. To find the velocity potential for a liquid contained between a fixed ellipsoid and a moving confocal ellipsoid within the former . . . 697
W. Thomson. On vortex statics . . . 697
W. Thomson. Vibrations of a columnar vortex . . . 698
M. Margules. Ueber discrete Wirbelfäden . . . 698
M. Margules. Ueber die Rotation einer Flüssigkeit in einem rechtwinkligen vierseitigen Prisma . . . 698
L. Graetz. Ueber Wirbelbewegungen in compressiblen Flüssigkeiten . . . 698
G. Kirchhoff. Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit . . . 699
G. Kirchhoff und Hansemann. Ueber stehende Schwingungen des Wassers . . . 699
A. R. Forsyth. On the motion of a viscous incompressible fluid . 700
Bresse. Fonctions des vitesses, extension des théorèmes de Lagrange au cas d'un fluide imparfait . . . 701
Boussinesq. Sur la manière dont les frottements entrent en jeu dans un fluide qui sort de l'état de repos, nebst Antwort von Bresse und Erwiderung von Boussinesq . . . 701
Th. Craig. On steady motion in an incompressible viscous fluid . . 702
Th. Craig. On certain possible cases of steady motion in a viscous fluid . . . 702
H. Stearn. On some cases of the varying motion of a viscous fluid . . . 703
L. Grätz. Ueber die Bewegung von Flüssigkeiten in Röhren . . . 704
J. Finger. Ueber den Einfluss der Rotation des Erdsphäroids auf terrestrische Bewegungen . . . 707
C. M. Guldberg, H. Mohn. Étude sur les mouvements de l'atmosphère . . . 709
G. Recknagel. Ueber Luftwiderstand . . . 710
W. Thomson. On gravitational oscillations of rotating water . . 711
Rayleigh. On the stability or instability of certain fluid motions . 711
Relazione intorno alle memorie presentate pel premio d'idrodinamica teorica . . . 712
C. Razzaboni. Sul moto dell' acqua per alvei a fondo orizzontale . . . 713
W. K. Kutter. Die neuesten Formeln für die Bewegung des Wassers . . . 713
D. Turazza. Delle formole più appropriate pel calcolo degli scoli delle basse pianure . . . 713
G. Bucchia. Sulle proprietà meccaniche delle ruote a schiaffo . . 714

Seite

Capitel 5. Potentialtheorie.

E. Picard. Sur l'équation aux dérivées partielles du potentiel . . . 715
A. Luke. Ableitung der Poisson'schen Differentialgleichung für die Potentialfunction 715
C. Neumann. Neue Sätze über das logarithmische Potential . . . 715
C. Neumann. Neue Sätze über das Newton'sche Potential 715
E. Beltrami. Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sign. C. Neumann 717
Kirsten. Beitrag zu den Untersuchungen im Gebiete des logarithmischen Potentials 718
J. Boussinesq. Sur la manière de présenter la théorie du potentiel dans l'hypothèse de la discontinuité de la matière 719
Husmann. Ueber äquipotentiale Massenvertheilungen 719
J. Roberts. A useful theorem in the theory of attractions 719
E. Beltrami. Sulla teoria dell' attrazione degli ellissoidi 720
A. Picart. Sur l'attraction des ellipsoïdes 720
J. W. Warren. Elementary investigation of Legendre's theorem concerning the attraction of an ellipsoid on an external point . 721
†P. Frost. On the potential and attractions of an ellipsoidal shell at an external point 721
†H. Streintz. Ueber den Beweis eines Satzes 721
G. J. Legebeke. Quelques propriétés générales d'une couche matérielle qui a le même potentiel qu'une masse donnée 721
A. G. Greenhill. On the differential equation of the ellipticities of the strata in the theory of the figure of the earth 722
Winterberg. Ueber die Anziehung von Massenpunkten 722
S. Günther. Eine Anwendung schiefwinkliger Coordinaten auf ein Problem der Potentialtheorie 722
R. Hoppe. Potential der sphärischen Dreiecke 723
W. D. Niven. On the potential at any point of space due to a solid sphere 723

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Capitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

De Heen. Détermination des dimensions réelles des molécules . . 724
C. Lagrange. Recherches sur l'influence de la forme des masses dans le cas d'une loi quelconque d'attraction, nebst Rapport von G. v. d. Mensbrugghe 724
J. Weingarten. Zur Theorie der isostatischen Flächen 725
S. Germain. Sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques 728
De St.-Venant. Sur certaines déformations des corps, nebst Complément 728
Lecornu. Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles . . 729
G. Kirchhoff. Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt 731
E. Mathieu. Sur les intégrations relatives à l'équilibre d'élasticité 731
E. Mathieu. Sur l'équilibre d'élasticité d'un prisme rectangle . . . 732
Saalschütz. Der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft 733
E. Warburg. Ueber die Torsion 734
H. G. Zeuthen. Grafisk Behandling af en Bjalkes bevaegelige Belastning 736
G. Curioni. Sulla equazione dei momenti inflettenti nelle sezioni correspondenti a tre appoggi successivi 737

Seite

S. Périssé. Des causes qui tendent à gauchir les poutres des ponts à fer . . . 737
H. Résal. De l'influence de la température et de l'élasticité sur les câbles des ponts suspendus . . . 737
S. Canevazzi. Sopra una formola della resistenza dei materiali . 738
A. Martin, Matz, T. R. Terry, A. McMurchy, Townsend, J. J. Walker, J. E. A. Steggall, D. Edwardes, Wolstenholme, Genese. Lösungen von Aufgaben aus der Elasticitätslehre . . . 738
P. M. Heringa. Considérations sur la théorie des phénomènes capillaires . . . 738
E. Roger. Théorie des phénomènes capillaires . . . 739
P. Volkmann. Ueber den Einfluss der Krümmung der Wand auf die Constanten der Capillarität bei benetzenden Flüssigkeiten . 740

Capitel 2. Akustik und Optik.

E. Mercadier. Sur la détermination des éléments d'un mouvement vibratoire . . . 740
O. Tumlirz. Ueber die Fortpflanzung von Kugel- und Cylinderwellen . . . 741
Amagat. Note sur l'équation qui conduit à l'expression théorique de la vitesse du son . . . 741
R. A. Mees. De voortplanting van vlakke geluidsgolven in gassen 741
A. Kneser. Ueber atmosphärische Schallstrahlenbrechung 742
F. Niemöller. Ueber die Schwingungen einer Saite, deren Spannung eine stetige Function der Zeit ist . . . 743
W. Voigt. Theorie des leuchtenden Punktes . . . 744
G. Kirchhoff. Bemerkung zu einer Arbeit des H. W. Voigt . . . 744
W. Voigt. Zur Fresnel'schen Theorie der Diffraction . . . 747
E. Maiss. Graphische Methode zur Erklärung des Kern- und Halbschattens . . . 748
Gouy. Sur la propagation de la lumiére . . . 749
A. Cornu. Sur la vitesse de propagation de la lumière . . . 749
V. v. Lang. Bemerkungen zu Cauchy's Theorie der Doppelbrechung 749
G. F. Fitzgerald. On the electrodynamic theory of the reflexion and refraction . . . 751
J. J. Thomson. On Maxwell's theory of light . . . 752
H. A. Lorentz. Ueber die Beziehungen zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts und der Körperdichte . . . 753
E. Ketteler. Theorie der absorbirenden anisotropen Mittel . . . 758
E. Ketteler. Das Dispersionsgesetz . . . 758
E. Ketteler. Constructionen zur anomalen Dispersion . . . 760
O. Hesse. Untersuchungen über das Dispersionsgesetz . . . 760
E. Ketteler. Zur Vervollständigung der Reflexion . . . 760
R. F. Glazebrook. On the reflexion and refraction of light . . . 763
M. Réthy. Zur Theorie der Reflexion und Brechung . . . 763
R. Hofer und M. Kuhn. Modelle zur Demonstration der Reflexion 767
F. E. Scheller. Zur Behandlung der Linsentheorie . . . 767
L. Lorenz. Ueber die Refractionsconstante . . . 767
Rayleigh. Investigation in optics . . . 769
Rayleigh. On the minimum aberration of a lens for parallel rays . 769
Rayleigh. On reflexion of vibrations at the confines of two media 770
M. Réthy. Ueber die Polarisation des gebeugten Lichtes . . . 770
Glazebrook. Note on Nicol's prism . . . 771
Gouy. Sur la théorie des phénomènes d'interférence . . . 771
Glazebrook. Double refraction and dispersion in Iceland spar . . 772

Seite
E. Ketteler. Theorie der Interferenzerscheinung 772
E. Lommel. Ueber Fluorescenz 772
E. Lommel. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen 773
K. Exner. Ueber die Newton'schen Staubringe 773
H. F. Weber. Die wahre Theorie der Fresnel'schen Interferenzerscheinungen 774
L. Sohncke und A. Wangerin. Neue Untersuchungen über die Newton'schen Ringe 774
Feussner. Ueber die Theorie der Interferenzerscheinungen 774
W. Werner. Bestimmung und Untersuchung einer Curve, die durch Reflexion entsteht 774
A. Cornu. Sur le spectre normal du soleil 775
Badal. Études d'optique physiologique 775
G. Sous. Phakomètre et optomètre 776
R. Ferrini. Sull' aberrazione di sfericità nelle lenti 776
Harkness. The number of lenses required in an achromatic objective 776

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

C. Neumann. Die Principien der Elektrodynamik 777
J. Fröhlich. Bemerkungen zu den elektrodynamischen Grundgesetzen von Clausius, Riemann und Weber 777
E. Budde. Das Clausius'sche Gesetz und die Bewegung der Erde im Raume 777
R. Clausius. Ueber die Vergleichung der elektrodynamischen Grundbegriffe mit der Erfahrung 777
J. Delsaux. Sur la loi de force de M. Clausius entre des courants élémentaires 779
R. Clausius. Ueber die Anwendung des elektrodynamischen Potentials zur Bestimmung der ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte 780
E. Mathieu. Réflexions sur les principes mathématiques de l'électrodynamique 781
J. Korteweg. Zur Theorie der elektrischen Kräfte 782
J. Korteweg. Ueber das ponderomotorische Elementargesetz . 782. 783
J. D. v. d. Waals. Eenige opmerkningar naar aanleiding van de algemeene theorie der ponderomotorische krachten van D. J. Korteweg 783
E. Riecke. Ueber die elektrischen Elementargesetze 785
J. Jamin. Sur la formule d'Ampère 786
E. Lehmann. Ueber die Einwirkung ruhender und rotirender Kugelflächen 786
G. J. Legebeke. Ueber einen allgemeinen Satz von Herrn R. Clausius 787
P. Frost. On the potential of the electricity on two charged spherical conductors 787
G. A. Maggi. Sopra un problema di elettrostatica 788
W. D. Niven. Application of Lamé's coordinates 788
J. Korteweg. Ueber die Veränderung der Form und des Volumens diëlektrischer Körper 788
L. Boltzmann. Zur Theorie der elektrischen Ausdehnung 789
W. Giese. Ueber den Verlauf der Rückstandsbildung in Leydener Flaschen 790
G. Kirchhoff. Ueber die Messung elektrischer Leitungsfähigkeiten 791
H. F. Weber. Beziehung zwischen dem Wärmeleitungsvermögen und dem elektrischen Leitungsvermögen der Metalle 793
J. C. Allan. On some problems in the conduction of electricity . 795

Seite
A. Guébhard. Sur une méthode à déterminer les lignes de niveau dans l'écoulement stationnaire de l'électricité 796
A. Guébhard. Sur les lignes équipotentielles d'un certain plan . . 796
E. Dorn. Ueber die Fortführung der Elektricität durch strömendes Wasser in Röhren 796
H. Helmholtz. Ueber Bewegungsströme am polarisirten Platina . 797
A. Witkowski. Ueber den Verlauf der Polarisationsströme . . . 797
M. Bellati. Sul valore dell' effetto Peltier in una coppia ferrozinco 798
C. Niven. On the vector potential 798
C. H. C. Grinwis. De dubbellading eener centrobarische massaverdeeling 798
H. A. Rowland. On the general equations of electro-magnetic action 799
H. R. Hertz. Versuch zur Feststellung einer oberen Grenze für die kinetische Energie der elektrischen Strömung 800
Niemöller. Deformation eines elastischen geknickten Stromleiters unter Einwirkung des Erdmagnetismus 801
E. Riecke. Ueber die unipolare Induction 801
K. Schering. Allgemeine Theorie der Dämpfung, welche ein Multiplicator auf einen Magnet ausübt 802
C. Laske. Messungen über das Mitschwingen für den Fall starker Dämpfung 803
F. Himstedt. Einige Versuche über Induction in körperlichen Leitern 804
J. Joubert. Sur la loi des machines magnéto-électriques 804
M. Deprez. Sur le rendement économique des moteurs électriques 805
G. Cabanellas. Sur un nouveau théorème électrodynamique . . . 806
P. F. S. Provenzali. Sulla conservazione del moto 806
J. Stefan. Ueber die Tragkraft der Magnete 806
B. Bandke. Einwirkung eines entfernten Magnets und einer von ihm inducirten Eisenkugel auf eine parallelepipedische Magnetnadel 807
K. Schering. Ueber eine neue Anordnung der Magnete eines Galvanometers 807
W. Schaper. Untersuchungen über die äquipotentiale Vertheilung der magnetischen Fluida in cylindrischen Stahlstäben 808
A. Righi. Contribuzioni alla teoria della magnetizzazione dell' acciaio 809
O. Pfannstiel. Ueber eine Methode, die Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus zu bestimmen 809
H. Wild. Vollständige Theorie des Bifilarmagnetometers 810
G. C. Foster. Lösungen von Aufgaben 811

Capitel 4. Wärmelehre.

E. Herrmann. Compendium der mechanischen Wärmetheorie . . . 811
M. Deprez. Sur le mesureur d'énergie 811
Despeyrous. Sur la thermodynamique 811
G. van der Mensbrugghe. Sur l'application du second principe de la thermodynamique aux variations d'énergie potentielle . . 812
G. van der Mensbrugghe. Du rôle de la surface libre de l'eau . 812
G. van der Mensbrugghe. Voyages et métamorphoses d'une gouttelette d'eau 812
A. Pazienti. Considerazioni generali intorno alla termodinamica . 812
O. E. Meyer. Ueber eine veränderte Form seines Beweises für das Maxwell'sche Gesetz, nebst Erwiderung darauf von L. Boltzmann 813

Seite
A. Walter. Theoretische Bestimmung der Gesetze, wonach bei vollkommenen Gasen die Molecularsphären etc. von der Temperatur abhängen 813
H. A. Lorentz. De bewegingsvergelijkingen der gassen 814
R. Clausius. Ueber einige neuere Untersuchungen über die mittlere Weglänge der Gasmolecüle 818
L. Boltzmann. Zur Theorie der Gasreibung 819
J. D. van der Waals. Onderzäkningen omtrent de overeenstemmende eigenschappen der normale verzadegden damp- en vloeistof-lijnen 821
J. D. van der Waals. Over de coefficienter van uitrekting . . . 821
F. Roth. Ueber die Zusammendrückbarkeit der Gase 824
R. Pictet. Équation donnant la relation qui existe pour tous les liquides entre leur température et la tension maximum de leurs vapeurs à cette température 825
W. Schlemüller. Der Zusammenhang zwischen Höhenunterschied, Temperatur und Druck 827
A. Ritter. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre 828
W. Schlemüller. Vier physikalische Abhandlungen 828
R. Clausius. Ueber das Verhalten der Kohlensäure in Bezug auf Druck, Volumen und Temperatur 829
C. Viry. Méthode synthétique rapide pour établir les formules fondamentales relatives aux changements d'état 831
N. Sluginoff. Folgerungen aus der mechanischen Theorie der Wärme 833
A. Wüllner. Ueber die specifische Wärme des Wassers 834
L. Pfaundler. Ueber die Berechnung der Temperaturcorrection bei calorimetrischen Messungen 834
J. D. van der Waals. De betrekking tuschen spanning, volumen en temperatuur bij dissociatie 834
J. Boussinesq. Sur les problèmes des températures stationnaires 835
C. Niven. On the conduction of heat in ellipsoids of revolution . . 836
J. Rosner. Ueber Wärmeleitung und die Methoden, das Wärmeleitungsvermögen zu bestimmen 838
G. Kirchhoff und G. Hansemann. Ueber die Leitungsfähigkeit des Eisens 839
H. F. Weber. Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten 841
A. Winkelmann, H. Herwig. Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn H. F. Weber nebst Erwiderungen von H. F. Weber 841. 842
A. Witz. Essai sur l'effet thermique des parois d'une enceinte sur les gaz qu'elle renferme 844
G. Grassi. Sulla trasmissione del calore tra due fluidi in movimento separati da una parete solida 845
J. Jamin. Compléments à la théorie de la rosée 846
A. Oberbeck. Strömungen von Flüssigkeiten in Folge ungleicher Temperatur innerhalb derselben 847
A. Hempel. Ueber den Wärmezustand der Erde 848
Roth. Erwiderung 848

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1. Geodäsie.

L. Giletta. Bibliografia 850
G. B. Daddi. Comenti ad un opuscolo 850

Seite
N. Jadanza. Sulla latitudine, longitudine ed azimut dei punti di una rete trigonometrica 850
Albrecht. Ueber die Umkehrung der Bessel'schen Methode der sphäroidischen Uebertragung 851
Bruns. Ueber die Umkehrung der Bessel'schen Methode der sphäroidischen Uebertragung 851
E. Paci. Sulle posizioni geografiche 851
A. G. Greenhill. On the differential equation of the ellipticities of the strata in the theory of the figure of the earth 852
Faye. Sur les variations séculaires de la figure mathématique de la terre 852
Faye. Sur la réduction des observations du pendule au niveau de la mer 852
C. Winterberg. Ueber die Anziehung von Massenpunkten 852
Helmert. Zur Frage der Beweiskraft der Gradmessungen für die Existenz der näherungsweisen rotationsförmigen Gestalt des Geoids 853
†Jordan. Elementare Begründung des Fundamentalsatzes über die geodätische Linie auf einer Umdrehungsfläche, nebst Zusatz von Wiener und Helmert 853
†P. Glotin. Navigation orthodromique 853
†Marek. Ueber approximative trigonometrische Berechnungen . . . 853
Jordan. Ueber die günstigste Seitengleichung im Viereck 854
P. Glotin. Résolution des triangles sphériques par des triangles rectilignes sur une projection gnomonique 854
A. Ferrero. Sur un procédé pratique pour établir l'accord entre plusieurs bases d'une triangulation 854
A. Börsch. Ueber den Einfluss der Wahl verschiedener Nullrichtungen auf die Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen 854
C. H. Kummell. Solution of a problem 855
V. de Rossi Re. Intorno alla costruzione delle curve intercalari nelle superficie rappresentate per le lore linee di livello 855
†Lindemann. Directe trigonometrische Berechnung der Aufgabe der unzugänglichen Distanz 856
A. Nagel. Mittheilungen aus dem Gebiete der Geodäsie 856
†E. Mayer. Ueber Küstenaufnahmen 856

Capitel 2. Astronomie.

H. C. E. Martus. Astronomische Geographie 856
H. Résal. Astronomie nautique 858
†E. Millosewich. Riflessioni sulla navigazione astronomica . . . 858
J. Hartmann. Lehrbuch der Zeitbestimmung und Zeitrechnung . . 858
Nordmann. Ueber eine Art der Centralbewegung 858
†H. A. Howe. New approximate solutions of Kepler's problem . . 859
Th. v. Oppolzer. Ueber die Bestimmung grosser wahrer Anomalien in parabolischen Bahnen 859
W. Fabritius. Ueber den Fall des grössten Kreises bei Bahnbestimmungen aus drei beobacheten Oertern 859
A. de Gasparis. Sopra una relazione di distanze nel problema dei tre corpi 859
Weiler. Das Problem der drei Körper in der neuen Störungstheorie 859
Ch. Trépied. Sur la méthode de Cauchy pour le développement de la fonction perturbatrice 860
F. Tissérand. Sur un développement particulier de la fonction perturbatrice 860

Seite

A. de Gasparis. Verificazione ed uso di una formola pel calcolo delle perturbazioni planetarie 860
S. Newcomb. A method of developing the perturbative function of planetary motion 861
Lehmann-Filhés. Schreiben an den Herausgeber der Astr. Nachrichten 861
E. Sourander. Sur le discriminant de l'équation dont dépendent les inégalités séculaires des planètes 861
A. de Gasparis. Sulla variazione della eccentricità nelle orbite planetarie 861
A. de Gasparis. Sur la variation de la longitude, du noeud, de l'inclinaison et du demi-paramètre dans les orbites planétaires . 862
A. de Gasparis. Sur la variation du demi grand axe des orbites planétaires 862
A. Gaillot. Sur les tables du mouvement de Saturne de Le Verrier 862
A. Souchon. Sur un point de la théorie analytique du système du monde 862
H. Hennessy. Sur la figure de la planète Mars 862
†O. Callandreau. Détermination du mouvement de la planète Héra 863
G. H. Darwin. On the secular changes in the elements of the orbit of a satellite 863
Souillart. Théorie analytique des satellites de Jupiter 863
A. de Gasparis. Sulla variazione dell' area descritta dalla luna intorno alla terra, prodotta dall' azione solare 864
J. C. Adams. Note on the constant of lunar parallax 864
J. C. Adams. Investigation of the secular acceleration of the moon's mean motion 864. 865
G. B. Airy. On the theoretical value of the acceleration of the moon's mean motion 865
G. H. Darwin. On the secular effects of tidal friction 865
Lehmann-Filhés. Ueber die Bestimmung des Radiationspunktes eines Sternschnuppenschwarms 865
Lehmann-Filhés. Ueber die Vertheilung der Radiationspunkte an der Himmelskugel 866
H. Gyldén. Versuch einer mathematischen Theorie zur Erklärung des Lichtwechsels der veränderlichen Sterne 866
C. Taylor. Insigniores orbitae cometarum proprietates 866
†R. Radau. Sur la réfraction de Bessel 866
C. Israel. Ueber die theoretisch möglichen Fälle der Polhöhenbestimmung 867
G. Lorenzoni. Sul luogo sferico dei punti nei quali è minima la variazione dell'azimut rispetto al tempo 867
A. Abetti. Sulla determinazione del tempo coll'osservazione dei passagi delle stelle pel verticale della polare 867
G. Lorenzoni. Sulla determinazione delle coordinate angolari mediante gli strumenti astronomici 868
A. Saporetti. Metodo teorico pratico per iscoprire gl'istanti de nascere e tramontare della luna 868
Pechüle. Dérivation de certaines formules de réduction 868
E. B. Elliott. Calendar formulae 868

Seite

Anhang.

F. X. Steck und J. Bielmayr, A. Boset, F. J. Studnička, W. Gosiewski, W. Tribulski. Lehrbücher der Arithmetik und Algebra 869. 870
W. Schrader. Mathematisches Formelbuch 870
Bremiker, F. G. Gauss. Logarithmentafeln 871
C. A. Vogler. Erwiderung auf einige Fragen des Herrn Lalanne 871
J. Mckenzie. Erreurs dans les tables mathématiques 871
W. Adam. Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel 872
J. J. Sylvester. Solutions of questions 872
W. C. Wittwer. Grundzüge der mathematischen Chemie 872
A. Kurz. Aus der Schulmappe 873

Verzeichnis

der Herren, welche für den zwölften Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate).

A.	Herr	Prof. August in Berlin.
B.	-	Prof. Bruns in Leipzig.
Bn.	-	Dr. Biermann in Berlin.
B. R.	-	Prof. du Bois-Reymond in Tübingen.
Cly.	-	Prof. Cayley in Cambridge.
Csy.	-	Prof. Casey in Dublin.
Dk.	-	Dr. Dyck in Leipzig.
Dn.	-	Dickstein in Warschau.
G.	-	Prof. v. Geer in Leiden.
Glr.	-	Prof. Glaisher in Cambridge.
Gm.	-	Dr. Gram in Kopenhagen.
Gr.	-	Prof. Günther in Ansbach.
H.	-	Prof. Hoppe in Berlin.
Hr.	-	Dr. Hamburger in Berlin.
H. St.	-	Prof. H. Stahl in Aachen.
Hz.	-	Dr. Hurwitz in Göttingen.
L.	-	Prof. Lie in Christiania.
Ls.	-	Lazarus in Hamburg.
M.	-	Dr. F. Müller in Berlin.
Mi.	-	Dr. Michaelis in Berlin.
M-L.	-	Prof. Mittag-Leffler in Stockholm.
Mn.	Herr	Prof. Mansion in Gent.
Mr.	-	Prof. A. Mayer in Leipzig.
My.	-	Dr. F. Meyer in Tübingen.
Mz.	-	Dr. Maynz in Ludwigslust.
Nn.	-	Prof. Neumann in Leipzig.
No.	-	Prof. Netto in Berlin.
O.	-	Dr. Ohrtmann in Berlin.
Ok.	-	Prof. Oberbeck in Halle a. S.
P.	-	Dr. v. Posse in Petersburg.
Rg.	-	Prof. Rodenberg in Darmstadt.
Rs.	-	Dr. Rosochatius in Berlin.
Schg.	-	Dr. Schlegel in Waren.
Schn.	-	Prof. Schumann in Berlin.
Scht.	-	Dr. Schubert in Hamburg.
Sn.	-	Dr. Simon in Berlin.
St.	-	Prof. Stolz in Innsbruck.
Std.	-	Prof. Studnička in Prag.
T.	-	Dr. Toeplitz in Breslau.
Tx.	-	Prof. Teixeira in Coimbra.
V.	-	Prof. Voss in Dresden.
Wn.	-	Prof. Wangerin in Halle a. S.
W. St.	-	Prof. W. Stahl in Aachen.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Dr. C. Ohrtmann, Berlin SW, Markgrafenstr. 78. III.

Berichtigungen.

Band XI.

Seite 153 Zeile 18 von oben schalte zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{5}$ ein $\frac{3}{8}$.

„ 182 „ 1 „ „ lies $+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{6!}-$ statt $+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{6!}+$.

„ 183 „ 10 „ „ „ e^{-e} statt $e^{-\frac{1}{e}}$.

„ 183 „ 14 „ „ „ die Werthe $e^{-\frac{1}{e}} \leqq x \leqq e^{-\frac{1}{e}}$ statt alle genannten Werthe von x.

Band XII.

„ 63 „ 6 „ „ „ Argand statt Argaud.

„ 139 „ 1 „ unten „ Frisby statt Fresby.

„ 463 „ 9 „ oben „ „Es giebt nur fünf Arten Polyeder, deren Ecken alle m Kanten haben, und deren Seiten alle n-Ecke sind.“ statt „Es giebt nur fünf Arten von regulären Polyedern.“

„ 564 „ 10 „ unten „ Curven statt Raumgebilde.

„ 567 „ 12 „ „ „ Vietor statt Victor.

Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.

Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

A. Favaro. Sulla interpretazione matematica del papiro Rhind. Mem. di Modena XIX. 89-145.

Siehe F. d. M. XI. 1879 p. 1.

A. Marre. Dos reglas de la aritmética de los Indos. Cron. cient. III. 153-155, 177-178.

J. L. Heiberg. Die Kenntnisse des Archimedes über die Kegelschnitte. Schlömilch Z. XXV. Hl. A. 41-67.

Der Verfasser beginnt nach einer kurzen Einleitung mit der von ihm bereits in seinen Quaestiones Archimedeae aufgestellten Frage, ob Archimedes ein selbständiges Werk über Kegelschnitte geschrieben habe. Er hatte dort die Frage verneint und giebt nun hier im § 2 der Arbeit die Gründe, welche ihn zu dieser Ansicht geführt haben. Er geht dann zu seinem eigentlichen

Thema über, einer Zusammenstellung der Sätze von den Kegelschnitten, die Archimedes bereits vorgefunden. Als Kriterium gilt ihm dabei, dass die Sätze entweder von Archimedes ausdrücklich als von Früheren bewiesen bezeichnet werden, oder stillschweigend von ihm als bekannt vorausgesetzt und benutzt werden. Die Zusammenstellung dieser Sätze geschieht so, dass zuerst allgemeine Sätze, dann solche über die Ellipse, Parabel und Hyperbel angeführt werden. Es sind an allgemeinen Sätzen 4, über die Ellipse 7, die Parabel 12 und die Hyperbel 8. Wegen der Sätze selbst muss Referent auf die Arbeit verweisen. Sodann folgt im § 4 eine Besprechung der Erweiterungen, die die Kegelschnittlehre durch Archimedes erfahren hat. Es werden hier namentlich eine Reihe von Sätzen über Parabelsegmente zusammengestellt, denen einige Sätze über die Ellipse folgen. § 5 endlich enthält zum Schluss eine Zusammenstellung der mit Hülfe von Kegelschnitten zu lösenden Aufgaben, die Archimedes gekannt hat. O.

F. Gustafsson. De codicibus Boëtii de institutione arithmetica librorum Bernensibus. Act. Soc. Fenn. XI.

M. L.

H. Weissenborn. Die Uebersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelhard von Bath nach zwei Handschriften der Königlichen Bibliothek in Erfurt. Schlömilch Z. XXV. Suppl. 141-166.

Gestützt auf die beiden Erfurter Manuscripte sieht sich der Verfasser in der Lage, manche der von Libri und Chasles betreffs der Adelhard'schen Euklid-Uebersetzung gemachten Angaben richtig zu stellen. Besonders in den Beweisen waltet zwischen Adelhard und Campanus ein sehr wesentlicher Unterschied ob; die selbständigen Zusätze des Letzteren fehlen bei Ersterem ebenfalls, und wenn hiergegen der Umstand zu sprechen schiene, dass die Nürnberger Abschrift der Adelhard'schen Uebersetzung eine sehr hübsche Theorie der Sternpolygone enthält, so dürfte

diese Einschaltung, wie Herr Weissenborn mit Recht annimmt, auf Rechnung des Regiomontanus zu setzen sein, welchem das fragliche Exemplar nachweislich angehört hat.

Es soll jedoch nicht verschwiegen bleiben, dass M. Curtze (Deutsche Literaturzeitung 1881, No. 14) einen schwer wiegenden Einwand gegen die Weissenborn'schen Resultate geltend gemacht hat. Derselbe besteht darin, dass es Adelhard-Handschriften giebt, die mit gewissen Campanus-Handschriften sehr genau übereinstimmen, und da die oben erwähnten Schlüsse über die Nichtübereinstimmung der von Adelhard und von Campanus ausgegangenen Bearbeitungen sich nur auf eine Druckausgabe der letzteren stützen, so muss jenen Schlüssen die volle Beweiskraft abgesprochen werden. Gr.

A. Hochheim. Al Kâfi fîl Hisâb. III. Halle a. S. Nebert.

Siehe F. d. M. XI. 1879 p. 7.

H. Schapira. Mischnath Ha-Midoth (Lehre von den Massen) aus einem Manuscripte der Münchener Bibliothek, bezeichnet Cod. Hebr. 36., als erste geometrische Schrift in hebräischer Sprache herausgegeben und mit einigen Bemerkungen versehen von Dr. M. Steinschneider (Berlin 1864); in's Deutsche übersetzt, erläutert und mit einem Vorwort versehen.

Schlömilch Z. XXV. Suppl. 1-54.

Dem Uebersetzer lag ein früher bereits von Steinschneider beschriebener Sammelband vor, der eine Arithmetik des Levi ben Gerson, eine hebräisch-arabische Uebersetzung des Euklid, zahlreiche astronomische und astrologische Schriften (grossentheils von Abraham bar Chija), ein zahlentheoretisches Manuscript des Ibn Esra, einen Commentar zur nikomachischen Zahlenlehre, eine Abhandlung des Simon Mutut über Asymptoten, Philosophisches und Optisches und dann auch (als sechstes Stück unter neunzehn Nummern) den uns hier beschäftigenden geometrischen Traktat

enthält. Das Alter dieses Traktates anlangend reicht er wahrscheinlich über das achte nachchristliche Jahrhundert hinauf. Inhaltlich stimmt er so auffallend mit dem geometrischen Theile des berühmten Werkes von Mohammed ben Musa überein, dass es scheint, als hätten beide Autoren, der Chowaresmier wie der Hebräer, ein und dieselbe Vorlage bei Abfassung ihrer Schriften benutzt. Für das Alter der Schrift sprechen auch Vergleichungen mit den Lehrbüchern des Alkarkhi und des Beha-Eddin, insofern sich diese späteren Araber weit mehr durch griechische Muster beeinflusst zeigen. Doch scheint der Verfasser der „Lehre von den Massen“ auch die Geodäsie des Heron gekannt zu haben, wenigstens verwendet er zur Berechnung der Fläche F eines Kreissegmentes die von dem Alexandriner gegebene Näherungsformel

$$F = \frac{1}{2} h(s+h) + \frac{1}{14} \cdot \frac{s^2}{4},$$

wo h die Sagitte, s die Sehne bedeutet (S. 20). Bemerkenswerth erscheint auch die (S. 26) ganz originelle Definition des recht-, spitz- und stumpfwinkligen Dreieckes, welche an die drei Relationen

$$a^2+b^2 = c^2, \quad a^2+b^2 > c^2, \quad a^2+b^2 < c^2$$

anknüpft. Gr.

S. Günther. Ein mathematisch-geographisches Dokument aus dem zehnten Jahrhundert. Leopold. XVI.

Ein jüdischer Diener des Kalifen Abdurrhaman IV. in Spanien, mit dem Namen Chasdai Ibn Schafrut, hatte von einem Reiche am kaspischen Meere gehört, das von einem israelitischen Volke bewohnt werde, und deshalb an den Beherrscher des Landes ein Schreiben erlassen, auf das ein Antwortschreiben des Chasuren-Chakans Joseph einging. Beide sind bereits publicirt. Aber dabei ist eine mathematisch-geographische Stelle fortgelassen. Diese findet sich nur in einem russisch geschriebenen Werke und in einem französischen Werke von Carmoly „Itinéraire de la sainte terre“. Um diese Stelle zugänglicher zu machen, wird dieselbe, da die Beschreibung der Hauptstadt auch die geographische

Breitenbestimmung derselben enthält, hier in einer von Herrn Zuckermann gefertigten Uebersetzung nebst den nöthigen erläuternden Bemerkungen publicirt. O.

M. Steinschneider. Abraham Ibn Esra (Abraham Judaeus, Avenare). Zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften im XII. Jahrhundert.
Schlömilch Z. XXV. Suppl. 57-128.

Es giebt zwei unter dem Namen „Abraham Judaeus" bekannte Gelehrte des Mittelalters, Abraham bar Chija und Abraham ibn Esra. Die Lebensverhältnisse des Letzteren sind nicht leicht festzustellen, da er ein ruheloses Wanderleben führte und seine Schriften grossentheils zweimal, zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten, publicirte. Wahrscheinlich ward er zwischen 1093 und 1096 zu Toledo geboren. Gestorben ist er um 1168, angeblich in Rom. Als beste Quelle ist ein von dem Granadenser Moses ibn Esra verfasstes Gedicht anzusehen, aus dem hervorgeht, dass Abraham von Toledo sich zuerst nach Cordova gewendet haben muss. Was ihn von dort vertrieben, steht ebensowenig fest, wie Zweck und Ort seiner anderen Reisen. Die Sage lässt ihn sogar Indien besuchen, doch ist dies jedenfalls nicht richtig, und die persönliche Kenntnis Abraham's vom Orient dürfte sich nicht über Aegypten hinaus erstreckt haben. Alle authentisch feststehenden Schriften des vielgelehrten Mannes sind hebräisch abgefasst, die ihm unterlegten arabischen Texte müssen als sehr zweifelhaft betrachtet werden. Auch mit der Kabbala und sonstigen mystischen Spekulationen dürfte sich Abraham weit weniger tief eingelassen haben, als man häufig angegeben findet. Vielmehr war sein Denken und Sinnen durchaus von mathematischen Begriffen beherrscht, so dass er geometrische Vergleiche und Symbolisirungen auch in Wissensgebiete hineinträgt, in die sie strenge genommen nicht gehören. So geben ihm anlässlich seiner Paraphrase des Exodus die sogenannten „Tetragrammata" יהוה und אהיה Gelegenheit zu einem sehr ausgedehnten Exkurs auf das Gebiet der Zahlentheorie,

wobei auch ein ganz interessanter geometrischer Lehrsatz mit unterläuft. Aehnliches gilt von dem Buche „ha-Schem“, worin u. a. drei verschiedene Zahlenwerthe für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser angeführt und geprüft werden. Abgesehen von diesen mehr gelegentlichen Bethätigungen mathematischer Denkweise giebt es nun aber auch Schriften von specifisch-mathematischer Tendenz, die von unserem Abraham ibn Esra herrühren. Da ist zuerst zu nennen eine Untersuchung über die Eigenschaften der ganzen Zahlen 1 bis 9, worin der Satz

$$n^2+(n+1)^2=(n+2)^2+(n+1)(n-3)$$

vorkommt, sodann eine umfassende Arithmetik, von der nahe an zwanzig Handschriften in verschiedenen Bibliotheken existiren; sie stützt sich auf die „indische“ Arithmetik und scheint auf das Studium der Mathematik in den Gelehrtenschulen des jüdischen Mittelalters einen mächtigen Einfluss ausgeübt zu haben. Auch algebraische Räthselfragen und Schachaufgaben haben den gelehrten Mann beschäftigt, nicht minder kalendariographische und astrologische Untersuchungen. Auch die in des Referenten Schrift „Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung“ (Erlangen 1876) enthaltene Angabe, dass Ibn Esra sich mit den sogenannten magischen Quadraten beschäftigt habe, wird von Herrn Steinschneider (S. 98) mittels sorgfältiger Quellennachweise bestätigt. Gr.

M. Curtze. Kurze Replik an Herrn Dr. P. Zebrawski.
Grunert Arch. LXIV. 432-434.

Bezieht sich auf die Arbeiten, die in den F. d. M. III. 1871. p. 4 und XI. 1879. p. 9 besprochen sind, und enthält eine Entgegnung Herrn Curtze's auf die Angriffe, die Herr Zebrawski hinsichtlich der Schreibweise des Namen Witelo gegen Herrn Curtze gerichtet hatte. O.

M. Curtze. Die Ausgabe von Jordanus' „De numeris datis“ durch Professor P. Treutlein in Karlsruhe.
Leopold. XVI.

Im zweiten Hefte der „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“ findet man einen von Treutlein besorgten Abdruck des algebraischen Hauptwerkes von Jordanus Nemorarius (s. F. d. M. XI. 1879. p. 34). Da dieser Abdruck sich lediglich auf einen schwer leserlichen und mannigfach verderbten Basler Codex stützte, so entstanden mehrfache Unrichtigkeiten des Textes, welche nunmehr durch Herrn Curtze thunlichst rectificirt werden. Gr.

Ch. Henry. Prologus N. Ocreati in Helceph ad Adelardum Batensem magistrum suum. Fragment sur la multiplication et la division publié pour la première fois. Schlömilch Z. XXV. Suppl. 129-139.

Wer jener Ocreatus war, dessen logistisches Schriftchen Herr Henry hier zum Drucke befördert, weiss man nicht. Der Herausgeber schreibt den Namen O'Creat und deutet damit auf eine gälische Abkunft hin, indess will es uns sehr zweifelhaft erscheinen, ob in jener frühen Zeit die bekannten irischen Familiennamen schon im Gebrauche waren. Das Wort „Helceph“ hält der bekannte Historiker Rodet für die Verketzerung eines arabischen Wortes Al Kafî, welches in der wissenschaftlichen Terminologie der Araber sehr gebräuchlich war und soviel „als gründliche Darstellung“ bedeuten möchte. Sachlich erscheint in dem Bruchstück die Anwendung der Formel

$$a^2 = (a-b)(a+b)+b^2$$

merkwürdig, welche Ocreatus dem Nicomachus abgeborgt zu haben scheint. Gr.

G. Berchet. Il planisfero di Giovanni Leardo 1452. Atti d. Ist. Ven. (5) VI. 639-642.

Dieses Planisphär war bis vor Kurzem als verloren beklagt worden. Der österreichische Consul von Pilat war so glücklich, es in Venedig wieder aufzufinden, und Herr Berchet arbeitete einen umfassenden Bericht darüber aus, von dessen Inhalt wir hier eine kurze Notiz erhalten. Ein anderes, 1850 zu Vicenza

entdecktes Planisphär Leardo's weicht von dem venetianischen Exemplare mehrfach ab. Die Darstellung des Planetenlaufes scheint dem sogenannten ägyptischen System entsprochen zu haben. Der von dem italienischen Kosmographen angegebene Werth für die Grösse des Erdumfanges nähert sich, natürlich nur zufällig, ganz auffallend der Wahrheit. Die Kartenzeichnung war noch sehr unvollkommen und an die Radkarten des Mittelalters erinnernd, doch sind die allerneuesten Entdeckungen und auch die Ergebnisse der von den Poli unternommenen Fahrten nicht ganz unberücksichtigt geblieben. Alles in Allem, meint der Referent, stellt sich Leardo's Kartenwerk als ein grossartiges Zeugnis des Eifers dar, mit welchem während des 15ten Jahrhunderts zu Venedig die mathematischen und geographischen Wissenschaften betrieben wurden. Gr.

L. Rodet. Le Souan-pan des Chinois et la Banque des argentiers. Bull. S. M. F. VIII. 158-169.

Auf Wunsch des Verfassers hat Herr Arnold Vissière, ein junger Sinologe, neue Materialien zur besseren Kenntnis der chinesischen Mathematik herbeizuschaffen unternommen. Zunächst handelt es sich um das bereits von Biot untersuchte Werk „Souan-fa-thong-thong“ (Allgemeine Zusammenstellung der Rechnungsregeln), welches dem 15ten nachchristlichen Jahrhundert entstammt. Die Berechnungen werden in diesem Buche durchweg mit Hülfe des Suan-pan, des bekannten ostasiatischen Rechenbrettes, ausgeführt, von dessen Einrichtung und Gebrauch der Verfasser eine detaillirte Beschreibung liefert. Bei der Quadratwurzelausziehung bedienten sich die Alten, und ebenso die Chinesen, nicht der Formel $(a+x)^2 = a^2+2ax+x^2$, sondern einer geometrischen Versinnlichung, welche man am besten in Cantor's „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ (I. Band, S. 420) dargestellt findet. Ebendort wird auch (S. 587) erwähnt, dass die Chinesen für die Ausziehung höherer Wurzeln sich bereits des (Pascal'schen) arithmetischen Dreieckes bedient hätten, indess hat Herr Rodet Recht, wenn er tadelt, dass die charakteristische Form, in

welcher jenes Zahlenschema auftritt, bisher unbeachtet gelassen worden sei. Ob man auch auf die Rechnungen „vom falschen Satze“ (el-khatain bei den Arabern) den instrumentalen Apparat angewandt habe, muss vor der Hand dahingestellt bleiben. Der zweite Theil der Abhandlung handelt über die grosse Analogie, welche zwischen dem maschinellen Rechnen der Chinesen und dem „Rechnen auf der Linie“ der älteren europäischen Arithmetiker obwaltet. Gr.

A. Marre. Deux nouvelles lettres mathématiques inédites du P. Jaquemet de l'Oratoire, de la maison de Vienne (Dauphinée). Darboux Bull. (2) IV. 200-207.

Abdruck zweier Briefe des Pater Jaquemet, der im vorigen Bande des Jahrbuches p. 17 erwähnt wurde, an den Pater Reyneau. Es handelt sich in denselben um die Bestimmung einer unteren Grenze für die negativen Wurzeln einer Gleichung.

O.

S. Günther. Der Wapowski-Brief des Coppernicus und Werner's Tractat über die Präcession. Mitth. des Copp. V. Heft II.

C. Malagola. Der Aufenthalt des Coppernicus in Bologna. In's Deutsche übersetzt von M. Curtze. Thorn. Lambert.

A. Favaro. Le aggiunte autografe di Galileo al Dialogo sopra i due massimi Sistemi nell' esemplare posseduto dalla biblioteca del Seminario di Padova. Modena Società Tipografica (Antica Tipografia Soliani) 1880., Mem. di Modena XIX. 245-277.

Wesentlich der Eifer, mit welchem die deutsche Coppernicus-Forschung nach schriftlichen Aufzeichnungen ihres Helden suchte, bewog den Herausgeber dieser interessanten Reliquien, das An-

denken Galilei's in ähnlichem Sinne zu ehren. Die als solche gut beglaubigten Noten, welche der grosse Forscher eigenhändig in das jetzt zu Padua aufbewahrte Exemplar der „Gespräche" (gedruckt 1832) eintrug, lassen sich in drei Gruppen sondern: Gedanken, welche dem aufmerksamen Leser beim Studium des Werkes kommen konnten, deren Gegenstand jedoch zum Inhalte jenes nicht in unmittelbarer Beziehung stand, Zusätze materieller Natur und endlich Correkturen. Wir führen hier nur einige der bemerkenswerthesten Anmerkungen an. Dahin gehört eine sehr richtige Warnung an die Theologen, die es in ihrem ketzerrichterlichen Eifer wohl noch dahin bringen würden, heute die coppernicanische und morgen die ptolemäische Weltordnung für ketzerisch zu erklären. Hierher gehört ferner eine kleine kinematische Bemerkung über zwei in gleichem Sinne sich drehende concentrische Kreise; Galilei wendet sich damit gegen Scheiner's Erklärung der Sonnenflecken. In einem Anhang zieht der Herausgeber einen kritischen Vergleich zwischen den drei vorhandenen Ausgaben Galilei'scher Werke, der ursprünglichen, der von dem berühmten Meteorologen Toaldo gegen Ende des vorigen Jahrhunderts besorgten und der allerneuesten von Albèri, welcher nicht durchaus zu Gunsten der letzteren ausfällt. Gr.

A. Favaro. Ragguaglio dei manoscritti Galileiani nella biblioteca nazionale di Firenze. Atti d. Ist. Ven. (5).V. 847-855.

Vorläufiger Bericht über wichtige bibliographische Entdeckungen, welche Herrn Favaro gelungen sind, und von welchen das „Jahrbuch" noch mehrfach zu berichten haben wird.

Gr.

P. Gilbert. Examen des publications récentes sur Galilée. R. Q. S. VII. 255-276.

Kritische Besprechung der Schriften von Wolynski, R. Wolf, Wohlwill und Grisar. Mn. (O.).

E. WOHLWILL. Erklärung und Abwehr. Schlömilch Z. XXV. Hl. A. 185-190.

Der Verfasser vertheidigt sich gegen Angriffe und Verdächtigungen des Herrn Gilbert in einem Artikel der Januarnummer der Revue des questions scientifiques. Es handelt sich um die Auslegung einer Stelle über das examen rigorosum in dem Sacro Arsenale und betrifft den Galilei'schen Process. O.

F. DVORSKY. Neues über J. Kepler. Prag. Otto.

Enthält Briefe von und an Rudolf II. etc., nebst Angaben über die Entstehung dieser Briefe. Siehe Grunert Arch. LXVI. Lit. Ber. CCLXIV. O.

B. BONCOMPAGNI. Intorno ad un trattato di aritmetica del P. D. Smeraldo Borghetti Lucchesse. Boncompagni Bull XIII. 1-87, 121-201, 245-308.

Da diese umfassend angelegte Monographie noch nicht zu ihrem Abschlusse gelangt ist, so muss ein eingehendes Referat dem nächsten Jahrgang vorbehalten bleiben. Gr.

F. RITTER. 'A propos d'une lettre de Fermat sur le fameux problème d'Adrien Romain, résolu par F. Viète. Darboux Bull. (2) IV. 171-182.

Uebersetzung eines Briefes von Fermat aus der Arbeit von C. Henry im Boncompagni Bull. XII. 735-737, über die im vorigen Bande des Jahrbuchs p. 16 referirt worden ist.

O.

P. GILBERT. Extrait d'une lettre à M. Darboux. Darboux Bull. (2) IV. 317-318.

Herr Ritter hatte in der obigen Arbeit den Wunsch ausgesprochen, dass die Liste der Mathematiker der ganzen Welt, die

sich in der Vorrede eines Werkes von Adrianus Romanus (Ideae mathematicae pars prima sive methodus polygonum etc. Antwerpen 1593) findet, abgedruckt werde. Dies geschieht hier wenigstens mit den bekannteren Namen. O.

Fragments inédits de Pascal. R. Q. S. V. 693-698. 1879.

Brief von Antoine Labouère, der die Copie eines Briefes von Pascal enthält, in welchem derselbe anerkennt, dass dieser in der „Histoire de la Roulette" so böse mitgenommene Jesuit manche hübsche Sätze über diese Curve gefunden habe. Mn. (O.)

E. Narducci. Notizie di libri relativi alle matematiche posseduti dalla Biblioteca Alessandrina e non citati dal Conte Giovanni Maria Mazzuchelli nella parte stampata della sua opera intitolata „Gli scrittori d'Italia". Boncompagni Bull. XIII. 369-378.

Mazzuchelli, geboren in Brescia am 28. October 1707 und dort gestorben am 19. November 1765, hatte ein Werk begonnen, das alle italienischen Schriftsteller und Werke in alphabetischer Ordnung zusammengestellt enthalten sollte. Von diesen sind indess nur die Buchstaben A und B in 2 Folio-Bänden gedruckt vorhanden, während der Buchstabe C druckfertig sich im Vatikan als Manuscript findet. Die vorliegende Notiz enthält Ergänzungen für die Buchstaben A und B. O.

Ch. Henry. Mémoire de Léonard Euler, publié conformément au manuscrit autographe. Darboux Bull. (2) IV. 207-256.

Das Manuscript, welches hier unter dem Titel: „Considérations sur quelques formules intégrales dont les valeurs peuvent être exprimées en certains cas par la quadrature du cercle" abgedruckt ist, wird auf der Bibliothèque Nationale zu Paris aufbewahrt; es besteht aus 16 auf beiden Seiten beschriebenen Folio-

blättern, ging aus dem Besitz von Lagrange an Lacroix über, der es der Bibliothek schenkte. Auf dieses Schriftstück bezieht sich wahrscheinlich eine Stelle von Libri, in der er erwähnt, dass Lacroix eine Formel daraus entlehnt habe. Die Abhandlung enthält sehr ergiebige Studien über Transformationen derjenigen bestimmten Integrale, welche sich in Γ-Functionen darstellen lassen. Doch werden letztere nicht eingeführt. H.

G. Eneström. Cartas inéditas de Bernoulli à Euler. Cron. cient. III. 329-335, 353-357, 377-382.

Siehe F. d. M. XI. 1879. p. 18.

G. Govi. Sur quelques lettres inédites de Lagrange publiées par M. Balthasar Boncompagni. Nouv. Ann. (2) XIX. 421-428.

Uebersetzung des Berichtes, den Herr Govi in der Sitzung der Akademie zu Neapel am 5. Juni 1880 über die vom Fürsten Boncompagni veröffentlichten 11 Briefe Lagrange's erstattet hat. (Siehe F. d. M. IX. 1877. p. 8.). M.

G. Lorenzoni. Un facsimile di alcune lettere inedite di Lagrange. Atti d. Ist. Ven. (5) V. 453-455.

E. Schering. Briefe von Lagrange an Euler, Laplace und Canterzoni in Photolithographien veröffentlicht von B. Boncompagni. Gött. Nachr. 1880. 489-491.

Bemerkungen bei Gelegenheit der Uebergabe der vom Fürsten Boncompagni besorgten Herausgabe der Briefe von Lagrange an Euler, die schon früher besprochen worden sind. O.

E. Schering. Briefe der Sophie Germain an Gauss in Photolithographie veröffentlicht von B. Boncompagni. Gött. Nachr. 1880. 367-369.

Bei Gelegenheit der Uebergabe dieser Briefe an die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften giebt Herr Schering einige Notizen über dieselben. O.

G. DE COURCEL. Avertissement. Liouville J. (3) VI. 7-10.

S. GERMAIN. Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques. Liouville J. (3) VI. 11-64.

Die hier abgedruckte Arbeit Sophie Germain's war, wie aus der einleitenden Bemerkung des Herrn de Courcel hervorgeht, bisher noch nicht gedruckt. Sie war der Akademie am 8. März 1824 durch Fourier übergeben worden. Die zur Kenntnisnahme gewählte Commission bestand aus Laplace, Proney und Poisson. Herr Courcel giebt noch Notizen über die weiteren Schicksale des Manuscriptes. Auf den Inhalt der Arbeit selbst wird in Abschnitt XI. Cap. 1 eingegangen werden. O.

A. GENOCCHI. Il carteggio di Sofia Germain e Carlo Federico Gauss. Atti di Torino XV. 795-808.

Enthält Notizen über das Leben Sophie Germain's (geboren 1. April 1776 zu Paris, gestorben 1831) und eine eingehende Besprechung des Inhalts der einzelnen Briefe zwischen ihr und Gauss. O.

E. MAILLY. Notice sur Ernest Quetelet. Ann. de Belg. 1880. 169-216.

Ernest Quetelet, der Sohn des berühmten Statistikers Adolf Quetelet, ist geboren zu Brüssel am 7. August 1826 und gestorben am 6. September 1878 zu Ixelles. Man verdankt ihm als Mathematiker eine Verallgemeinerung der Theorie der Brennpunkte, als Astronomen einen Catalog der Sterne mit eigener Bewegung, die wenigstens ein Zehntel einer Secunde beträgt.

Mn. (O.)

G. Basso. Cenni biografici su Silvestro Gherardi.
Atti di Torino XV. 369-376.

Nachruf für den verstorbenen Physiker (geboren 17. December 1802, gestorben 29. Juli 1879). Der Mathematik gehörte der Verstorbene durch seine werthvolle Untersuchung über die Geschichte der mathematischen Facultät in Bologna an.

O.

Tresca. Discours prononcé aux funérailles de M. Morin au nom de l'Académie des Sciences et du Conservatoire des arts et métiers. C. R. XC. 234-238.

Nachruf für den am 7. Februar 1880 verstorbenen Morin. Es werden namentlich seine Verdienste um das Conservatoire des arts et métiers hervorgehoben. O.

A. Laisant. Giusto Bellavitis. Darboux Bull. (2) IV. 343-348.

Nachruf für den verstorbenen Mathematiker. Neben Notizen über die Bedeutung Bellavitis' durch die Erfindung der Methode der Aequipollenzen giebt derselbe einen Auszug aus einem Briefe an A. Laisant, der eine Selbstbiographie desselben enthält.

Giusto Bellavitis ist geboren am 22. November 1803 zu Bassano bei Padua. Seine mathematische Bildung hatte er sich selbst erworben. Es gelang ihm aber trotzdem, erst (1842) Professor der Mathematik am Lyceum zu Vicenza, dann (1845) an der Universität Padua zu werden. Als solcher starb er am 6. November 1880. O.

F. G. Teixeira. Notice nécrologique sur G. Bellavitis.
Teixeira J. II. (Portugisisch).

Tx.

J. Bertrand, Bouquet, Laussedat, Dumas, Rolland. Discours prononcés aux funérailles de M. Chasles.
C. R. XCI. 1005-1015, Darboux Bull. (2) IV. 433-436.

G. Darboux. Notice biographique sur M. Chasles. Darboux Bull. (2) IV. 436-442.

Reden, welche im Namen verschiedener Körperschaften am Grabe Chasles' gehalten worden sind, und welche bald diesen, bald jenen Punkt seines Lebens und seiner Werke hervorheben. Die Notiz von Darboux giebt in kurzen Zügen ein Bild der Leistungen des verstorbenen Mathematikers.

Michel Chasles ist geboren am 15. November 1793 zu Chartres und trat 1812 in die École Polytechnique. Später kehrte er nach Chartres zurück und wurde dann Professor an der Sorbonne. Er starb am 18. December 1880. O.

E. Dühring. Robert Mayer, der Galilei des neunzehnten Jahrhunderts. Eine Einführung in seine Leistungen und Schicksale. Chemnitz. Schmeitzner.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Leipzig. B. G. Teubner.

Das vorliegende Werk, dessen erster Band bis jetzt erschienen ist, füllt eine oft empfundene Lücke aus, indem es uns eine auf wirklich wissenschaftlicher Grundlage beruhende Geschichte der Mathematik giebt. Gegenüber dem reichen Inhalte und dem überwältigenden Stoffe im Einzelnen und an Einzelnem Kritik zu üben, ist nicht Sache eines Referates in dieser Zeitschrift. Was an solchen Einzelheiten zu bessern ist, wird sich im Laufe der Zeit herausstellen. Wir können hier nur der Freude über das Erscheinen dieses Buches Ausdruck geben. Wenn wir daher im Folgenden versuchen, einen Bericht über den Inhalt desselben zu geben, so bemerken wir dabei, dass von vornherein von einer

Kritik der Details abgesehen wird, und dass das Folgende nur eine kurze Skizze des reichen Inhaltes geben soll. Eine Bemerkung aber kann Referent nicht unterdrücken. Bei häufigerem Gebrauch macht sich das Fehlen eines genauen Inhaltsverzeichnisses (neben dem Namenregister) in störender Weise geltend. Grade bei einem Werke, wie dem vorliegenden, handelt es sich oft um das Nachlesen einzelner Abschnitte, und da reicht zur schnellen Orientirung das Namenregister allein nicht aus. Vielleicht lässt sich der Verfasser durch diese Bemerkung bewegen, bei dem zweiten Bande das Fehlende nachzuholen.

In der Einleitung, p. 3—14, beginnt der Verfasser mit einer Schilderung des allmähligen Entstehens der Zahlwörter und Zahlsysteme. Die Zahlwörter beruhen meist auf additivem oder multiplicatorischem Gesetz, wie die sprachliche Bildung derselben zu erkennen giebt. Es zeigt sich deutlich, dass der menschliche Körper einen bestimmenden Einfluss auf die Bildung der Zahlsysteme gehabt hat. Dafür liefert den sprechendsten Beweis das Decimalsystem, neben dem sich in voller Reinheit noch das Vigesimalsystem und wenigstens Spuren eines Quinarsystems nachweisen lassen. Aber daneben kommen doch auch Bildungen mit anderen Grundzahlen vor. Wie sich nun aus der Entstehung der Zahlwörter durch Addition und Multiplication schliessen lässt, dass diese Rechnungsarten schon vor der Fixirung der Zahlwörter existirt haben, so lässt sich Aehnliches auch von der Subtraction, sehr selten dagegen von der Division nachweisen. Eigenthümlich und characteristisch ist, dass sich überall die Ziffern als Wortzeichen bewahrt haben, und dass überall in der Schreibweise das Gesetz hervortritt, dass bei allen additiv vereinigten Zahlen das Mehr stets dem Weniger vorangeht. Aber dieses uralte Wissen, selbst diese bewusst oder unbewusst geübte Systematisirung ist, wie der Verfasser richtig hervorhebt, noch keine Wissenschaft. Ihm beginnt eine wirkliche Geschichte der Mathematik mit dem ersten Schriftdenkmal, welches auf Rechnung und Figurenvergleichung Bezug hat.

Mit p. 17 beginnt der erste Abschnitt: „Aegypter“. Bei ihnen findet sich aus der Zeit von etwa 1700 v. Chr. ein mathematisches

Uebungsbuch, dessen Anfangsworte lauten: „Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge ...“ Es rührt von einem gewissen Ahmes her. Man darf sich jedoch darunter nicht ein eigentliches Lehrbuch denken, sondern nur ein Buch, das Regeln zur Lösung von Aufgaben enthält, die an speciellen Beispielen erläutert werden. Der Inhalt bezieht sich auf das Rechnen mit ganzen Zahlen und mit Stammbrüchen und enthält eine Tabelle, mittels deren es möglich ist, einen beliebigen Bruch als Summe von Stammbrüchen darzustellen. Daneben kommen Aufgaben vor, die auf Gleichungen führen und etwa unserer Gesellschaftsrechnung entsprechen würden; ja sogar Aufgaben aus der Lehre von den arithmetischen und geometrischen Reihen fehlen nicht. Den Schluss dieses ersten Capitels macht die Besprechung der Zahlzeichen und der Art des Rechnens. Letzteres ist ein Fingerrechnen und ein instrumentales Rechnen gewesen. Im zweiten Capitel wird die Geometrie der Aegypter besprochen. Auch hier knüpft der Verfasser an den Papyros des Ahmes an und schliesst aus dem Vorkommen gewisser Aufgaben der Flächen- und Raumlehre, die dort freilich nur als Rechenaufgaben behandelt werden, auf den Umfang der geometrischen Kenntnisse. Die Feldmessung war es, welche, wie aus den Zeugnissen älterer Schriftsteller gefolgert wird, zum Betriebe der Geometrie veranlasst hatte. Benutzt wurden namentlich der Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks und des Trapezes. Aber auch aus der Aehnlichkeitslehre finden sich Aufgaben, ja, es zeigt sich als sehr wahrscheinlich, dass den Aegyptern die Construction eines rechtwinkligen Dreiecks bekannt war. Der Verfasser meint endlich, dass das vorliegende Buch des Ahmes mit Nothwendigkeit zu der Annahme führe, dass schon vor demselben ein anderes Lehrbuch der Mathematik existirt habe.

Bei den Babyloniern (Abschnitt II., p. 67—94) sind es vor allen Dingen das Vorkommen des Sexagesimalsystems, die Kenntnis der Quadrat- und Cubikzahlen, sowie das Rechnen überhaupt, welche das Interesse fesseln. Der Versuch, das Entstehen des Sexagesimalsystems zu erklären, führt auf (sonst durchweg principiell vermiedene) Abschweifungen zur Astronomie. Aus der

Erkenntnis der Anzahl der Tage eines Jahres zu 360 wird die Kreistheilung hergeleitet und damit der Uebergang zur Besprechung der Geometrie gewonnen, die freilich viel weniger entwickelt ist, als das Rechnen der Babylonier. Aber dass auch hier eine Reihe von Kenntnissen vorhanden gewesen, lässt sich doch mit Sicherheit schliessen.

Der dritte Abschnitt ist den Griechen gewidmet. Im Anfangscapitel desselben (4, p. 97) giebt der Verfasser zunächst die Quellen an, aus denen für diesen Theil seines Werkes zu schöpfen war, und schildert den räumlichen Verlauf, den die Entwickelung der Mathematik in Griechenland genommen. Beginnend in der ionischen kleinasiatischen Küsten- und Inselwelt südlich von Smyrna wandte sie sich zu dem dorischen Süd-Italien und Sicilien, um von da erst nach dem eigentlichen Festlande, namentlich Athen zu gelangen. Von da wanderte sie nach der auf ägyptischem Boden liegenden griechischen Stadt Alexandria, wo sie ihre Heroenzeit erlebte, um endlich nach einer nochmaligen Nachblüthe wieder nach dem Festlande Griechenlands zurückzukehren, wo sie in Byzanz und Athen ihren Untergang fand. Diesen einleitenden Gedanken fügt der Verfasser die Nachrichten an, welche über die griechischen Zahlen und das griechische Rechnen vorhanden sind. Bei dieser Gelegenheit auch die Zahlen der Phönikier, Syrer und Hebräer besprechend schildert er die älteren herodianischen, sowie die späteren alphabetischen Zahlzeichen der Griechen, um dann an der Hand von freilich nur wenigen Quellen das Fingerrechnen und die Benutzung des Rechenbrettes klarzulegen.

In Capitel 5 (p. 112) wendet er sich zu Thales und der ältesten griechischen Geometrie. Der Verfasser schliesst sich dem Mathematikerverzeichnis des Eudemus an und prüft an der Hand der Nachrichten des letzteren die Verdienste des Thales, die nach ihm wesentlich darin bestanden, dass er eine strengere Beweisführung einführte, als er sie in Aegypten und damals überhaupt in Geltung gefunden hatte. Thales gründete eine Schule, die die Wissenschaft um der Wissenschaft willen trieb. Pythagoras von Samos (Capitel 6 u. 7) tritt dann als der Bedeutendste hervor. Der Verfasser präcisirt

hier zunächst seinen Standpunkt gegenüber den vielfachen Sagen, die sich um diesen Mann und seine Schule gewoben haben. Nachdem er sodann die Quellen für diese Zeit besprochen, zeigt er, dass sich nicht auseinander halten lasse, was Pythagoras selbst und was die Mitglieder seiner Schule geleistet haben. Er fasst daher Beides zusammen. In der Geometrie umfasste die Schule in ihrem Wissen die Kenntnis der Parallellinien und der damit zusammenhängenden Winkelsätze, namentlich auch des Satzes von der Summe der Dreieckswinkel, ferner Sätze über Congruenz des Dreiecks, Flächengleichheit und Anlegung von Flächen, den pythagoräischen Lehrsatz und den goldenen Schnitt. Aber auch die Anfänge der Stereometrie waren ihnen bekannt, so z. B. die fünf regelmässigen Körper nnd die Kugel. Die Sätze waren mit Beweisen versehen, welche freilich erst im Laufe der Zeit den Charakter des Erfahrungsbeweises ablegten. Mehr noch leistete die Schule in der Arithmetik. Hierher gehören namentlich die geometrische Versinnlichung der Zahlenlehre, wie sie in den Ebenen- und Körperzahlen, in den Dreiecks- und Quadratzahlen etc. zu Tage tritt, ferner die pythagoräischen Zahlen und die Lehre vom Irrationalen, nebst vielem Anderen. Neben dieser Schule treten noch eine Reihe anderer Mathematiker auf (Capitel 8), so namentlich Anaxagoras von Klazomene, Oinopides von Chios, Demokritus aus Abdera und unter den Sophisten Hippias von Elis und Zenon von Elea. In diese Zeit gehört endlich auch der in Capitel 9 behandelte Hippokrates von Chios, welcher das erste Elementarlehrbuch der Mathematik verfasste, freilich aber weit bedeutender hervortrat durch die geometrischen Erfindungen, die sich auf die Quadratur des Kreises und die Verdoppelung des Würfels beziehen. Dabei werden auch die Versuche des Antiphon und des Bryson zur Quadratur des Kreises erörtert.

Wir eilen, Platon (Capitel 10), der sich besonders um die Methodik Verdienste erworben, und bei dessen Besprechung zugleich die Lösung der delischen Aufgabe auch durch Eutokius, Archytas und Menächmus behandelt wird, nur kurz berührend, und ebenso die in Capitel 11 erwähnten Akademiker und Aristoteles übergehend, zu Capitel 12 (p. 221), das uns nach Alexandria führt, welches

nun auf 2½ Jahrhunderte hindurch (300-50 v. Chr.) die Hauptstätte der Wissenschaft für die damalige Welt wurde. Hier ist es zuerst die bedeutende Persönlichkeit des Euklides, die uns entgegen tritt. Von seinem Leben ist uns so gut wie Nichts bekannt. Nur, dass seine Blüthezeit um 300 gewesen, steht fest. Dagegen kennen wir Manches von seinen Werken. Vor allen Dingen sind es die dreizehn Bücher der Elemente, die vom Verfasser einer eingehenden Besprechung unterworfen werden. Dem folgt die Untersuchung der Frage, welche Theile der Elemente Euklid selbständig gearbeitet, und in welchen er sich anderen bekannten Mustern angelehnt habe. Diese Untersuchung schliesst mit der Feststellung, dass die Elemente, so wie sie uns vorliegen, eine Ausgabe des Theon sind. Von den sonstigen Schriften (Capitel 13) des Euklid sind verloren die „Trugschlüsse" und die drei Bücher der Porismen, deren Wiederherstellung und Inhalt eingehend besprochen werden. Vollständig sind auf uns gekommen die Daten, die gewissermassen Uebungsaufgaben zu den Elementen enthalten, während die Porismen selbständige Anwendungen des dort niedergelegten Materials sind. Das Buch von der Theilung der Figuren ist wahrscheinlich identisch mit der arabischen Schrift gleichen Titels von Mohammed Bagdadinus. Weiterführungen der Porismen sind die vier Bücher „Ueber die Kegelschnitte" und zwei Bücher über die „Oerter auf der Oberfläche."

Gleich gewaltig in seinen Leistungen tritt uns die Persönlichkeit des Archimedes entgegen, dem die beiden nächsten Capitel (14 u. 15, p. 253-281) gewidmet sind. Das Leben des Archimedes, von Heraklides verfasst, ist verloren gegangen, so dass die Nachrichten über ihn, seine Persönlichkeit und sein Leben aus den verschiedensten Quellen zusammengestellt werden müssen. Von seinen Schriften sind uns erhalten: 1) Zwei Bücher vom Gleichgewicht, zwischen welche eine Abhandlung von der Quadratur der Parabel eingeschoben ist, 2) zwei Bücher von der Kugel und dem Cylinder, 3) die Kreismessung, 4) die Schneckenlinien oder Spiralen, 5) das Buch von den Konoiden oder Sphäroiden, 6) die Sandeszahl, 7) zwei Bücher von den schwimmenden Körpern, 8) Wahlsätze. Eine eingehende Schilderung des Inhalts dieser Schriften nach

sachlichen Gesichtspunkten geordnet, folgt nun, wobei sich der Verfasser zugleich noch mit griechischem Zahlenrechnen im Allgemeinen beschäftigt.

Im 16. Capitel führt er uns den Eratosthenes vor, der durch seinen Brief über die Würfelverdoppelung bekannt ist, und Apollonius von Pergä, dessen Leistungen für die Lehre von den Kegelschnitten von so hervorragender Bedeutung waren, der aber auch für den rechnenden Theil der Mathematik das Werk des Archimedes förderte. Damit ist die Reihe der grossen Mathematiker zunächst erschöpft. Es folgen die Epigonen: Nikomedes, Diokles, Perseus, Zenodorus, Hypsikles, endlich Hipparch, deren Leistungen im 17. Capitel Würdigung finden.

Dann tritt etwa um 100 n. Chr. Heron von Alexandria auf, dem die Capitel 18 und 19 (p. 313—343) gewidmet sind. Bei der Schilderung der Leistungen dieses grossen Mathematikers ist der Verfasser auf so viel Einzelheiten einzugehen gezwungen, dass es nicht möglich ist, sie in dem Raum dieses Referates anders, als mit des Verfassers eigenen Worten zusammenzufassen, der von Heron (p. 342, 343) sagt: „Er ist und bleibt uns der vorzugsweise Vertreter antiker Feldmesskunst und Feldmesswissenschaft, wenn ersteres Wort uns die Lehre von den eigentlichen feldmesserischen Operationen, letzteres die von den anzuwendenden Formeln bedeuten soll. Er ist uns aber auch der Vertreter einer entwickelten Rechenkunst bis zur Ausziehung von Quadratwurzeln, der Vertreter einer eigentlichen Algebra, soweit von einer solchen ohne Anwendung symbolischer Zeichen die Rede sein kann, bis zur Auflösung unreiner quadratischer Gleichungen einschliesslich.“

Concentrirte sich bisher das Interesse der Schilderung um wirklich bedeutende und hervorragende Persönlichkeiten, so wird das jetzt anders. Capitel 20 (p. 343) behandelt die Geometrie und Trigonometrie bis zu Ptolemäus. Unter den verschiedenen Männern, welche hier auftreten, sind eigentlich nur Ptolemäus selbst und Menelaus von Alexandria, als Vorläufer von Ptolemäus durch seine drei Bücher über Sphärik, zu nennen. Die Bedeutung des Ptole-

mäus für die Entwickelung der Trigonometrie ist bekannt genug, um sie hier übergehen zu können.

Höchst interessant, aber in kurzen Worten nicht wohl wiederzugeben, ist der Eingang zum folgenden (21.) Capitel, in dem das Aufkommen der Neupythagoräer geschildert wird, die sich vorzugsweise mit Arithmetik beschäftigten. Dem folgt (Capitel 22) Sextus Julius Africanus mit seinen „Kesten“ und dann Pappus, welcher dem Ende des 3ten Jahrhunderts angehört. Das Werk des Pappus, das auf uns gekommen ist, heisst: „συναγωγή“ und bestand aus acht Büchern. Der Charakter dieser Sammlung besteht darin, dass Pappus den Inhalt von zu seiner Zeit hochgeschätzten mathematischen Schriften kurz angiebt und zu denselben erklärende, aber auch erweiternde, oftmals nur den allerlosesten Zusammenhang mit dem grade in Rede Stehenden wahrende Sätze hinzufügt. Die Bedeutung dieses Werkes des Pappus für die Geschichte der Mathematik wird in zwiefacher Beziehung gesucht: einmal in der Selbständigkeit, mit der er in diesen Zusätzen verfährt, zweitens in der Gewissenhaftigkeit, deren er sich bei der Skizzirung der bekannten Werke befleissigt. Eine eingehende Besprechung seines Werkes bildet den Hauptheil dieses Capitels.

Den Neupythagoräern folgen in Capitel 23 (p. 388) die Neuplatoniker. Von den an dieser Stelle besprochenen Männern erwähnen wir Diophantus. Sein Werk: „ἀριθμητικά“ und die Abhandlung über Polygonalzahlen geben reichlichen Stoff für die eingehenden und, wir möchten sagen, plastischen Darstellungen.

So bedeutend diese beiden Männer, Pappus und Diophantus, noch selbst hervortreten, ihr Wirken blieb doch vereinzelt, und es war ihnen nicht vergönnt, wenigstens im griechischen Leben, Grund zu neuen Entwickelungen zu legen. Dass dies nicht der Fall war, zeigt das 24. Capitel (416-439) mit der Ueberschrift: „Die griechische Mathematik und ihre Entartung.“ Es führt in kurzen Zügen, nur bei Proklus noch einen Augenblick verweilend, die Mathematik vor, welche das spätere Griechen- und Byzantinerthum hervorbrachte. Die Leistungen dieser letzten Zeit lehnten sich entweder ganz an ältere Schriftsteller an, nur Bekanntes reproducirend, oder sie beschäftigten sich mit Gegen-

ständen, die kaum noch den Namen Mathematik verdienen. Damit schliesst dieser Abschnitt.

Der vierte Abschnitt behandelt in drei Capiteln (p. 441-502) die Römer. Gegenüber dem gewaltigen Fortschritte, den die Entwickelung der mathemathischen Wissenschaft bei den Griechen von Thales von Milet bis zu Pappus und Diophantus machte, finden wir bei den Römern im Grunde genommen keinen Fortschritt. Die Mathematik der Römer wird vortrefflich durch das Wort Cicero's gekennzeichnet, der sagt, die Geometrie habe bei den Griechen in höchsten Ehren gestanden, deshalb sei nichts glänzender als ihre Mathematiker, bei den Römern aber sei das Mass jener Kunst durch den Nutzen des Rechnens und Ausmessens begrenzt. In der That, betrachtet man die Schilderung, die der Verfasser uns von den Leistungen der Römer giebt, so ist man überrascht, so gar keine originellen Gedanken und gar keine Weiterbildungen zu finden. Pythagoras und Archimedes rechnet der Verfasser nicht zu den Römern, und mit Recht. Sie gehören, auch wenn sie auf italischem Boden gelebt haben, zu den Griechen. Den Römern selbst oder Etruskern eigenthümlich ist nur das Rechnen, das als Fingerrechnen, Rechnen auf dem Rechenbrett und Rechnen mit Benutzung von Hülfstafeln auftritt, und daneben die Feldmesskunst. Jedoch auch in der Feldmesskunst der Römer ist nur in der ältesten Zeit einiges wahrscheinlich von den Etruskern Ueberkommene originell. Die Agrimensoren, die in Capitel 26 geschildert werden, lehnen sich durchweg an Heron von Alexandria an. Die Blüthezeit der römischen Geometrie beginnt mit keinem geringeren Namen, als dem Caesar's, der selber, in zwei leider verlorenen Werken, schriftstellerisch aufgetreten ist. Aber auch in den Leistungen dieser Zeit darf man nichts Originelles, keinen wirklichen Fortschritt suchen. Auch das dritte Capitel (das 27te, p. 675) „Die spätere mathematische Literatur der Römer“ hat nirgends Neues und Fruchtbares zu melden. Ein grosser Theil dieses Capitels ist dem Boethius und den dahin gehörigen Streitfragen gewidmet.

Weithinweg von Italien führt uns der fünfte Abschnitt (505-562), der die Inder in drei Capiteln behandelt. Waren die Griechen

wesentlich geometrisch befähigt, so tritt bei den Indern im Gegensatz dazu die Begabung für das Rechnerische hervor. Dem entsprechend liegen denn auch ihre Leistungen hauptsächlich auf dem Gebiete des Rechnens und der Algebra. Und es tritt dieser Gegensatz zwischen Indern und Griechen überall auch in dem späteren Abschnitt, der den Arabern gewidmet ist, deutlich hervor, indem sich der Einfluss der Griechen stets auf geometrischem Gebiete, der der Inder auf dem algebraischen zeigt. Das letzte (30te) Capitel dieses Abschnittes handelt von der Geometrie und Trigonometrie der Inder, in denen der griechische Einfluss vielfach nachgewiesen wird, wie denn ja auch ein umgekehrter Einfluss an einigen Stellen zu spüren ist. Demungeachtet zeigt die indische Trigonometrie wenigstens in einem Punkte, der Sinustabelle, einen wesentlichen Fortschritt, den aber der Verfasser einem glücklichen Zufall zuschreiben zu müssen glaubt.

Den Abschnitt VI., die Chinesen, der, wenigstens nach des Referenten Meinung, mehr ein culturhistorisches, als mathemathischhistorisches Interesse bietet, übergehend, wenden wir uns sofort zum Abschnitt VII., der die Araber behandelt. In dieser Abtheilung schildert uns der Verfasser nach einleitenden historischen Bemerkungen, in denen die Gründe für die schnelle Ausbreitung und das schnelle Verschwinden arabischer Herrschaft kurz besprochen werden, die übersetzende und übertragende Thätigkeit arabischer Wissenschaft. Sie erstreckte sich einerseits auf indische, namentlich astronomische Werke, andererseits auch besonders auf griechische. Hierher gehören eine grosse Zahl der, bedeutenden und unbedeutenden, Arbeiten, welche in den früheren Abschnitten berührt wurden. Im folgenden Capitel 33 werden nun zunächst die Zahlzeichen erörtert, und dann wendet sich der Verfasser zu Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî, dessen beide Hauptwerke, das Rechenbuch und die Algebra, einer eingehenden Besprechung unterzogen werden, da sie die Grundlage für die weitere Entwickelung der arabischen Mathematik geworden sind. Namentlich sucht der Verfasser hier zu scheiden, was auf indischer, was auf griechischer Grundlage ruhe, was endlich eigenthümlich arabisch sei. Er kommt dabei zu dem mit der

obigen Bemerkung übereinstimmenden Resultat, dass indisch die Rechenkunst, griechisch aber die eigentlich wissenschaftliche Mathematik sei. Bei dieser Gelegenheit wird dann auch auf die Entstehung der Worte Algorithmus (aus Alchwarizmî) und Algebra eingegangen. Dem folgt im nächsten Capitel die Schilderung zweier Gruppen von arabischen Mathematikern. Zu der ersten gehören die unter den Abbasiden in Bagdad wirkenden sogenannten Drei Brüder, dann Tâbit ibn Kurra und Albategnius, der eine hervorragende Rolle für die Einführung trigonometrischer Functionen im Abendlande spielte. Charakteristisch tritt bei ihm der Umstand auf, dass die trigonometrischen Lehrsätze das Gepräge ihrer geometrischen Entstehungsweise verloren und dafür den Charakter algebraischer Formeln angenommen haben. Die zweite Gruppe sind die Geometer unter den Bujiden; unter ihnen hervorragend an Bedeutung Abû'l Wafâ, dessen geometrische und trigonometrische Leistungen eine gründliche Erörterung erfahren. Ihm folgen Alkûhî und As-Sâgânî. Ganz anderer Art sind die Leistungen einer Reihe von arabischen Gelehrten, die im 35ten Capitel besprochen werden. Ein anonymes Buch über die Bildung rationaler rechtwinkliger Dreiecke ist rein zahlentheoretischen Inhaltes. Mit demselben Gegenstande beschäftigen sich Abû Muhammed Alchoschandî und Abû Dscha'far Muhammed ibn Alhusain. Hierher gehören auch Avicenna und Al Bîrûnî. Letzterer war auch auf geometrischem Gebiete thätig; wenigstens stellte er eine Reihe von Aufgaben auf, welche mit Hülfe von Kegelschnitten zu lösen waren. Mit diesen Aufgaben beschäftigte sich dann Abû'l Dschûd, der eine besonders grosse Gewandtheit in der Umsetzung einer geometrischen Aufgabe in eine Gleichung besass. Dann folgt die Besprechung von Al Nasawî und besonders Alkarchi, dessen beide Schriften: Al Kâfî fîl hisâb und Al-Fachrî, genannt nach dem Beinamen des Wezir Abû Gâlib, dem dieses Werk gewidmet war, eingehend erörtert werden. Neben dem genannten Abû'l Dschûd haben sich noch andere Männer mit der Lösung cubischer Gleichungen beschäftigt, so nicht ohne Glück Al Mâhânî und Abû Dscha'far Alchâzin, wie aus dem Berichte des 'Omar Alchaijâmî hervorgeht. Letzterer hat sich hohen Ruhm

unter seinen Zeitgenossen erworben, und mit Recht. Hat er sich doch bewusst mit der Lösung von cubischen Gleichungen beschäftigt, die er zwar nicht durch Rechnung, diese hielt er für unmöglich, aber doch durch geometrische Construction mit Hülfe von Kegelschnitten zu finden suchte. Auch scheint er die Binomialentwickelung für ganzzahlige Exponenten gekannt zu haben. Damit aber ist der Höhepunkt der arabischen Mathematik und ziemlich auch ihr Ende erreicht. Das nächste Capitel schildert ihren Niedergang. Nur wenige Namen, und diese aus späterer Zeit, treten uns noch entgegen, so: Nasîr Eddîn († 1274) und Behâ Eddin (1547-1622). Der zweite Theil dieses Capitels macht uns mit einigen ägyptischen Mathematikern, z. B. Ibn Alhaitam, bekannt.

Das letzte Capitel (37, p. 680) endlich führt uns zu den Westarabern. Von Schriften derselben bis zum elften Jahrhundert ist Nichts bekannt geworden. Der erste Schriftsteller, der erwähnenswerth ist, ist Abû Muhammed Dschâbir ibn Aflah, gewöhnlich Geber genannt. Sein Hauptwerk ist eine Astronomie in 9 Büchern. In dem ersten derselben findet sich eine vollständige Trigonometrie, in welcher er abweichend von allen sonstigen arabischen Schriftstellern eine ganz selbständige Bearbeitung derselben giebt. Dann folgt die Besprechung zweier von Johannes von Sevilla übersetzten Werke, eines Lehrbuchs der Rechenkunst und der Algebra, und endlich noch einer Reihe anderer Werke, deren Inhalt fast derselbe Stoff wie der des eben genannten ist.

Der letzte, achte Abschnitt (703) ist betitelt: „Die Klostergelehrsamkeit des Mittelalters." Das erste Capitel desselben (Capitel 38) macht uns mit dem Inhalt der „Origines" des Isidorus Hispalensis (571-636) bekannt. Es folgt Beda's Werk: „De temporum ratione" und sodann Alcuin, dessen Bedeutsamkeit für die Geschichte der Mathematik nach zwei Seiten liegt, in seinem Verdienste um den Unterricht und in seiner schriftstellerischen Thätigkeit. Zu letzterer gehört eine Sammlung von Aufgaben, von denen freilich nicht mit voller Sicherheit feststeht, dass sie auf Alcuin selbst zurückzuführen ist. Im Weiteren verbreitet sich der Verfasser über die Art, in der sich die Kenntnisse innerhalb der Klöster fortgepflanzt haben, um sich im Capitel 39

(p. 728) zu Gerbert zu wenden, mit dessen Geometrie er sich eingehend beschäftigt, dabei nochmals auf die Geometrie des Boethius zurückkommend. Capitel 40 endlich ist den Abacisten und Algorithmikern gewidmet und beschäftigt sich zunächst mit einem Schüler Gerbert's, Bernelinus, ferner mit der Abhandlung des Hermannus Contractus über den Abacus, dann mit Rudolph von Laon und anderen Abacisten. Hieran schliessen sich p. 774 die Algorithmiker. Unter diesem Namen versteht der Verfasser die Schriftsteller, welche ihre unmittelbare Abhängigkeit von arabischen Vorbildern durch das Vorkommen des Wortes „Algorithmus", durch Anwendung des Stellenwerthes der Ziffern mit Einschluss der Null, und durch Nichtanwendung des Abacus bekunden. Und so ist denn der Zeitpunkt erreicht, den sich der Verfasser für diesen Band als Grenze gesetzt hatte, ihn nur an einzelnen Stellen überschreitend, nämlich das Jahr 1200, welches einen wichtigen Abschnitt für die Geschichte der europäischen Mathematik bildet. O.

G. Eneström. Om Matematikens historia såsom studieämne vid Nordens högskolor. Zeuthen Tidsskr. (4) IV. 62-73.

Dieser Aufsatz enthält neben einer Uebersicht über die die Geschichte der Mathematik betreffende Literatur einige Bemerkungen über die Bedeutung dieses Theils der Wissenschaft und ihre Stellung an den nordischen Universitäten. Gm.

A. Favaro. Le matematiche nello studio di Padova dal principio del secolo XIV. alla fine del XVI. Riv. per. XXX. 119-126.

P. Tannery. L'arithmétique des Grecs dans Pappus. Mém. de Bord. (2) III. 351-378.

Bekanntlich kennt man seit Wallis auch von dem früher verloren geglaubten zweiten Buch der „Mathematica collectio"

ein kleines Bruchstück, welches von dem Zahlensystem des Pergäers Apollonius handelt. Herr Tannery bespricht dieses Fragment eingehend, mit besonderer Berücksichtigung der von Nesselmann und Hultsch vorgeschlagenen Correcturen; Apollonius, so glaubt er, werde die Beweise seiner Sätze gewiss nicht blos numerisch, sondern rein geometrisch gegeben haben. An die Reihe kommt sodann das von Pappus in so herber Weise zurückgewiesene Verfahren zur Auffindung zweier mittlerer Proportionalen: Der Verfasser kommt auf anderem Wege zu dem in des Referenten: „Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik“ (Prag 1878) erzielten Resultate, dass man es hier mit einem ganz sinnreichen Näherungsverfahren zu thun hat. Weiterhin discutirt der Verfasser die bei Pappus aufgezählten verschiedenen Proportionsformen, sechs an der Zahl. Sehr scharfsinnig löst er bei dieser Gelegenheit auch noch eine andere viel umstrittene Frage. So wenig es nämlich einem Zweifel unterliegt, dass kein griechischer Mathematiker mit negativen Gleichungswurzeln etwas anzufangen wusste, so war doch unentschieden, ob man die Doppelwurzel auch dann vernachlässigte, wenn beide Werthe positiv blieben. Das grosse Werk des Diophant bringt sonderbarerweise keine bestimmten Belege in dieser Hinsicht bei. Wohl aber thut dies in gewissem Sinne die Proportionenlehre bei Pappus, und zwar scheint sowohl dieser hervorragende Mann als auch sein minder bedeutender Vorgänger Nicomachus von Gerasa der Existenz positiver Doppelwurzeln sich wohl bewusst gewesen zu sein. Zu notiren möchte noch sein, dass eine von den Uebersetzern Commandin und Hultsch urgirte Lücke des Textes betreffs der arithmetischen Medietät dem Urtheile Tannery's zufolge nicht wirklich eine Lücke ist. Den Schluss des Aufsatzes bildet eine gedrängte Skizze des Gesammtinhaltes altgriechischer Zahlenwissenschaft. Diophant erscheint zwar als ein durchaus origineller Forscher, allein bei genauerem Zusehen wurzelt doch seine ganze Thätigkeit in den Leistungen einer früheren Zeit. Gewisse unbestimmte Gleichungen haben bereits die Alten betrachtet, so Platon die Gleichung $2x^2 - y^2 = \pm 1$ und Archimedes bei seiner Kreismessung die

Gleichungen $3x^2-y^2=-1$ und $3x^2-y^2=2$. Ebenso ist Diophant von Heron und Hypsicles nicht unwesentlich beeinflusst. Auch über das sogenannte „Ochsenproblem“ des Archimedes werden neue Nachweisungen beigebracht, aus denen soviel erhellt, dass schon in vorchristlicher Zeit eine unbestimmte Analytik von nicht unerheblicher Ausdehnung existirte, und dass somit das Feld, auf welchem Diophant so grosse Erfolge errang, kein so ganz unbebautes gewesen sein kann, wie gewöhnlich angenommen wird. Gr.

B. Krummbiegel und A. Amthor. Das Problema bovinum des Archimedes. Schlömilch Z. XXV. Hl. A. 121-136, 153-171.

Die Arbeit zerfällt in zwei Haupttheile, die §§ 1-3 vom erstgenannten Verfasser und § 4-8 vom zweiten bearbeitet. § 1 enthält eine Geschichte des Problems, das Lessing 1773 zuerst aus einem Codex der Wolfenbüttler Bibliothek publicirte, und das dann von Ch. Leiste, J. Struve und K. L. Struve, Gottfried Herrmann, W. Jul. F. Wurm, Nesselmann und endlich Heiberg nach Text etc. bearbeitet wurde. Die eigentlich massgebenden Untersuchungen sind die von Gottfried Herrmann und Heiberg (in den Questiones Archimedeae, s. F. d. M. XI. 1879. p. 2). In § 2 wird die Frage nach der Urheberschaft des Problems besprochen. Namentlich sind es hier die Gründe, welche Herrmann und Heiberg für die Autorschaft des Archimedes angeführt haben, welche einer kritischen Prüfung unterworfen werden. Der Verfasser gelangt zu dem Resultate, dass es nicht zu erweisen, ja wohl eher zu bezweifeln sei, dass das Epigramm in seiner uns vorliegenden Form von Archimedes herrühre, dass es aber mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit seinem Inhalte nach von ihm stamme. § 3 bringt Text und Uebersetzung des Problems sowie die Uebersetzung des dabei gefundenen Scholions. Im § 4 beginnt nun die mathematische Behandlung des zunächst mit einer Besprechung der bisherigen Bearbeitungen desselben. Es werden zunächst die undeutlichen Stellen des Textes besprochen, die zur

Folge hatten, dass die Auffassung des Scholiasten, Lessing's, Leiste's und die der beiden Struve's auf ungeheuerliche Zahlen führten, die factischen Verhältnissen auch nicht entfernt entsprechen. Weiter werden die Conjecturen untersucht, die Gottfried Herrmann, Wurm und andere vorgeschlagen hatten. Indessen werden zwei derselben nicht in Betracht gezogen, so dass dem Verfasser schliesslich zwei Probleme resultiren, je nachdem man das Wort πλινθος als Rechteck, (Wurm'sches Problem) oder als Quadrat (Hauptproblem) auffasst. Im § 5 wird dann das Wurm'sche Problem gelöst. Es werden die neun Gleichungen aufgestellt und die Lösung gegeben. Als Gesammtzahl ergiebt sich dabei eine dreizehnstellige Zahl. § 6 wendet sich dann zu dem Hauptproblem. Die Gleichungen sind dieselben, wie bei dem Wurm'schen Problem, nur eine Gleichung ist anders. Die Summe der Anzahl der weissen und schwarzen Stiere soll nicht mehr ein Rechteck, sondern ein Quadrat sein. Die Lösung führt auf eine Pell'sche Gleichung, nämlich

$$t^2 - 4729494u^2 = 1,$$

und zwar wird diejenige kleinste Lösung gebraucht, bei der u durch 2.4657 theilbar ist. Dieser Aufgabe ist nun das Weitere gewidmet, indem in § 7 einige dazu nöthige Hülfssätze aufgestellt und bewiesen werden, in § 8 die wirkliche Durchführung erfolgt. Es ergiebt sich die Gesammtzahl der Rinder 7766 mit 206541 folgenden Ziffern. Zum Schluss sucht der Verfasser diese Zahl dem Leser zu veranschaulichen. O.

A. Marre. Extrait du manuscrit No. 24237 du fonds français de la bibliothèque nationale. Darboux Bull. (2) III. 27-31.

Das betreffende Manuscript, 168 Seiten stark, trägt den Titel „Éléments de Mathématiques", enthält indess theils Studien über nichtmathematische Gegenstände, theils in das Gebiet der höheren Mathematik gehörige. Hier wird die Behandlung zweier zahlentheoretischer Probleme mitgetheilt: Zwei Zahlen zu finden, deren Unterschied gleich dem Unterschied ihrer Cuben ist. Lösung der

diophantischen Gleichung

$$y^2 = x(q^2-1)$$

für ein gegebenes q. Sn.

C. Henry. Lettre à M. le rédacteur du Bulletin. Darboux Bull. (2) IV. 268-272.

Der Verfasser weist auf frühere Besprechungen des im vorigen Referate bezeichneten Manuscriptes hin (besonders Boncompagni Bull. XII. 564-565; vgl. F. d. M. XI. 1879. 16). Er giebt ein Excerpt aus Prestet, Nouveaux Éléments de Mathématiques, worin die oben erwähnten zahlentheoretischen Probleme behandelt sind. Ferner Errata in Lambert's Zusätzen zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen etc. (Berlin 1770). Sn.

C. Henry. Sur une valeur approchée de $\sqrt{2}$ et sur deux approximations de $\sqrt{3}$. Darboux Bull. (2) III 1879. 515-520

Bezieht sich auf die Regel des Baudhâyana, über die im vorigen Bande p. 37 berichtet worden ist. O.

H. Brocard. Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers. N. C. M. VI. 255-266.

Analyse der Arbeiten von Piarron de Mondésir, Meissel, Riemann, Genocchi, Lebesgues, Desboves, James und J. W. L. Glaisher (s. F. d. M. XI. 1879. p. 35). Mn. (O.)

R. Peiper. Fortolfi Rythmimachia. Schlömilch Z. XXV. Suppl. 167-227.

Der Zahlenkampf war ein mathematischen Charakter tragendes Spiel, als dessen Erfinder man im späteren Mittelalter verschiedentlich einen der drei Männer bezeichnete, die man überhaupt als die Träger und Förderer mathematischen Wissens kannte: Pythagoras, Boethius, Gerbert. Relative Berechtigung hat hievon natürlich nur der Name Gerbert's, der jedenfalls nicht

sehr lange vor Erfindung des Spieles lebte. Ueberhaupt zeitigte der damalige Geschmack mehrere derartige Versuche, Spiel und Wissenschaft zu verbinden, so u. a. die „Alea regularis“ des Bischofs Wibold von Cambrai (gest. 965). Was nun die Rythmimachie des Fortolf anlangt, so war dieselbe theilweise dem Schachspiele nachgebildet. Es gab 48 Spielsteine, 16 viereckige grössere, 16 viereckige kleinere und 16 runde, von welch' letzteren zwei wieder eine ausgezeichnete Stellung besassen. Die arithmetischen Regeln, nach welchen diese Steine mit gewissen Zahlwerthen beschrieben wurden, sind zu complicirt, um hier in Kürze wiedergegeben werden zu können. Diese Steine wurden nun in einer gewissen Anordnung von beiden Spielern aufgestellt, und jeder von diesen beginnt, ähnlich wie beim Damenbrett, gegen den andern zu ziehen; das Wegschlagen der Steine erfolgt wiederum nach bestimmten arithmetischen Gesetzen. Auch Hermannus Contractus, der berühmte Reichenauer Abt, hat eine Rythmimachie geschrieben, desgleichen ein gewisser Odo, der jedoch nicht mit dem in der Geschichte der Mathematik anderweit berühmten Odo von Clugny identisch sein dürfte. Unter den neueren Schriftstellern endlich giebt es mehr wie Einen, der dem geistvollen Spiele seine Theilnahme zuwendet. Nach Curtze's Angabe enthält auch ein Berliner Codex eine Rythmimachie, die vielleicht den Verfasser der vorliegenden interessanten Abhandlung zu genauerer Untersuchung anreizen dürfte. Gr.

A. Favaro. Sulla elica calcolatoria di Fuller con cenni storici sopra gli strumenti calcolatori a divisione logaritmica. Atti d. Ist. Ven. (5) V. 495-521.

Beschreibung des Apparates, an die sich eine grosse Zahl Notizen über andere Rechenmaschinen und Recheninstrumente reihen. O.

A. Favaro. Appendice alle notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni. Mem. di Modena XIX. 234-244.

Diese Ergänzungen zu dem im Titel genannten Werke des

Herrn Favaro (s. F. d. M. X. 1878. p. 46) betreffen die Methode von Buteo (in dessen Opera geometrica, Lugduni 1554, p. 59-65), von Joseppo Unicorno (De l'arithmetica universale, Venetia 1598), von P. A. Cataldi (Algebra discorsiva numerale etc. Bologna, 1618) und anderen, deren Schriften meist nach Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra etc. (s. F. d. M. X. 1878. p. 47) citirt werden. M.

O. Stolz. B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Wien. Anz. 1880. 91-92.

Nach dem vorliegenden kurzen Auszug bezieht sich die Arbeit auf eine Reihe von Abhandlungen Bolzano's über die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung, die noch vor Cauchy's Vorlesungen erschienen, aber bald in Vergessenheit gerathen sind. Der eingehenden Würdigung dieser Abhandlungen ist die Arbeit gewidmet. In einem Anhange ist die auf Grund der von Riemann und Weierstrass herrührenden Definition des bestimmten Integrals sich ergebende Darstellung des Problems der Rectification auseinandergesetzt. Ein eingehendes Referat bleibt vorbehalten bis nach Erscheinen der Arbeit selbst. O.

G. A. Maggi. Sulla storia delle funzioni cilindriche. Acc. R. d. L. (3) IV. 259-263.

Die Cylinderfunctionen finden sich schon vor Bessel und Fourier gelegentlich bei Daniel Bernoulli und Euler. Bernoulli kommt auf die Cylinderfunctionen mit dem Index 0 in seiner Arbeit: „Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae" in den Commentarii Academiae Scientiarum Imper. Petropol. t. VI. (1732-33) und t. VII. Euler wird auf die Cylinderfunctionen ebenfalls durch Behandlung ähnlicher mechanischer Probleme, wie das Bernoulli'sche, geführt; vergl. t. VII. der eben genannten Commentarii, sowie Acta Acad. Scient. Imper. Petropol. t. V., 1781. Er betrachtet auch die Cylinderfunction zweiter Art von der Ordnung Null. Wn.

A. Sachse. Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen. Schlömilch Z. XXV. Suppl. 229-276.

A. Sachse. Essai historique sur la représentation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une série trigonométrique. Darboux Bull. (2) III. 43-64, 83-112.

Verbesserter Abdruck und Uebersetzung der Dissertation, über welche F. d. M. XI. 1879. p. 274 berichtet worden ist. Siehe auch Abschn. VII. Cap. 1. M.

C. Taylor. On the history of geometrical continuity. Proc. of Cambr. IV. 14-17.

Kepler's Werk: „Ad Vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica traditur" (Francofurti 1604) enthält einen kurzen Abschnitt: De coni sectionibus, welcher den Gegenstand vom Gesichtspunkt der Analogie oder Continuität behandelt. Der Verfasser zeigt, dass sich in diesem Abschnitt bereits die moderne Auffassung der geometrischen Continuität finde, wodurch Kepler in die vorderste Reihe der Gründer der modernen Geometrie gerückt würde. In diesem Werk wird auch das Wort „focus" zum ersten Male gebraucht. Kepler's Worte sind: „quae definitionem certam habent, nullum nomen, nisi pro nomine definitionem aut proprietatem aliquam usurpes.... Nos lucis causa et oculis in mechanicam intentis ea puncta focos appellabimus." Glr. (O.)

G. J. Allman. Greek geometry from Thales to Euclid. Herm. 1880. Csy.

M. Baker. The history of Malfatti's problem. Wash. Bull. II. 113-123.

Die vorliegende Arbeit soll eine Ergänzung sein zu der Geschichte des Problems in der Arbeit von Talbot: „Recent researches on Malfatti's problem" in den Transactions of Edinburgh XXIV.

1864-1867, p. 127-138. Es werden daher nur solche Arbeiten besprochen, die dort übersehen waren. Die Wittstein'sche Arbeit über denselben Gegenstand ist dem Verfasser erst nach der Drucklegung bekannt geworden. O.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XIX. 94-96.

Anknüpfend an eine Uebersicht über die Eigenschaften der Curve $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$, der Epicycloide mit 4 Spitzen, in Nouv. Ann. (2) XIII. p. 534 giebt der Verfasser als Supplement Notizen darüber, wer eine Anzahl von Eigenschaften zuerst entdeckt habe. O.

A. WERNICKE. Die Entdeckung der endlichen Lichtgeschwindigkeit durch Olaf Römer. Schlömilch Z. XXV Hl. A. 1-10.

Der erste Theil der Arbeit enthält die Geschichte der Römer'schen Entdeckung. Olaf Römer kam durch Picard im Jahre 1671 nach Paris, wo er bei seinen Arbeiten über die Verfinsterung der Jupitertrabanten auf den bekannten Schluss über die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit kam. Der Verfasser stellt den Gedankengang Römer's und die Schicksale seiner Ansichten dar. Sie wurden keineswegs allgemein anerkannt, namentlich Cassini hatte wesentliche Bedenken dagegen, da die Römer'schen Betrachtungen nur bei dem ersten, nicht aber bei den drei anderen Trabanten zu diesem Resultate führten. Nach Römer's Fortgang aus Paris im Jahre 1681 verlor seine Ansicht mehr und mehr an Ansehen. Römer selbst ist später nicht noch einmal auf die Sache zurückgekommen, so dass sein Verdienst eigentlich erst dann allgemeine Anerkennung fand, als Bradley's Untersuchungen die Römer'sche Entdeckung so eclatant bestätigten. Der zweite Theil der Arbeit enthält die Quellen und Belege für den ersten Theil. O.

E. ÖHLER. Beitrag zur mechanischen Theorie der Wärme. Pogg. Ann. (2) IX. 512.

Abdruck der Nummern 658, 659, 660 aus Jacob Hermann's „Phoronomia sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo, 1716“, in denen sich schon Gedanken, analog denen, die der mechanischen Wärmetheorie zu Grunde liegen, ausgesprochen finden. O.

De Gasparis. Relazione intorno alla Memoria di Giovanni Celoria: Sopra alcuni eclissi di sole antichi e su quelli di Agatocle in particolare. Acc. R. d. L. (3) IV. 105-106.

Der Werth dieser Arbeit besteht, dem Referenten zufolge, darin, dass mit Hülfe der von den alten Schrifstellern überlieferten Verfinsterungen ein genauerer Werth für die säculare Beschleunigung der mittleren Mondbewegung gewonnen wird. 138 Eklipsen wurden zu diesem Zweck beigezogen. Besonders wichtig erschien es, festzustellen, welches die Sonnenfinsternis war, die in der Hellespontgegend total, in Alexandria nur zu vier Fünfteln beobachtet ward; Herr Celoria erkannte als solche die sogenannte Finsternis des Agathokles (14. August 309 n. Chr.). Als theoretisch wichtigstes Ergebnis der ungeheuer mühevollen Untersuchung ist das zu bezeichnen, dass die Länge des Knotens für das laufende Jahrhundert um 25 Sekunden vermindert werden muss. Gr.

G. Bellavitis. Quindicesima rivista di giornali. Atti d. Ist. Ven. (5) V. 299-345.

Fortsetzung der Uebersichten, über welche schon früher im Jahrbuch (zuletzt X. 1878. p. 23) berichtet worden ist. Die vorliegende Abtheilung giebt eingehende Berichte über Arbeiten von Laisant und Badoureau aus der Zahlentheorie, Laisant, Mannheim, Laguerre, Bellavitis, Lorenzoni aus der Geometrie aus den Jahren 1878 und 1879, über welche seiner Zeit im Jahrbuch berichtet worden ist. O.

Capitel 2.

Philosophie (Methodik, Pädagogik).

H. GIRARD. La philosophie scientifique. Paris. J. Baudry. Bruxelles. C. Muquard.

Girard's philosophie scientifique ist ein Werk, das zu den besten philosophischen Schriften des Auslandes gehört, und das in Deutschland weitere Beachtung finden wird. Zwar hat es nicht unerhebliche Mängel: Der Inhalt ist stellenweise doch zu mager und dürftig, als ob wir eine Scholastik zu bekämpfen hätten; die Literatur, namentlich die neuere englische, ist zu wenig benutzt; manches Alte wird als Neues und Eigenes mit Unrecht angepriesen, manches fiat lux ausgerufen, wo es längst hell ist; die Widerlegung knüpft häufig an Ansichten an, die einer Widerlegung nicht würdig sind. Philosophische Ansichten in den Worterklärungen eines Dictionnaire zu suchen wird keinem Deutschen einfallen. Aber alle diese Mängel treten zurück hinter grossen Vorzügen des Buches, Sicherheit, Klarheit, Einfachheit.

Der Verfasser will durch Wiedervereinigung der Philosophie mit der Wissenschaft eine von dialektischen Verwirrungen und transcendenten Erdichtungen freie Philosophie schaffen. Das Material, über das er verfügt, sind die Mathematik, die Naturwissenschaften, die Kriegswissenschaft und die musikalische Aesthetik. Es giebt nach seiner Ueberzeugung eine subjective und eine objective Welt. Die Leugnung der Aussenwelt ist ihm nur ein jeu d'esprit. Erkenntnis besteht in der Uebereinstimmung des Subjectiven und Objectiven. Der durch Sensationen vermittelte Stoff des Wissens ist objectiv. Vom Objecte der Wissenschaft ist alles Transcendente ausgeschlossen. Ausser auf den Stoff richtet sich die Erkenntnis auf Causalitäten. Gleiche Ursachen rufen gleiche Wirkungen hervor, während dieselben Wirkungen von verschiedenen Ursachen herrühren können. Ein Vorurtheil ist der Glaube an Axiome, Definitionen etc. Die Betrachtung und Ergründung fundamentaler Facta muss an ihre

Stelle treten. Alle unmittelbare Erkenntnis geschieht durch die Sinne: Alles ist uns nur durch seine Manifestationen bekannt; ein Substratum, unabhängig von der sinnlichen Erscheinungsweise, ist der Wissenschaft fremd. Vom Sinnlichen schreiten wir durch Abstraction, Vergleichung, Generalisation, Classification etc. zu allgemeinen Begriffen und Gesetzen fort. Der Philosophie fällt die Aufgabe zu, das Zerfallen der Wissenschaft in einzelne isolirte Theile zu verhüten. Den allgemeinen Ausführungen sind einzelne speciell mathematische Betrachtungen eingestreut. So wird S. 96—98 der Begriff der Tangente, S. 187-256 die Entstehung der mathematischen Grundbegriffe und -gesetze, S. 260-265 der Begriff des Unendlichen, S. 296—309 die Methode der Mathematik, und S. 372—402 die Classification der mathematischen Disciplinen untersucht. Gänzlich verfehlt erscheint dem Referenten freilich der erste dieser Abschnitte. Girard bestreitet hier die Richtigkeit des Satzes, dass die Tangente mit der Kreisperipherie nur einen Punkt gemeinsam habe; aber seine vermeintliche Widerlegung schiebt an Stelle des Kreisbegriffes den allgemeinen Curvenbegriff unter, für den niemand dergleichen behauptet, und die Frage, durch wieviel Punkte eine Gerade bestimmt sei, wird mit der Frage, wieviel Punkte eine Gerade mit der Peripherie gemeinsam habe, verwechselt. Wenn im Anschluss daran Girard behauptet, dass die Mathematik sich noch jetzt in dem Zustande befinde, in dem die Chemie war, als sie Alchymie war, so weiss man nicht, ob man lächeln oder sich ärgern soll. Auch der Abschnitt über die mathematischen Grundgesetze erweckt Bedenken. Die Bewegung soll der Grundbegriff der Geometrie sein. Girard unterscheidet die geometrische zeitlose Bewegung von der den Zeitbegriff einschliessenden kinematischen. Der Referent kennt keine zeitlose Bewegung und glaubt, dass hier Erzeugung durch Denkthätigkeit mit Bewegung verwechselt ist. Ansprechend erscheint dagegen der Beweisgang, durch den Girard zu dem Resultate kommt, dass die behauptete Schwierigkeit des bekannten Euklidischen Postulats keine besondere sei, und dass man an Stelle der absurden Definition die Forderung setzen müsse, den Parallelismus zu erzeugen. Die

Bemerkungen über das unendlich Grosse und Kleine sind nur dürftig ausgefallen. Sehr richtig erscheinen dagegen die Untersuchungen über die Methode und Classification der mathematischen Wissenschaft. Man wird das Buch Girard's schwerlich aus der Hand legen, ohne trotz aller Widersprüche im Einzelnen, doch mit dem Gang der gesammten Untersuchung einverstanden zu sein. Mi.

L. Buys. La science de la quantité. Bruxelles. C. Muquardt.

Das behaglich breite Werk Buys' besteht aus einer Einleitung (p. 5-36) und zwei aus je zwei Theilen zusammengesetzten Büchern (p. 37-555), von denen das erste die Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potenzirung, Radicirung, einige Zahlengesetze und die Gleichungen ersten und zweiten Grades darstellt, das zweite die Reihen und Logarithmen, die Elemente der Differentialrechnung und Functionslehre und die allgemeine Theorie der Gleichungen umfasst. In der durch Citate aus Descartes u. a. unverhältnismässig ausgedehnten Einleitung bekennt sich Buys als Anhänger des Deutsch verderbenden, unnatürlichen und sonderbaren Chr. Fr. Krause, der die Ideen Fichte's und Schelling's vereint und in seiner Kategorienlehre wohl das Verkehrteste, was auf diesem Gebiete möglich ist, zu Stande gebracht hat. Das Werk Buys' selbst ist ein Lehrbuch der Elemente der Arithmetik, Algebra und Analysis, das möglichst populär sein will, auf eine Zustimmung aber wohl weder bei dem noch völlig Unwissenden noch bei dem Fachmathematiker rechnen kann. Denn abgesehen von seiner unnöthigen Breite, die für einen derartigen Stoff am wenigsten passt, leidet es an mehreren Grundmängeln. Weder sondert es die bestimmten und allgemeinen Zahlen genügend, noch giebt es die Auseinandersetzungen in einer natürlichen Reihenfolge. So ist der Begriff des Bruches mit dem der ganzen Zahl sofort an die Spitze gestellt, ehe noch der Begriff der Division gehörig erläutert ist, so ist der Begriff der negativen Zahl zunächst vollständig übergangen, wird sogar und mit ihm der des Imaginären systematisch ausgeschlossen,

trotzdem er natürlich unentbehrlich ist und factisch unter anderm Namen stellenweise wieder eingeführt wird, so ist ferner die Logarithmirung systemlos von der Potenzirung getrennt. Auch kann das Werk weder auf genügende Begründung noch auf Vollständigkeit Anspruch erheben, wie der Verfasser am Schluss der Einleitung selbst angiebt. Mi.

D. S. PEIRCE. On the algebra of logic. Am. J. III 15-58.

In drei Capiteln, syllogistic, the logic of non-relative terms, the logic of relatives giebt Peirce eine algebraische Logik. Die Idee ist bekanntlich nicht mehr neu, wohl aber manches in der Ausführung Peirce's.

Capitel 1. Eine physiologische Einleitung ist vorangestellt (§ 1). Die Syllogistik erhält ihre Grundlage durch Feststellung der wichtigen Schluss- und Urtheilsformen und ihrer Bezeichnungen (§ 2—3). Die alten Unterscheidungen werden verworfen. Satz und Schluss, Begriff und Satz werden identificirt. Die Schlüsse sind unmittelbare, Syllogismen und Dialogismen. Ein unmittelbarer Schluss ist ein rein formaler vollständiger Schluss aus einer Prämisse. Jeder materiale Schluss enthält mehr als eine Prämisse. Schlüsse mit mehr als zwei Prämissen, können in eine Reihe von Schlüssen mit zwei Prämissen und einer einfachen Conclusion oder mit einer Prämisse und einer doppelten alternativen Conclusion zerlegt werden. Erstere heissen Syllogismen, letztere Dialogismen. Für die Urtheile ist nur die Unterscheidung zweier Hauptformen nöthig. *A* schliesst *B* ein, und *A* schliesst nicht *B* ein. Die vier alten Grundformen *A*, *E*, *J*, 0 lassen sich mit einiger Modification des Sinnes acceptiren. Auch De Morgan's acht Urtheile können verwerthet werden; doch ist es in diesem Falle richtiger, die Particularität auch auf das Prädicat zu übertragen, und die Anzahl der Urtheile dadurch zu vermehren. Zur algebraischen Darstellung der Schlüsse und Urtheile dienen sechs verschiedenartige Zeichen: 1) die Buchstaben für Begriffe und Urtheile, 2) $\therefore$ Zeichen der Folgerung, 3) $-\!\!<$, $=$, $>$, $<$, $\asymp$ Zeichen der Copula, 4) — Zeichen der Verneinung,

5) $\smile$ Zeichen der Particularität, 6) die mathematischen Klammern zur Zusammenfassung. Aus der Identität der Relation der Copula im Urtheile mit der der Folgerung im Schlusse entspringt die Algebra der Syllogistik. Aus einigen wenigen Urtheils- und Schlussformen lassen sich vermöge der Transitivität der Copula und mit Hilfe der Elimination von Begriffen alle übrigen ableiten (§ 3). Es ergeben sich auseinander die Grundsätze des Denkens, einzelne Modi der vier bekannten Schlussfiguren, eine Reihe neuer Modi. Wir haben hiermit eine erweiterte Syllogistik, die von einigen Grundannahmen ausgehend mathematisch deducirend fortschreitet, aber die übersichtliche Form der gewöhnlichen Syllogostik nicht besitzt.

Capitel 2. Nichtrelative Begriffe sind Begriffe, die ausser Beziehung zu anderen gedacht werden. Es handelt sich in einer Logik nichtrelativer Begriffe darum, Begriffe im Subject und Prädicat eines Urtheils zusammenzusetzen oder zu trennen, und die neu entstehenden Verhältnisse zwischen Subject und Prädicat zu ermitteln, mithin um das, was Boole in seiner logischen Functionslehre durch einen Calcul schon bestimmt hat. Die Verbindung der Individualbegriffe zu allgemeinen Begriffen ist logische Addition; die Verbindung der einfachen Merkmale zu zusammengesetzten Begriffen ist logische Multiplication. Die Gesetze dieser Operationen darzustellen sind neue Zeichen erforderlich, nämlich: 7) ∞ Zeichen der Möglichkeit, 8) 0 Zeichen der Unmöglichkeit, 9-10) $+\times$ Zeichen der Addition und Multiplication, 11-13) $\varphi\Sigma\Pi$ Functions,- Summen- und Productzeichen. Die Gesetze der logischen Addition und Multiplication decken sich nicht völlig mit den entsprechenden rein arithmetischen Sätzen; z. B. ist in der Logik $a = a + a$; $(a \cdot b) + c = (a + c)(b + c)$ etc. Der wichtigste Satz in der Logik der Non-relativa ist: $\varphi x = (\varphi\infty x) + (\varphi 0 \bar{x})$ oder $= (\varphi 0 + x) \cdot (\varphi\infty + \bar{x})$. Die Methode zur Lösung von Problemen, die sich aus den Formeln ergiebt, ist folgende: Man zerlege Subject und Prädicat in so viel Summanden und Factoren als möglich, zerlege die zusammengesetzten Sätze in einfache, eliminire diejenigen Begriffe, auf deren Verhältnis es nicht ankommt, bringe alle Begriffe bis auf einen in's Subject oder Prädicat,

oder auch alle in's Subject, wobei das Prädicat 0 wird, oder auch alle in's Prädicat, wobei das Subject ∞ wird, und beachte schliesslich, dass alle Sätze, die ein gemeinsames Subject oder Prädicat haben, sich durch Multiplication oder Addition zusammenziehen lassen.

In Capitel III. beschäftigt sich Peirce mit der Logik der relativen Begriffe. Dies Gebiet ist der Syllogistik verwandt. Die Grundlage zu einer Algebra relativer Begriffe bildet der Gedanke, dass jedes allgemeine Relativ als eine Summe von Individualrelativen oder als ein Product einfacher Relativa aufgefasst werden kann. In jeder Relation ist das erste Glied, Relatum, von den übrigen, Correlata, zu unterscheiden. Durch Vertauschung von Relatum und Correlaten lässt sich aus einer Relation eine oder eine Anzahl neuer Relationen ableiten. Zur Bezeichnung der Relationen verwendet Peirce 14) das Zeichen : . Eine Algebra der relativen Begriffe ergiebt sich aus dem Problem von zwei gegebenen Relationen, die in einem Gliede übereinstimmen, eine neue abzuleiten. Die hierzu erforderlichen Operationen werden relative oder externe Multiplication, regressive Involution, progressive Involution und Transaddition genannt. Mit der Aufstellung der Formeln für diese Operationen schliesst die unvollendete Abhandlung Peirce's.

In der Arbeit Peirce's, wie in ähnlichen seiner Vor- und Mitarbeiter, zeigt sich viel Scharfsinn und sorgfältiger Fleiss; dass aber die Logik allzuviel durch eine solche Verfeinerung und Verschärfung gewinnt, möchte sehr zweifelhaft sein. Eine Erweiterung liegt ja allerdings in der Behandlung der relativen und nichtrelativen Begriffe; die Fesseln der Syllogistik werden durchbrochen; die alten Formen werden durch neue ersetzt, die Aufgaben umfassender gestellt und gelöst: aber hierbei geht auch wieder die einfachere Systematik zu Grunde. Das Schlussverfahren gewährt den Eindruck, den man von der Lösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten empfängt. Die Logik verlangt doch wohl heutzutage mehr eine andersartige Erweiterung. Eine Ableitung aller vorhandenen Denkbeziehungen

ist eine dringende Aufgabe, zu deren Lösung die algebraische Logik keinen Beitrag liefern kann. Mi.

B. Halsted. Statement and reduction of syllogism. J. specul. Phil. XII. 418.

Halsted stellt in strengem Anschluss an Boole Symbole und Grundgesetze für die logische Multiplication, Addition und Subtraction auf. Hierauf leitet er, 16 denkbare Urtheilsformen scheidend, die freilich nachher in zwei Formeln ausdrückbar sind, die hieraus sich ergebenden 256 möglichen Syllogismen und die für ihre Bestimmung nothwendigen Gesetze ab. Die Arbeit ist, was die Herleitung der Schlüsse betrifft, ein selbständiger Beitrag zum logischen Calcul. Mi.

B. Halsted. Algorithmic division in logic. J. specul. Phil. XIII. 107.

Der Verfasser begründet, theilweise gegen Jevons polemisirend, dass eine logische Division zulässig ist, und stellt die beschränkenden Bedingungen fest, unter denen sie möglich erscheint. Mi.

J. Venn. On the various notations adopted for expressing the common propositions of logic. Proc. of Cambr. IV. 36-47.

Der Verfasser lenkt die Aufmerksamkeit auf die grosse Verschiedenheit der symbolischen Ausdrucksformen für die gewöhnlichen Sätze der Logik. Er benutzt als Beispiel den Satz: „Nicht *S* ist *P*“ und giebt ein Verzeichnis von 24 Symbolen, die dafür von Boole, MacFarlane, Wundt, Jevons, Delboeuf, Murphy, Holland, Drobisch, Segner, Darjes, Grassmann, MacColl, Peirce, Frege, Morgan, Ploncquet, Bentham Hamilton, Leibniz, Lambert Maimon und Chase gebraucht sind. Diese theilen sich in sechs Gruppen, die näher characterisirt und betrachtet werden, wobei

historische Notizen hinzugefügt werden. Speciell werden Lambert's Mittheilungen über diesen Gegenstand berücksichtigt.

Glr. (O.)

J. Venn. On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions. Proc. of Cambr. IV. 47-59.

Die Arbeit giebt eine Uebersicht über die verschiedenen Methoden der Anwendung geometrischer Diagramme auf die Darstellung logischer Schlüsse, aber es werden dabei nur diejenigen Methoden berücksichtigt, welche sich direct mit Schlüssen beschäftigen und sie analysiren, d. h. welche auf dem einen oder anderen Wege das Verhältnis zwischen Subject und Prädicat auseinandersetzen und zwischen den verschiedenen Arten der Schlüsse unterscheiden. Speciell werden dabei berücksichtigt Alsted, Weise, Euler und Bolzano (welcher der einzige Schriftsteller gewesen zu sein scheint, der eine Ausdehnung der diagrammatischen Bezeichnung auf die Resultate von vier Gliedern versucht hat), Lambert, Mean, Kant und F. A. Lange.

Glr. (O.)

H. McColl. Calculus of equivalent statements (Fourth Paper). Proc. L. M. S. XI. 113-121.

Der vierte Abschnitt der interessanten logisch-mathematischen Untersuchungen McColl's hat es wieder mit einigen Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu thun. Drei Definitionen, die den Sinn der Zeichen bestimmen, und vier einfache Lehrsätze genügen, um die Lösung zweier complicirter von Boole in den „Laws of Thought“ behandelten Probleme zu geben. Mi.

Ch. Ladd. On De Morgan's extension of the algebraic processes. Am. J. III. 210-226.

Die algebraischen Processe werden durch die Gesetze ihrer

Verknüpfung definirt; nothwendige Bedeutung hat keine derselben. Einem jeden Process entspricht ein inverser. Ausser dem Process der Addition (und Subtraction) wird als nothwendig nur noch das Symbol „logarithmus“ eingeführt; dies ist definirt durch

$$\log(a + a + \cdots + a[b \text{ Summanden}]) = \log a + \log b.$$

Mit diesen Operationen werden allerlei Umformungen und Verbindungen vorgenommen, welche mehr oder minder auf eine Begriffsschrift, auf Darstellung von Schlüssen durch mathemathische Zeichen hinauslaufen. No.

T. N. Thiele. Analytiske Studier om den rene Mathematiks Principer. Zeuthen Tiddskr. (4) III. 33-62.

Obwohl es als unmöglich angesehen werden darf, den Begriff der Addition oder der Multiplication mittels einer Functionalgleichung völlig zu definiren, lässt sich doch sehr wohl eine Reihe von Principien angeben, welche zusammengenommen gewisse Eigenschaften der beiden Operationen feststellen und in dieser Weise als eine Art von Definitionsgleichungen auftreten. Diese Principien sind die folgenden:

das Eindeutigkeitsprincip $a+b = c, \quad a{\cdot}b = c,$
das Umkehrungsprincip $a'+c = b,$
das associative Princip $(a+b)+c = a+(b+c),$
das commutative Princip $a+b = b+a,$
das distributive Princip $(a+b)c = ac+bc.$

Wenn alle hierher gehörige Gleichungen aufgeschrieben werden, wird ihre Anzahl im Ganzen zwölf, und endlich kommt noch hinzu der Satz

$$a+a+a \ldots (n \text{ Add.}) = n.a.$$

Um die wahre Bedeutung dieser Sätze zu erkennen, betrachtet der Verfasser der Reihe nach jeden einzelnen derselben, indem er untersucht, welcher Begrenzung durch ihn die beiden Operationen unterworfen werden. Die allgemeinsten Operationen, welche als Addition und Multiplication bezeichnet werden können, be-

nennt er Pseudoaddition ($z = x \# y$) und Pseudomultiplication ($z = x \bigcirc y$). Geht man davon aus, dass die gewöhnliche Mathematik für reelle Zahlen die einzige bekannte Methode zur Darstellung von Grössenrelationen liefert, so folgt aus dem Princip der Eindeutigkeit, dass die beiden Functionen Summe und Product in der Function

$$z = \frac{exy + fx + gy + h}{axy + bx + cy + d}$$

enthalten sein müssen, oder dass zwischen x, y, z Gleichungen von der Form

$$f(z) = g(x)\, h(y) \quad \text{oder} \quad F(z) = G(x) + H(y)$$

existiren müssen. Die nähere Bestimmung der hier eingehenden Functionen geschieht mittels der folgenden Principien, indem diese als Functionalgleichungen benutzt werden. Als Resultat dieser Untersuchungen geht dann hervor, dass von den ersten 12 Sätzen das distributive Princip das einzige ist, das einen Unterschied von Multiplication und Addition feststellt. Zur Definition der Addition wird ausser dem Eindeutigkeitsprincip noch eine Distribution und ein associatives Princip erfordert. Für die Multiplication muss noch ein Satz hinzugefügt werden, und keiner der zwölf ersten ist in dieser Rücksicht völlig genügend. Erst der dreizehnte Satz, der auch gewöhnlich zur Herleitung der Multiplicationsregel benutzt wird, hebt die Unbestimmtheit völlig auf. Nimmt man aber auf diesen Satz keine Rücksickt, so hat man für die Pseudooperationen die folgenden Bedingungen

$$F(x \# y) = F(x) + F(y),$$
$$F(x \bigcirc y) = F(x) . F(y),$$

wo

$$F(x) = \frac{x - o}{x - \omega} \cdot \frac{e - \omega}{e - o}.$$

Als dem 13ten Satze entsprechend kann der folgende allgemeinere aufgestellt werden

$$a \# a \# a \cdots (n \text{ Ps. Add.}) = e_n \bigcirc a,$$

indem

$$e_n = \frac{n\omega(e-o) + o(\omega - e)}{n(e-o) + (\omega - e)} = \frac{n \div 0}{n - \infty} \bigcirc \frac{1 - \infty}{1 \div 0}.$$

Hier bezeichnen $\dotplus$ und $\cdots\cdot$ Pseudo-Subtraction und Division. Für $o = 0$, $e = 1$, $\omega = \infty$ wird $e_n = n$, und man fällt in die gewöhnliche Arithmetik zurück.

Der Verfasser will von den oben erwähnten Principien keins als Axiom aufstellen; dazu sind sie nicht einfach und selbsteinleuchtend genug. Vielmehr will er einen Schritt weiter zurückgehen, um die Ableitung solcher aus den benannten Zahlen („Realzahlen“) zu versuchen. Er betrachtet die unbenannte Zahl als die Beschreibung einer benannten Zahl durch eine andere, dagegen nicht als eine Abstraction, weil die benannten Zahlen nur die Additionssätze mit den unbenannten gemeinsam haben. Mittels solcher Betrachtungen gelingt es die meisten der erwähnten Principien abzuleiten; übrig bleibt noch das Princip der Eindeutigkeit und das associative Princip der Addition von den benannten Zahlen. Um auch diese aus einer tieferen Quelle herzuleiten, versucht er noch die benannten Zahlen als Beschreibungen von sogenannten „mathematischen Objecten“, sowie Zeitpunkten, räumlichen Punkten und ähnlichen zu bestimmen. Obwohl die Schwierigkeiten dadurch noch nicht gänzlich beseitigt werden, scheint es doch eine Möglichkeit zu sein, auf diese Weise auf Sätze zu kommen, welche mit Recht als Axiome aufgefasst werden müssen. Die unbenannte Zahl wird demgemäss definirt als ein anharmonisches Verhältnis, welches ein Object durch drei willkürliche derselben Art nach Festsetzung der Punkte 0, 1, ∞ mittels des dreizehnten Satzes völlig bestimmt.

Unter den analytischen Hülfsmitteln, welche der Verfasser benutzt, verdient der folgende Satz hervorgehoben zu werden. Existirt eine Gleichung

$$X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots X_n Y_n = 0,$$

wo die X von x, die Y von y allein abhängen, und trotzdem keine Abhängigkeit unter x und y stattfindet, so kann dieselbe auf $n+1$ verschiedene Weisen durch Systeme von je n linearen Gleichungen, von denen m allein unter den X, die übrigen $n-m$ unter den Y bestehen, befriedigt werden. Gm.

H. Fr. Th. Beyda. Das Unendliche, was es den Philosophen und was es den Mathematikern bisher gewesen, und wie es sich mathematisch darstellt nach einer neuen Erfindung. Bonn. Selbstverl. d. Verf.

Was das Unendliche den Philosophen bisher gewesen ist, will S. 3-25 zeigen. Die Ansichten der wichtigsten Philosophen von Thales bis Kant werden angeführt. Was das Unendliche den Mathematikern war, scheint S. 25 und 26 sagen zu wollen. Hier werden einige der Fälle erwähnt, in denen der Begriff des Unendlichen in der Mathematik zur Verwendung kommt. Der Verfasser entdeckt hierbei, dass das Unendliche in der Differential- und Integralrechnung falsch gefasst ist, „dass das Unendliche (Integral) wie das unendlich Kleinste (Differential) in sehr uneigentlichem Sinne genommen ist. Denn da dx immer noch grösser als Null sein soll, so können die Theile dx unmöglich unendliche sein in der bestimmten Grösse.“ Von dieser Aporie ausgehend gelangt der Verfasser durch die Betrachtung der trigonometrischen Tangente zu einer Theorie des Unendlichen, die in gleicher Weise mathematisch wie philosophisch wichtig sein soll. Der Titel bezeichnet seine Ableitung der Gesetze des Unendlichen als eine „neue Erfindung“. Auf S. 27 u. 28 theilt der Verfasser (das muss die neue Erfindung sein?) einen Kreisquadranten in eine Anzahl gleicher Theile, construirt die Tangentenlinie und zieht durch die einzelnen Theilpunkte des Quadranten vom Mittelpunkte aus Radien, die verlängert werden, bis sie die Tangentenlinie schneiden. Zwei aufeinanderfolgende Abschnitte der Tangente x und y erfüllen das Gesetz:

$$\frac{y-x}{yx} = \frac{\operatorname{tg} 2m^\circ . \operatorname{tg} m^\circ}{\operatorname{tg} 2m^\circ - \operatorname{tg} m^\circ},$$

wenn unter $\operatorname{tg} m^\circ$ die Tangentenlinie verstanden wird, deren Endpunkt der gemeinsame Punkt von x und y ist. Wird $m = 45^\circ$, so wird

$$y - x = y . x.$$

Hieraus leitet der Verfasser die Formeln

$$\infty . 1 = \infty - 1; \; 1 = \frac{\infty . 1}{\infty - 1}; \; 1.(\infty - 1) = \infty . 1; \; \infty - 1 = \infty;$$

$$1 = \frac{\infty}{\infty} - \frac{1}{\infty}; \; 1 = \frac{\infty}{\infty}; \; 1 = 1 - \frac{1}{\infty}; \; \frac{1}{\infty} = 0; \; 1 = 0 . \infty;$$

$$\frac{1}{0} = \infty; \; \infty - \infty = \frac{0}{0} = 1$$

ab. Aus diesen Formeln folgen alle Gesetze des Unendlichen. Der Verfasser glaubt bewiesen und gegen jeden Widerspruch sichergestellt zu haben, „dass der unendlichste Theil einer Grösse $\frac{1}{\infty}$ vollkommen das Nichts, ein Nichtseiendes ist, sowie, dass das Endliche ein Nichts zu dem Unendlichen, entweder die Differenz von demselben $\infty - \infty = 1$ oder das Product aus dem Unendlichen und dem Nichtseienden $1 = 0 . \infty$.“ „So muss denn fortan,“ fährt er fort, „auch in der Differentialrechnung das Differential von x, dx, als vollkommen gleich 0 betrachtet werden, d. h. als Nichtseiendes, und die wirklich unendlichen Theile von x machen das Integral aus.“ Mit stolzer Freude fügt er hinzu: „Es bekommt dadurch diese höchste Wissenschaft der Mathematik, die herrlichste Erfindung unseres Leibniz, erst ihre feste Grundlage.“ „Es ist ja nun klar und deutlich bewiesen, dass es drei Sein, Unendliches, Endliches und Nichtseiendes geben müsse, auch das Verhältnis derselben zu einander genau angegeben, wie es in der Philosophie nur die grössten Denker ahnen konnten.“ „Es muss sich das Nichtseiende zum Endlichen verhalten, wie dieses zum Unendlichen. Denn da

$$\frac{1}{0} = \infty = \infty . 1 = \frac{\infty}{1}, \text{ oder } 1.1 = 0.\infty,$$

so hat man $\infty : 1 = 1 : 0$. Statt 1 kann man aber jede endliche Grösse A setzen etc.“

Auf circa 20 Seiten folgt nach der Darstellung der neuen Erfindung S. 30-51 die Verwerthung derselben. Das Verhältnis der drei Sein, des Unendlichen, Endlichen und Nichtseienden zu einander wird mathematisch und philosophisch erläutert: Unendliches und Nichtseiendes ist nicht durch die sinnliche Wahr-

nehmung, wie das Endliche, sondern durch Vorstellung oder reine Anschauung erkannt (p. 31). Das Unendliche ist nicht ein dem Endlichen Gehöriges, sondern nur ein Gedachtes (p. 33). Das Endliche mag noch so gross oder noch so klein sein, so hat dennoch jedes seine unendlichen Theile, aber jedes nach seinem eigenen Sinne (p. 33-34). Das Endliche kann nicht ein Theil des Unendlichen sein. Die Welt ist weder ein Unendliches noch ein Nichtseiendes. Eine unendliche Welt kann nur eine intelligible sein. Die Welt ist endlich (p. 40-41). Auch der Raum und die Zeit in der Welt müssen endlich sein (p. 43-45). Von den drei Sein bilden die beiden äussersten, Unendliches und Nichtseiendes, die schärfsten Gegensätze. Das Endliche ist ein mittleres Sein und kann aus den beiden anderen zusammengesetzt werden. Dass es ein Höheres, Unendliches über dem Endlichen geben müsse, lässt sich mathematisch beweisen. Die drei Sein sind so zu einander gestellt, dass man immer aus zweien zu dem dritten gelangen kann:

$$\frac{A}{0} = \infty; \quad \frac{A}{\infty} = 0; \quad 0.\infty = A.$$

Die Trias des Unendlichen, Endlichen und Nichtseienden wird schliesslich noch mit anderen Namen bezeichnet, Nothwendiges, Wirkliches, Mögliches; Sein, Werden und Wahrsein. Vergleichend werden die drei Sein mit den drei christlichen Tugenden, Glaube, Liebe und Hoffnung, zusammengestellt. Und endlich wird, als nothwendige Folgerung, weiteres Leben und Unsterblichkeit der Seele deducirt.

So weit das Referat. Hierzu noch wenige Worte: Dem geschichtlichen Ueberblick fehlt jede scharfe Formulirung des Begriffs der Unendlichkeit. Die mathematischen und philosophischen Forschungen des XIX. Jahrhunderts bleiben gänzlich unerwähnt Die neue Erfindung ist eine Berechnung, wie sie jeder Obersecundaner ohne Hilfe des Lehrers anstellen kann. Das Schlimme ist nur dabei, dass der Verfasser absolut nicht Geometrisches und Arithmetisches trennt und ohne jegliche Rechtfertigung mit Unendlichem multiplicirt und dividirt. Das Schlimmste ist, dass der Verfasser mathematische Formen philosophisch ausdeutet,

und aus blossen Begriffen Schlussfolgerungen über die Wirklichkeit ziehen will. Dass die Betrachtung der trigonometrischen Tangente zum Postulat der Unsterblichkeit der Seele führt, ist unstreitig des Verfassers eigene und neue Erfindung.

Mi.

J. Bienaymé. Lettre à M. Darboux. Darboux Bull. (2) IV. 265-268.

Der Brief Bienaymé's rührt vom 21. August 1875 her und enthält die Bemerkung, dass er die Ansichten über das Unendliche, die Herr Hoppe in einem Artikel im Bull. April 1875 p. 170-171 ausgesprochen, bereits vor 35 Jahren in einer Ankündigung des „Traité élémentaire de la théorie des fonctions“ von Cournot im Moniteur vom 4. November 1841 ebenfalls ausgesprochen habe. Dem Abdruck des Briefes ist der betreffende Artikel des Moniteur angefügt. O.

P. Fambri e P. Cassani. Tra fisica e metafisica. Att. d. Ist. Ven. (5) VI. 55-85, 957-997, 1024.

Die Abhandlung enthält Untersuchungen über das Wesen der Hypothesen. Vor allem wird an den neueren Hypothesen der Physik, Chemie etc. der Unterschied der naturwissenschaftlichen Hypothese, der mathematischen Formel und der metaphysischen Erdichtung nachgewiesen und mit Recht das Gebiet der ersteren beschränkt. Mi.

V. A. Julius. Beschouwingen over de grondslagen der natuurkunde. Breda. Broese et Co.

Die umfangreiche Abhandlung (93 Seiten) umfasst eine Untersuchung über die Grundlagen, auf denen die Naturwissenschaft im Allgemeinen und die Physik im Besondern aufgebaut ist. Nach der Ansicht des Verfassers hat man sich bis jetzt zu wenig

Rechenschaft davon gegeben, wodurch viel Verwirrung entstanden ist. Namentlich ist dies der Fall mit den Definitionen, welche der Physik zu Grunde liegen. Diese unterwirft der Verfasser einer eingehenden Untersuchung, und findet, dass sie in der Regel unzureichend sind. Nach einander werden die Begriffe Zeit, Bewegung, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Masse, Kraft besprochen und gezeigt, in wie viele Irrthümer in dieser Beziehung auch die tüchtigsten Schriftsteller (Thomson, Tait, Maxwell, Schell, Ritter) verfallen sind. Dann behandelt der Verfasser die Beweise für die Grundsätze der Bewegungslehre, wie das Parallelogramm der Kräfte, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, das d'Alembert'sche Princip, welche ebenso ungenügend befunden werden. Endlich giebt er eine neue Reihe Definitionen für die Einheiten, welche in der Physik gebraucht werden müssen, um verschiedene Grössen zu messen; dabei schliesst er sich dem System, welches von der British Association of sciences vorgeschlagen ist, an. Er versucht die verschiedenen Begriffe, die dabei verbunden werden müssen, näher zu entwickeln, besonders wird der Begriff Energie ausführlich besprochen und in Verbindung hiermit das Gesetz der Erhaltung der Energie. Obwohl zugegeben werden muss, dass in der Kritik einiger Definitionen und Beweise für Lehrsätze viele richtige Bemerkungen vorkommen, ist es nach der Meinung des Referenten dem Verfasser nicht geglückt, bessere Definitionen und strengere Beweise aufzustellen. G.

W. B. Taylor. On the nature and origine of force. Wash. Bull. I. 27-28.

Kurze Uebersicht über W. B. Taylor's „Thoughts on the nature and origine of force:“ Alle Kraft war anfangs statisch und beruht auf dem Nebeneinanderbestehen zweier entgegengesetzter Tendenzen in der Materie: Attraction und Repulsion. Das Gesetz von der Erhaltung der Kraft ist kein Grundgesetz, sondern ableitbar. Die Kraft wird immer mehr kinetisch und immer mehr zerstreut. Die sogenannten Lebenskräfte gehen aus

der Umwandelung eines Theils vorhandener mechanischer Kraft hervor; die dynamischen Kräfte führen auf die statischen Gesetze der Materie zurück. Mi.

Challis. On Newton's „Regula tertia philosophandi." Phil. Mag. (5) IX. 21-35.

Die oben bezeichnete Regel Newton's wird in folgender Weise ausgesprochen: „Die Eigenschaften der Körper, welche weder Vergrösserung noch Verkleinerung gestatten, und die allen Körpern, an denen man Versuche anstellen konnte, zukommen, sind allgemeine Eigenschaften der Körper." Diese Regel wird in den Principien von speciellen erläuternden Bemerkungen und Definitionen über die letzten Eigenschaften der Körper begleitet. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist dabei, auf die Nothwendigkeit der Annahme dieser Newton'schen Regel in der Physik und der Discussion der Definitionen in dieser Richtung aufmerksam zu machen. Csy. (O.)

G. Bellavitis. Transunto della 4ª parte delle considerazioni delle matematiche pure. Atti d. Ist. Ven. (5) V. 673-677.

Dieser kurze Auszug nennt als Thema des vierten Theils der Betrachtungen über reine Mathematik von Giusto Bellavitis die höhere Geometrie und berichtet von einigen Aenderungen des Verfassers in der Terminologie. Mi.

J. Gilles. Bedenkliche Richtungen in der Mathematik. Hoffmann Z. XI. 5-24.

V. Schlegel. Bemerkungen zu dem Aufsatze von Gilles. Hoffmann Z. XI. 274-278.

J. Gilles. Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn V. Schlegel. Hoffmann Z. XI. 278-281.

Im ersten Artikel bestreitet Gilles (gegen Helmholtz), dass die Geometrie eine Erfahrungswissenschaft sei, und (gegen

Frischauf) die logische Möglichkeit der absoluten Geometrie und des Mehrdimensionenraumes. Gegen Rudel, welcher die Vierdimensionengeometrie auf Analogie baut, macht er, ohne deren Trüglichkeit, ja sogar ohne die Unrichtigkeit eines angeführten Satzes zu bemerken, nur dieselben Einwürfe. Zuletzt wendet er sich gegen den Missbrauch des Begriffs des Unendlichen, welches nur in der Bewegung einen Sinn habe. Vielfaches Missverstehen der Lehren, die er angreift, lässt es als nutzlos erscheinen, auf die Einwürfe einzugehen. Um seinen Fehler im ganzen zu bezeichnen, so verwechselt er das in der Wissenschaft geltende Apriori, die einer bestimmten Erfahrung, z. B. dem Experimente oder der Ausmessung vorhergehende Erkenntnis mit demjenigen, welches aller Erfahrung vorhergehen soll, d. i. der uncontrolirten Meinung. Damit hängt weiter zusammen, dass ihm seine Gewohnheit als logisches Gesetz erscheint. Gegen das letztere namentlich richtet sich die Entgegnung von Schlegel, welche recht ausführlich auf die angeregten Punkte eingeht. Dabei hat derselbe einmal einen, wohl dem Dichter, aber nicht dem Philosophen gestatteten Ausdruck gebraucht: „Der Geist als Punkt ist von der Dimensionenzahl unabhängig", was im dritten Artikel Gilles gegen ihn auszunutzen sucht. Im übrigen drückt Gilles' Erwiderung nur die Verwunderung aus, dass Schlegel behaupten könne, was Kant's Lehren widerspreche. Die im Anfang des Artikels dem Gegner gemachten Vorwürfe können wir nur als völlig grundlos bezeichnen. H.

Häbe. Die Hülfsmittel des mathematischen Unterrichts. Pr. Nakel.

Als Theile der Schrift sind angegeben die drei Hülfsmittel: die häusliche Aufgabe, die Methode, das Lehrbuch. Die Thätigkeiten der Schüler, welche der Unterricht nach einander zu erwirken hat, sind: erfassen, einüben, wiedergeben. Nur für das Einüben ist die häusliche Aufgabe, und wieder nur als Unterstützung und Vermehrung anzuwenden. Der Verfasser hält die Nützlichkeit eines vorausgehenden Anschauungsunterrichts mit

empirischer Aufsuchung der Sätze durch Messen der Linien und Winkel für unzweifelhaft, würde sogar das ganze Pensum lieber in dieser Weise ununterbrochen vorausnehmen als in jedem Thema einzeln die logische Entwickelung anschliessen, wenn nicht Umstände daran hinderten; doch findet er hernach selbst eine zu weite Ausdehnung unangemessen, weil dann das Erlernte vergessen würde. H.

Hône Wronski. Einleitung in den mathematischen Unterricht, herausgegeben von L. Niedzwiecki. Paris. Polnische Bibliothek. (Polnisch).

Das Büchlein enthält die eigentliche Schrift von Hoene Wronski (Seite 1—50), eine Notiz über sein Leben, die Angabe aller seiner schon publicirten und noch in Handschrift vorhandenen Schriften, einen Artikel unter dem Titel: „Hoene Wronski und die heutige Welt" (Kritik), einige Auszüge aus den Comptes rendues de l'Académie u. s. w.

Die „Einleitung" wurde im Jahre 1821 von Wronski verfasst und in englischer Sprache in London (bei Samuel Bagster) gedruckt; nach ihr sollte ein vollständiges Lehrbuch der ganzen Mathematik folgen, das aber nicht erschienen ist, nur Herr Montferrier hat nach dem Plane von Wronski ein Werk herausgegeben unter dem Titel: „Encyclopédie mathématique ou exposition complète de toutes les branches des mathématiques d'après les principes de la philosophie des mathématiques de Hoene Wronski 4 vol. in 8°".

Nach Wronski giebt es fünf Perioden in der Entwicklungsgeschichte der Mathematik. In der ersten Periode in Aegypten und bei den Völkern des Morgenlandes wurde die Mathematik nur in concreto behandelt. In der zweiten, der griechischen, hat sich schon der menschliche Geist zur hohen Abstraction emporgehoben, aber die von ihm gewonnenen Wahrheiten waren nicht durch allgemeine Betrachtungen und Gesetze verbunden. Diese Periode dauerte bis zum Aufblühen der Wissenschaften in Europa, womit die dritte durch die Arbeiten von Cardan, Fermat,

Descartes, Kepler und Wallis ausgezeichnete Periode anfängt, in welcher die Mathematik schon die allgemeinen Gesetze untersucht und in der nächsten vierten mit Leibniz und Newton auftretenden Periode sich der Betrachtung des Entstehens und des Werdens der Quantitäten zuwendet. Diese Periode hat die mathematischen Wissenschaften mit den grössten Entdeckungen bereichert.

Aber in diesen vier Perioden, sagt Wronski, waren nur „relative Principien" herrschend, es gab kein allgemeines „absolutes Princip" aller Mathematik. Dieses „absolute Princip" soll in des Verfassers mathematischer Philosophie sich befinden, das „höchste Gesetz" von Hoene Wronski soll der weiteren Entwickelung der Mathematik in der fünften Periode zu Grunde liegen. Was dieses „höchste Gesetz" bedeuten soll, wird in der „Einleitung" nicht auseinandergesetzt, und das, was der Herausgeber in seiner Notiz davon sagt, erklärt die Sache keineswegs.

In dieser fünften Periode wird sich, sagt Wronski, die „Technik" ausbilden. Die Technik ist ein Theil der Mathematik, in welchem die allgemeinen Principien Anwendung finden. Im Gegensatz zur „Theorie", welche nur die individuelle Existenz der Quantitäten begründet, soll die „Technik" die Entstehungsprocesse, die Genesis der Methoden und der mathematischen Operationen erklären. Uebrigens ist nach Wronski schon in der vierten Periode ein guter Anfang der Technik gemacht worden, während man sich in den drei ersten Perioden überhaupt nur mit der Theorie beschäftigt habe.

Es folgen dann in der Schrift viele Bemerkungen über die reine und angewandte Mathematik, über verschiedene Probleme dieser Wissenschaften, über Methoden des mathematischen Unterrichtes, die wir aber hier übergehen. Die Schrift ist interessant und zeigt einen geistreichen Denker, dessen weitgreifende Ideen aber nicht immer auf festem Boden zu ruhen scheinen.

Dn.

KRUMME. Die Lehrsätze für Rechnen, Mathematik und geometrisches Zeichnen unter besonderer Berücksichtigung des Verhältnisses dieser Fächer zu einander und des Abschlusses in denselben nach sechsjährigem Schulbesuch. Ein Beitrag zur Concentration des Unterrichts. Pr. Braunschweig.

Der Verfasser legt zuerst seine didaktischen Grundsätze dar, wobei er auf die Lösung von Aufgaben, die sich jedoch ohne Kunstgriffe durch Entwickelung ergeben und dem Schüler das Bewusstsein der Selbständigkeit gewähren müsse, das grösste Gewicht legt, behandelt dann ausführlicher das Verfahren, dann noch specieller eingehend die Vertheilung auf die Classen und fügt in der Kürze gleicherweise das den Unterricht im geometrischen Zeichnen Betreffende hinzu. H.

J. C. V. HOFFMANN. Determinanten oder nicht? Eine Gefahr! Hoffmann Z. XI. 343-360.

Der Verfasser will von dem pädagogischen Grundsatz, neu einzuführende Lehrgegenstände so vorzubereiten, dass das Interesse im voraus dafür geweckt wird, Anwendung auf die Behandlungsweise der Determinantenlehre an Schulen machen. Von diesem Gesichtspunkt erklärt er die Lehrbücher von Studnička und Reidt für mustergültig. Grade über deren Methode aber macht er keine nähere Angaben. In die zweite Classe rechnet er die Lehrbücher von Diekmann, Heilermann, Dölp, Baltzer, Gallenkamp, Hubert Müller, zur dritten die von Hattendorf, Mansion, Sersawy, Hesse, Günther. Darf man nun den nirgends ausgesprochenen methodischen Gedanken des Verfassers aus einzelnen Aeusserungen entnehmen, so fällt die gepriesene Methode etwa mit dem Verfahren derjenigen zusammen, welche durch Auflösung immer grösserer Gleichungssysteme den Weg zur Bildung der Determinanten zu zeigen versucht haben. Nur erhalten bei ihm die ermüdend langen Rechnungen die originelle Rechtfertigung, dass

durch sie dem Schüler das Verlangen nach Vereinfachung beigebracht werden solle. H.

J. C. V. Hoffmann. Neue Beiträge zu den (mathematisch-sprachlichen) Incorrectheiten. Hoffmann Z. XI. 368-369.

Der Verfasser bezeichnet den Ausdruck „die einem Dreieck umschriebene Ellipse“ als incorrect. Er verlangt hiernach, dass man statt umschréiben sagen soll úmschreiben. Beides hat auch noch andern Sinn. H.

J. Gruber. Quotient und Bruch. Zeitschr. f. d. Realschulw. V. 655-663.

Verfasser glaubt, die Begriffe des Quotienten und des Bruches dürften im elementaren Lehrgang nicht getrennt, müssten vielmehr als völlig identisch aufgefasst werden; er zeigt, wie er sich unter dieser Voraussetzung das Pensum der Buchstabenrechnung zurechtlegt. Gr.

Zweiter Abschnitt.

A l g e b r a.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen).

D. A. Klempt. Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra. Leipzig. Teubner.

No.

E. Netto. Zur Theorie der Discriminanten. Borchardt J. XC. 164-186.

Unter einer Gattung von Functionen von n Elementen $x_1 \dots x_n$ versteht man bekanntlich die Gesammtheit aller derjenigen Functionen φ, die bei jeder Substitution einer gegebenen Gruppe G von Substitutionen jener n Elemente ihren Werth nicht ändern, bei jeder anderen es aber stets thun. Charakteristisch für die Functionen einer Gattung ist, dass jede einzelne von ihnen durch jede andere rational ausdrückbar ist. Aus den Vorlesungen des Herrn Kronecker ist nun bekannt, dass, wie sich auf rein algebraischem Wege nachweisen lässt, die Discriminanten aller Functionen φ ein und derselben Gattung

$$D_\varphi = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\alpha,\beta}^{1\dots\varrho} (\varphi_\alpha - \varphi_\beta)$$

($\alpha \gtrless \beta$ und $\varphi_1 \dots \varphi_\varrho$ die verschiedenen Werthe von φ)

einen gemeinsamen Theiler besitzen, welcher eine Potenz der Discriminante

$$\Delta = \prod_{\alpha,\beta}^{1\ldots n}(x_\alpha - x_\beta)\ (\alpha \gtrless \beta)$$

der Gleichung $(x-x_1)\ldots(x-x_n) = 0$ ist.

Durch substitutionentheoretische Betrachtungen ist es Herrn Netto in der vorliegenden Abhandlung gelungen, den Exponenten g dieser Potenz ganz allgemein zu bestimmen; und zwar ergiebt sich

$$g = \frac{1}{2}\varrho - \frac{\varrho q}{n(n-1)},$$

wenn q die Anzahl der in Gruppe G enthaltenen Transpositionen bedeutet. (Unter den Functionen der Gattung giebt es aber, wie weiter gezeigt wird, auch solche, welche eine höhere Potenz von Δ als die g^{te} zum Factor haben; in den beiden Fällen, in denen dies nur möglich ist, übersteigt der Exponent von Δ die Zahl g stets um eine grade Zahl.)

Zugleich zeigt sich, dass zwar, wie aus den Kronecker'schen Untersuchungen bereits hervorging, jene Potenz von Δ der einzige gemeinschaftliche Factor für alle Discriminanten der Gattung ist, dass diesen aber noch andere Eigenschaften gemeinsam sind. Giebt man nämlich dem obigen Ergebnisse die Form: „Für keine Gleichsetzung zweier Elemente x_a und $x_{a'}$ wird der Quotient $D_\varphi : \Delta^g$ unendlich gross", so lässt sich dasselbe folgendermassen erweitern: Ist φ eine beliebige Function der Gattung von G, und setzt man drei der Elemente x einander gleich, indem man in

$$x_a = y_a + d_a\xi,\ x_{a'} = y_a + d_{a'}\xi,\ x_{a''} = y_a + d_{a''}\xi,\ (d_a \gtrless d_{a'} \gtrless d_{a''})$$

die Variable ξ gleich Null werden lässt, so bleibt der Quotient $D_\varphi : (\Delta^g \Delta_1^{g_1})$ noch endlich, wo

$$\Delta_1 = \prod_{a,b,c}^{1\ldots n}(mx_a + nx_b - [m+n]x_c)$$

($a \gtrless b \gtrless c$ und m, n willkürliche nicht verschwindende Zahlen) ist und g_1 einen aus der Gruppe G allein ableitbaren und daher von der Wahl von φ unabhängigen Werth besitzt. Wie g_1 zu bestimmen ist, wird vom Verfasser gezeigt. Ganz allgemein

besitzen die Discriminanten der zu einer Gruppe G gehörigen Gattung von Functionen φ die Eigenschaft, dass man für alle möglichen Typen von Substitutionen

$$(x_a x_{a'});\ (x_a x_{a'} x_{a''});\ (x_a x_{a'})(x_b x_{b'});\ \dots\ \sigma;\ \dots$$

eine Reihe von ganzen symmetrischen Functionen der n Elemente x Δ; Δ_1; Δ_2;... Δ_σ;... aufstellen kann, welche durch die entsprechenden „Cykel"-Gleichungen

$$x_\lambda = x_\mu;\ x_\lambda = x_\mu = x_\nu;\ x_\varkappa = x_\lambda,\ x_\mu = x_\nu\ \dots,$$

und auch nur durch diese gleich Null gemacht werden. Diesen Functionen Δ lassen sich gewisse aus der Gruppe G allein ableitbare Maximalzahlen g; g_1; g_2; ... g_σ; ... zuordnen, so dass der Quotient

$$D_\varphi : [\Delta^g\, \Delta_1^{g_1} \Delta_2^{g_2} \dots \Delta_\sigma^{g_\sigma} \dots]$$

für irgend welche Gleichsetzung von Elementen x untereinander nicht unendlich gross wird.

Schliesslich zeigt der Verfasser, wie der von ihm eingeschlagene Weg auch zur Einsicht über die Zerfällbarkeit der Discriminanten von Functionsgattungen in Factoren führt.

T.

W. J. C. Sharp. On some formulae in the theory of equations. Messenger (2) IX. 188-191.

Beweise für bekannte Formeln aus der Theorie der Gleichungen. Glr. (O.)

E. West. Sur les équations algébriques. C. R. XCI. 598-601, 664-666, 718-721, 759-762.

Der Herr Verfasser ergeht sich in unklaren Auseinandersetzungen über die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen. Er kommt zu dem Resultate, alle algebraischen Gleichungen seien algebraisch auflösbar! Abel wird sehr von oben herab behan-

delt. Herr West spricht die Meinung aus, Abel würde bei längerem Leben seine Irrthümer eingesehen haben. Das ist freilich ein Lob, welches sich nicht einem Jeden ertheilen lässt. No.

P. Mansion. Toute équation algébrique a une racine.
Ann. Soc. scient. Brux. IV. B. 99-124.

Beweis von R. Argaud, der häufig als Beweis von Cauchy, zuweilen auch als Beweis von Legendre bezeichnet wird. Er ist in voller Strenge zuerst von Lipschitz (Grundlagen der Analysis I. § 61—66) gegeben worden. Der Verfasser hat nur die Auseinandersetzung des letzteren vereinfachen wollen durch Vermeidung aller geometrischen Betrachtungen. Mn. (O.)

J. Farkas. Die Summe gleichartiger Potenzen von den Wurzeln einer algebraischen Gleichung als Function der Coefficienten derselben Gleichung und umgekehrt.
Grunert Arch. LXV. 433-435.

Bezeichnet man die Summe der Variationen r^{ter} Classe von den Elementen $x_1, x_2, \dots x_n$ mit V_r, so gilt die Formel

$$V_{k+1} = V_k . \Sigma x_\lambda - k V_{k-1} . \Sigma x_\lambda^2 + k(k-1) V_{k-2} \Sigma x_\lambda^3 - \cdots.$$

Aus dieser ergeben sich leicht die Newton'schen Formeln.

No.

A. H. Anglin. Mathematical notes. Trans. of Dublin. 1880.

1) Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_m$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^m = p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_m$$

sind, und h_n die Summe der homogenen Producte von $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ von n Dimensionen bezeichnet, so ist

$$h_n = p_1 h_{n-1} + p_2 h_{n-2} + p_3 h_{n-3} + \cdots + p_m h_{n-m} \quad (n > m).$$

Sind für den speciellen Fall einer quadratischen Gleichung α, β die Wurzeln von $x^2 = px + q$, so folgt, dass

$$h_{2n} = p^{2n}+(2n-1)p^{2n-2}q+\frac{(2n-2)(2n-3)}{1.2}\cdot p^{2n-4}q^2+\cdots+q^n,$$

$$h_{2n+1} = p^{2n+1}+2np^{2n-1}q+\frac{(2n-1)(2n-2)}{1.2}p^{2n-3}q^2+\cdots+(n+1)pq^n,$$

$$h_n = p^r h_{n-r}+rp^{r-1}qh_{n-r-1}+\frac{r(r-1)}{1.2}p^{r-2}q^2h_{n-r-2}+\cdots+q^r h_{n-2r},$$

oder symbolisch

$$h_n = (p+q)^r.[n]_{n-2r}^{n-r}.$$

2) Wenn

$$x^m = p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\cdots+p_m$$

ist, soll $x^n (n>m)$ ausgedrückt werden in Form von

$$P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\cdots+P_m.$$

Speciell, wenn

$$x^4 = px^3+qx^2+rx+s,$$

x^n auszudrücken in der Form

$$Px^3+Qx^2+Rx+S.$$

Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung

$$x^4 = px^3+qx^2+rx+s$$

mit x und setzt für x^4 seinen Werth ein, so findet man

$$x^5 = h_2x^3+(qh_1+r)x^2+(rh_1+s)x+sh.$$

Wiederholt man dies, so ergiebt sich unter Anwendung der in 1) gewonnenen Resultate

$$x^6 = h_3x^3+(qh_2+rh_1+s)x^2+(rh_2+sh_1)x+sh_2$$

und endlich

$$x^n = h_{n-3}x^3+(qh_{n-4}+rh_{n-5}+sh_{n-6})x^2+(rh_{n-4}+sh_{n-5})x+sh_{n-4}.$$

Der allgemeine Fall für

$$x^m = p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\cdots+p_m$$

wird in ähnlicher Art erledigt. Man findet

$$x^n(n>m) = h_{n-m+1}x^{m-1}+(p_2h_{n-m}+p_3h_{n-m-1}+p_4h_{n-m-2}+\cdots$$
$$+p_mh_{n-2m+n})x^{m-2}+(p_3h_{n-m}+p_4h_{n-m-1}+\cdots+p_mh_{n-2m+3})x^{m-3}+\cdots$$
$$+(p_{m-1}h_{n-m}+p_mh_{n-m-1})x+p_mh_{n-m}.$$

Csy. (O.)

J. D. H. Dickson. A new method of investigating relations between functions of the roots of an equation and its coefficients. Trans. of Edinb. XXIX. 535-553.

Die Gleichung wird in der Form

$$ax^n + \frac{n}{1} bx^{n-1} + \cdots = 0,$$

also z. B. für $n = 6$ in der Form

$$ax^6 + 6bx^5 + 15cx^4 + 20dx^3 + 15ex^2 + 6fx + g = 0$$

aufgestellt. Man kann dann die Functionen zweiten Grades bilden

$$\begin{vmatrix} a, & 5b, & 10c, & 10d, & 5e, & f \\ b, & 5c, & 10d, & 10e, & 5f, & g \end{vmatrix}$$

(welche numerische Vielfache von $b^2 - ac$ etc. sind), ferner die vom vierten Grade

$$\begin{vmatrix} & a, & 5b, & 10c, & 10d, & 5e, & f \\ & b, & 5c, & 10d, & 10e, & 5f, & g \\ a, & 5b, & 10c, & 10d, & 5e, & f & \\ b, & 5c, & 10d, & 10e, & 5f, & g & \end{vmatrix},$$

u. s. f. Die Arbeit untersucht nun die Ausdrücke für Functionen zweiten und höheren Grades, dargestellt durch die Wurzeln, und erhält Formeln, die sich auf die Sturm'schen Functionen beziehen.

Cly. (O.)

L. Kronecker. Ueber die Irreductibilität von Gleichungen. Berl. Monatsber. 1880. 155-162.

Ist $F(x)$ eine ganze ganzzahlige Function von x, und bedeutet ν_p in der auf alle Primzahlen p ausgedehnten Summe $\Sigma \nu_p p^{-1-w}$ die Anzahl der (gleichen oder verschiedenen) Wurzeln der Congruenz $F(x) \equiv 0 \text{ mod.} p$, so wird der Grenzwerth jener Reihe für unendlich kleine positive Werthe von w proportional $\log \frac{1}{w}$, und zwar gleich $\log \frac{1}{w}$ multiplicirt mit der Anzahl der irreductiblen Factoren von $F(x)$. Bedeutet p_k jede Primzahl, welcher

k Wurzeln der Congruenz entsprechen, so ist die obige Reihe auch $\sum_{k=1}^{n} k \Sigma p_k^{-1-w}$ und, da Σp^{-1-w} als Grenzwerth $\log \frac{1}{w}$ hat, so kann man sagen: Die Dichtigkeit aller Primzahlen ist gleich der, welche resultirt, wenn jede Primzahl p so oft genommen wird, als die Congruenz $F(x) \equiv 0 \text{ mod.} p$ Wurzeln hat, falls $F(x)$ irreductibel ist. Die Einzelwerthe D_k der zu p_k gehörigen Dichtigkeiten genügen also der Gleichung $\Sigma D_k k = 1$. Die einzelnen D_k sind für alle Gleichungen einer und derselben Classe dieselben; sie werden durch den Affect der Gleichung bestimmt. Wenn für zwei Functionen, deren Grad eine Primzahl ist, die Primtheiler der verschiedenen Arten im allgemeinen beiden gemeinsam sind, so sind die Wurzeln der einen Gleichung rational durch die der andern ausdrückbar.

An den Kreistheilungen werden die Betrachtungen, die zu dem ersten obigen Hauptsatze führen, auseinandergesetzt. Dann werden Anwendungen auf die Gattungen von Gleichungen gemacht, auf welche die singulären Moduln der elliptischen Functionen führen. No.

A. E. Pellet. Sur une classe d'équations dont toutes les racines peuvent s'exprimer linéairement en fonction de l'une d'elles. Darboux Bull. (2) IV. 262-265.

Wenn alle Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ durch $x, \theta(x), \dots \theta^{m-1}(x)$ dargestellt werden können, wobei

$$\theta(x) = \frac{ax+b}{a'x+b'}$$

ist, und $\theta^m(x) = 1$ wird, dann kann man die Gleichung auf die Form $A(x+\lambda)^m + B(x+\lambda')^m = 0$ bringen. Die m Wurzeln werden demnach $\frac{\lambda' y - \lambda}{1-y}$, wenn y einen der Wurzelwerthe der Gleichung $(a_0\lambda' - a_1)y^m - (a_0\lambda - a_1) = 0$ annimmt. Entwickelt man die linke Seite der Gleichung in die Form

$$a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 x^{m-2} + \cdots,$$

so besteht eine lineare homogene Relation

$$\alpha_0 a_i + \alpha_1 a_{i+1} + \alpha_2 a_{i+2} = 0,$$

und es ist

$$\alpha_0 + \alpha_1 a_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 = 0.$$

Aus der Realität der Wurzeln λ dieser letzten Gleichung lassen sich Schlüsse auf die der Wurzeln x ziehen. Die Congruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ geht über in $(x+\lambda)^m - u(x+\lambda')^m \equiv 0$ und macht dadurch die Anwendung der Sätze über die Irreductibilität von $y^m - u$ möglich. So erhält man eine Methode, um irreductible Functionen (mod. p) zu bilden, deren Grad nur ungrade Primfactoren von $p+1$ enthält. No.

A. E. Pellet. Sur les fonctions linéaires. C. R. XC. 1111-1112.

Ist

$$\theta(x) = \frac{ax+b}{a'x+b'}, \quad \psi(x) = \frac{x+\lambda}{x'+\lambda'},$$

so wird $\psi\theta(x) = \alpha\psi(x)$, falls für λ, λ' die beiden als verschieden vorausgesetzten Wurzeln von $a'\lambda^2 - (b'-a)\lambda - b = 0$ genommen werden. Hieraus ergeben sich sofort die Resultate über die Periodicität von x, $\theta(x)$, $\theta^2(x), \cdots$. Ebenso folgt: Wenn die Wurzeln einer Gleichung des Grades $n\mu$ sich in n Gruppen von μ Wurzeln x, $\theta(x), \ldots \theta^{m-1}(x)$ theilen, so wird die Gleichung durch $x = \frac{y\lambda'-\lambda}{1-y}$ auf die Form $F(y^\mu) = 0$ zurückgeführt, in welcher F eine ganze Function bedeutet. No.

L. Gegenbauer. Ueber Sturm'sche Reihen. Wien. Ber. LXXXI. 576-592.

Wenn zwei Systeme von ganzen Functionen $\psi_k(x)$ vom Grade n_k, $\varphi_k(x)$ vom Grade $n_k - n_1$ und ψ_0, φ_1 zwei von Null verschiedene Constanten sind, wenn ferner folgende Relationen erfüllt sind:

$$\sum_{\lambda=1}^{n_k} x_\lambda^\sigma \psi_r(x_\lambda) \frac{\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)} = \delta_{\sigma, n_{r+1}-1} \cdot \alpha_r,$$

$(r<k;\ \sigma = 0, 1, \ldots n_{r+1}-1;\ \delta_{\mu,\nu} = 0,\ \delta_{\mu,\mu} = 1;\ \alpha_r = \text{const.}),$

dann gelten folgende Sätze: 1) Die Functionen $\psi_k(x)$ und $\varphi_k(x)$ bilden zwei Systeme von Sturm'schen Functionen. 2) Zwischen je drei aufeinanderfolgenden Functionen φ_k besteht dieselbe Relation, wie zwischen den entsprechenden Functionen ψ_k. 3) Die Determinanten

$$\varphi_k(x)\psi_{k-1}(x)-\psi_k(x)\varphi_{k-1}(x)$$

sind constant. Die obige Gleichung ist charakteristisch für ψ_k. Von diesen Resultaten werden Anwendungen gemacht.

No.

Ch. Biehler. Sur une application de la méthode de Sturm. Nouv. Ann. (2) XIX. 76-81.

Die Anwendung der Sturm'schen Reihe auf die Gleichung, welche $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{m}$ aus $\operatorname{tg}\alpha$ ableitet, ist allgemein durchführbar für die Intervalle zwischen $+\infty$, 0, $-\infty$. No.

Laguerre. Sur quelques propriétés des équations algébriques qui ont toutes leurs racines réelles. Nouv. Ann. (2) XIX. 224-236.

Zuerst wird der Biehler'sche Satz abgeleitet (Borchardt J. LXXXVII. p. 350, s. F. d. M. XI. 1879. p. 64): Sind $\alpha_1+\beta_1 i$, $\alpha_2+\beta_2 i$, ... complexe Grössen, bei denen alle β dasselbe Vorzeichen haben, und setzt man

$$\Pi(x-\alpha_\lambda-\beta_\lambda i) = F(x)+i\Phi(x),$$

so hat für reelle p, q die Gleichung $pF(x)+q\Phi(x)=0$ nur reelle Wurzeln. Daraus folgt: Hat $f(x)=0$ nur reelle Wurzeln, und sind ω, p, q reelle Grössen, setzt man ferner

$$f(x+\omega i) = F(x)+i\Phi(x),$$

so hat $pF(x)+q\Phi(x)=0$ nur reelle Wurzeln. Entwickelt man $\frac{1}{f^{\omega}(x)}$ nach steigenden Potenzen von x und nennt die Summe der Glieder, deren Exponenten eine beliebige Zahl m nicht über-

schreiten, $\Phi(x)$, so hat dieser Ausdruck, gleich Null gesetzt, höchstens eine reelle Wurzel. Bedeutet $V(x)$ eine ganze Function oder eine nach aufsteigenden Potenzen von x geordnete Reihe, und bestimmt man zwei Polynome $\Phi(x)$ vom m^{ten}, $F(x)$ vom n^{ten} Grade, so dass die Entwickelung von $f(x)-\dfrac{\Phi(x)}{F(x)}$ mit der $(m+n+1)^{\text{ten}}$ Potenz von x beginnt, so heisst $\dfrac{\Phi(x)}{F(x)}$ ein Näherungswerth von $V(x)$. Ist nun $V(x)$ ein Polynom, welches in reelle Factoren ersten Grades zerlegbar ist, so hat $F(x)$ höchstens eine reelle Wurzel. Es wird schliesslich eine Regel für die Bildung von $\Phi(x)$ und $F(x)$ angegeben. No.

Laguerre. Théorèmes généraux sur les équations algébriques. Nouv. Ann. (2) XIX. 241-253.

Ist $\mathfrak{F}(x,y)$ eine homogene Function in x und y, bestimmt man ferner das Verhältnis $\xi:\eta$ durch Nullsetzung eines der Ausdrücke

$$\xi\mathfrak{F}'_x+\eta\mathfrak{F}'_y,\ \xi^2\mathfrak{F}''_{x^2}+2\xi\eta\mathfrak{F}''_{xy}+\eta^2\mathfrak{F}''_{y^2},\ \xi^3\mathfrak{F}'''_{x^3}+3\xi^2\eta\mathfrak{F}'''_{x^2y}+\cdots,\ \cdots,$$

so enthält jeder Kreis, der durch die beiden Punkte $x:y$, $\xi:\eta$ geht, in seinem Innern mindestens eine Wurzel der Gleichung $\mathfrak{F}(x,1)=0$; ausserhalb derselben giebt es gleichfalls mindestens eine Wurzel. Daraus folgt: Sind alle Wurzeln von $f(x,1)=0$ reell, so kann $\mathfrak{F}''^2_{xy}-\mathfrak{F}''_{x^2}\mathfrak{F}''_{y^2}$ niemals negativ werden. Ebenso: Ist $\alpha+\beta i$ diejenige Wurzel von $F(x)=0$, bei welcher der Coefficient von i möglichst gross ist, so werden die Coefficienten von i in allen Ausdrücken

$$\frac{F'(\alpha+\beta i)}{F''(\alpha+\beta i)},\quad \frac{F''(\alpha+\beta i)}{F'''(\alpha+\beta i)},\cdots$$

positiv sein. No.

Laguerre. Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation et sur la séparation des racines. Nouv. Ann. (2) XIX. 49-57, 97-105.

Ist

$$f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

die gegebene Gleichung, und macht α alle Glieder der Reihe

$$f_m(x) = a_0, \quad f_{m-1}(x) = a_0 x + a_1, \quad f_{m-2}(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \ldots$$
$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

positiv, so ist α eine obere Grenze für die Wurzeln; in der Newton'schen Regel werden die obigen Functionen $f_m, f_{m-1}, \ldots f_1, f$ durch die entsprechenden Ableitungen $f^{(m)}, f^{(m-1)}, \ldots f', f$ ersetzt. Die Anzahl der für β vorhandenen Zeichenwechsel der obigen Reihe ist gleich der Anzahl der reellen Wurzeln $>\beta$ oder um eine grade Zahl kleiner. Noch eine zweite Regel, für die Bestimmung der oberen Grenze der Anzahl reeller Wurzeln zwischen α und β, wird gegeben: Sind α und β zwei positive Zahlen,

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{m-2} x^{m-2}$$

der ganze Theil des Quotienten $f(x):(x-\alpha)(x-\beta)$, so ist die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, welche zwischen α und β liegen, entweder gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$f(\alpha), \quad f(\beta) - \beta(\beta-\alpha)c_0, \quad f(\beta) - \beta^2.(\beta-\alpha)c_1, \ldots$$
$$f(\beta) - \beta^{m-1}(\beta-\alpha)c_{m-2}, \quad f(\beta)$$

oder um eine grade Anzahl geringer als diese Anzahl.

No.

E. Lucas. Sur un théorème de M. Laguerre. Nouv. Ann. (2) XIX. 145-147.

L. Lévy. Sur le même théorème. Nouv. Ann. (2) XIX. 148.

Ch. Vénard. Sur une règle de M. Laguerre. Nouv. Ann. (2) XIX. 261-264.

Candèze. Sur une règle de M. Laguerre. Nouv. Ann. (2) XIX. 307-310.

H. Laurent. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XIX. 380-382.

Herr Lucas beweist das erste der beiden im vorigen Referate angeführten Theoreme und wendet es auf die reciproken

Werthe der Wurzeln an. Die Herren Lévy und Vénard zeigen, dass die durch das Laguerre'sche Theorem bestimmte obere Grenze nicht kleiner sein kann, als die durch die Newton'sche Regel gelieferte; Herr Candèze beweist, dass sie nicht kleiner sein kann, als die durch die Budan'sche oder Fourier'sche Methode gegebene. Herr Laurent endlich leitet aus jener Regel eine der Sturm'schen ähnliche Reihe ab

$$f(x),\ f_1(x),\quad \frac{a_m}{a_{m-1}} f_2(x),\quad \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}} f_3(x),\quad \frac{a_m\, a_{m-2}}{a_{m-1}\, a_{m-3}} f_4(x), \ldots,$$

welche durch den Verlust an Zeichenänderungen zwischen $x = \alpha$ und $x = \beta$ eine untere Grenze für die Zahl der reellen zwischen α und β liegenden Wurzeln giebt. No.

Ed. Lucas. Sur l'extension du théorème de Descartes. Bull. S. M. F. VIII. 187-191, N. C. M. VI. 250-253.

Einfacher Beweis des Laguerre'schen Theorems über die Anzahl der positiven Wurzeln, welche eine gegebene Zahl übertreffen. No.

Laguerre. Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles. Nouv. Ann. (2) XIX. 161-172, 193-202.

Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung $\mathfrak{F}(x) = 0$, so folgt aus

$$\frac{\mathfrak{F}'^2 - \mathfrak{F}\mathfrak{F}''}{\mathfrak{F}^2} = \frac{1}{(x-x_1)^2} + \frac{1}{(x-x_2)^2} + \cdots,$$

dass, wenn x ein beliebiger Werth ist, alle Wurzeln x_λ entweder grösser als

$$x + \frac{\mathfrak{F}(x)}{\sqrt{\mathfrak{F}'(x)^2 - \mathfrak{F}(x)\mathfrak{F}''(x)}}$$

oder kleiner als

$$x - \frac{\mathfrak{F}(x)}{\sqrt{\mathfrak{F}'(x)^2 - \mathfrak{F}(x)\mathfrak{F}''(x)}}$$

sind. Dieser Satz kann folgendermassen verallgemeinert werden: Liegt x zwischen x_α und $x_{\alpha+1}$, und sind X', X'' die beiden Wurzeln von

$$\left(\frac{\xi-X}{x-X}\right)^2=\sum_{\lambda=1}^{n}\left(\frac{\xi-x_\lambda}{x-x_\lambda}\right)^2,$$

so folgen der Grösse nach geordnet die fünf Werthe x_α, X', x, X'', $x_{\alpha+1}$ aufeinander, wie ξ auch immer gewählt sei. Hieraus kann eine Regel zur näherungsweisen Bestimmung derjenigen Wurzeln einer Gleichung abgeleitet werden, welche einer angenommenen Grösse x die nächsten sind. No.

Ch. Biehler. Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. Nouv. Ann. (2) XIX. 149-153.

Bedeuten A, B zwei gegebene Grössen, für die $\sqrt{A^2+B^2}=1$ ist, so sind alle Wurzeln der Gleichung

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m=A+Bi$$

reell und ungleich. Daraus folgt, dass die Gleichung, welche $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{m}$ liefert, wenn $\operatorname{tg}\alpha$ bekannt ist, reelle ungleiche Wurzeln hat und ebenso, dass die Gleichung, welche $\cos\frac{\alpha}{m}$ liefert, wenn $\cos\alpha$ gegeben ist, reelle Wurzeln besitzt. No.

Laguerre. Sur la détermination d'équations numériques ayant un nombre donné de racines imaginaires. C. R. XC. 180-182.

Der Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(x+1)\frac{dy}{dx}-my=0$$

genügt die Function

$$\mathfrak{F}_m=x^m+m^2x^{m-1}+\frac{m^2(m-1)^2}{1.2}x^{m-2}+\cdots+m.m!x+m!.$$

Die Gleichung

$$V \equiv \mathfrak{F}_n \mathfrak{F}'_m - \mathfrak{F}_m \mathfrak{F}'_n = 0$$

hat nur ungleiche Wurzeln, keine reelle positive, sondern nur $m-n-1$ reelle negative und $2n$ imaginäre Wurzeln.

No.

A. Siebel. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Grunert Arch. LXV. 394-420.

Fortsetzung der Arbeiten, über die F. d. M. VII. 1875. p. 40; IX. 1877. p. 60 referirt ist. Der vorliegende siebente Artikel beschäftigt sich mit der Bestimmung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen und der Zusammenziehung der Intervalle, in denen dieselben liegen. No.

G. de Longchamps. Théorème d'algèbre. Nouv. Ann. (2) XIX. 71-74.

Die von Herrn Laguerre vervollkommnete Maclaurin'sche Regel lautet: „Ist N der absolute Werth des grössten negativen Coefficienten eines Gleichungspolynoms, und sind a_0, a_1 ... a_{p-1} diejenigen positiven Coefficienten, welche dem ersten negativen vorausgehen, so ist

$$1 + \frac{N}{a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1}}$$

eine obere Grenze der positiven Wurzeln dieser Gleichung." Der Herr Verfasser stellt dieser Regel die folgende zur Seite: „Bedeuten N und N' die absoluten Werthe der beiden höchsten negativen Coefficienten, so ist

$$1 + \frac{N+N'}{2a_0 + 2a_1 + \cdots + a_{p-2} + 2a_{p-1}}$$

eine obere Grenze der positiven Wurzeln. No.

S. Réalis. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XIX. 558-562.

Herr Réalis macht darauf aufmerksam, dass nicht, wie gewöhnlich angenommen wird, A. J. H. Vincent, sondern Legendre die Eigenthümlichkeit gewisser Gleichungen zuerst bemerkt hat, welche darin besteht, dass ihre Wurzeln, in Kettenbrüche entwickelt, nach verschiedenen Anfangsgliedern die weitere gleiche Entwickelung liefern. No.

A. Pujet. Sur la fonction résolvante de l'équation
$$x^m + px + q = 0.$$
C. R. XCI. 611-613.

Für jeden Werth von m existirt eine Function, welche von p und q unabhängig ist, und deren Kenntnis die Auflösung aller trinomischen Gleichungen von der Form $x^m + px + q = 0$ ermöglicht. Für $m = 5$ und 6 ist diese Function eine elliptische, für $m > 6$ eine Abel'sche. No.

E. Schröder. Ueber die Eigenschaften der Binomialcoefficienten, welche mit der Auflösung der trinomischen Gleichung zusammenhängen. Schlömilch Z. XXV. 196-207.

Der Herr Verfasser geht von den Reihen
$$P = \sum_{a=0}^{\infty} P_a z^a, \quad P^k = \sum_{a=0}^{\infty} P_a^{(k)} z^a$$
aus und leitet durch Differentialformeln vier Beziehungen recurrenter Art zwischen den Coefficienten $P_a^{(k)}$ her. Wendet man diese auf die Reihenentwicklungen der Wurzel P einer trinomischen Gleichung an, wobei
$$P_a^{(k)} = \frac{k}{a}(a\varrho)_{a-k}$$
wird, so ergeben sich neue Formeln, welche in einfacher Weise auf die von Herrn v. Mangoldt (Inaug. Diss., Berlin 1878) gelieferten Resultate führen. No.

K. E. Hoffmann. Ueber die Auflösung der trinomischen Gleichungen durch kettenbruch-ähnliche Algorithmen. Grunert Arch. LXVI. 33-46.

Für die Auflösung von $x^m+px^n+q=0$ ergeben sich zwei Lösungs-Algorithmen, je nachdem man setzt

$$\text{(A)} \qquad x=\sqrt[n]{\frac{-q}{p+x^{m-n}}}$$

oder

$$\text{(B)} \qquad x=\sqrt[m-n]{-p-\frac{q}{x^n}}$$

und dann das x unter dem Radicanden durch denselben Ausdruck (A) resp. (B) ersetzt denkt u. s. w. Es wird die Realität der Wurzeln der obigen Gleichung bei gegebenem Charakter von m und n (mod. 2) untersucht; dann wird festgestellt, welcher Wurzel (A) oder (B) zustrebt, und von welcher Seite dies geschieht. Alle reelle Wurzeln der trinomischen Gleichungen lassen sich durch die beiden Algorithmen finden und zwar so, dass (A) die in dem Intervall von

$$-\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}} \text{ bis } +\sqrt[m-n]{\frac{np}{m}}$$

liegenden Wurzeln liefert, (B) dagegen zu den übrigen führt.

Die gewonnenen Resultate werden auf eine Formel der Rentenrechnung angewendet. Schliesslich werden einige Identitäten abgeleitet. No.

J. Tetmajer. Auflösungen der trinomischen Gleichungen. Krak. Denkschr. 1880. (Polnisch).

Der Verfasser entwickelt Reihen für die Wurzeln der Gleichung $x^\alpha+px^\beta+q=0$, indem er

$$x = (-q-px^\beta)^{\frac{1}{\alpha}}$$

schreibt und dann die Binomialreihe anwendet. Ob wirklich diese Methode, wie der Verfasser sich ausdrückt, für die Lehrbücher der Trigonometrie besonders geeignet ist, bezweifeln wir sehr. Dn.

S. GÜNTHER. Eine didaktisch wichtige Lösung der trinomischen Gleichung. Hoffmann Z. XI. 68-72.

Nach historischen Notizen über die Lösung der trinomischen Gleichung giebt der Verfasser der Lösung der Gleichung

$$x^{m+n} + ax^m = b$$

folgende Form

$$x = \sqrt[m]{\frac{b}{a + \sqrt[\frac{m}{n}]{\frac{b}{a\sqrt{\frac{b}{a+\cdots}}}}}}$$

Er bespricht sodann die Gestaltung, die diese Form in den speciellen Fällen, wo $\frac{m}{n} = 1$, $m = 1$, $n = 1$, annimmt, und macht zum Schluss auf Uebelstände dieser Lösung, namentlich den Mangel einer leicht nachweisbaren Convergenz u. a. aufmerksam.

O.

---

v. SCHÄWEN. Zur Lösung trinomischer Gleichungen nebst Bemerkungen dazu von S. Günther. Hoffmann Z. XI. 264-267.

Der Verfasser macht auf einige Irrthümer in der Arbeit von Herrn Günther aufmerksam und giebt einige Beispiele zu dessen Methode. Bezüglich der von Herrn Günther selbst besprochenen Uebelstände wird nichts gefördert. O.

ANDR. KJELDGAARD. En tilnärmelsesvis Beregning af de reelle Rödder i Ligningen $x^n + px + q = 0$. Zeuthen Tidsskr. (4) IV. 135-137.

Die angeführte Gleichung wird in die Form $y^n - ay - a$ gebracht. Eine reelle Wurzel lässt sich dann durch successive

Annäherung mittels der Formel

$$y_{r+1} = \sqrt[n]{ay_r + a}$$

bestimmen. Die Rechnung lässt sich bequem mit Hülfe der Gauss'schen Logarithmen ausführen. Gm.

E. Bardey. Bemerkung. Hoffmann Z. XI. 25-28.

V. Hoffmann. Erwiderung. Hoffmann Z. XI. 28-30.

Bezieht sich auf einige im X. Bande der Hoffmann'schen Zeitschrift (s. F. d. M. XI. 1879. p. 64) ausgesprochene Ansichten über Priorität von Sätzen und Benennung von Begriffen, die in einer Arbeit des Herrn Bardey vorkommen. No.

Weitere Lehrsätze und Aufgaben aus der Theorie der Gleichungen von J. O'Regan, J. H. Turrill, Scott, W. H. Lowry finden sich Educ. Times XXXIII. 31, 51.

O.

L. F. M. Ferreira. Sur l'équation du deuxième degré. Teixeira J. II. (Portugiesisch).

Herr Ferreira beschäftigt sich in dieser Notiz mit der geometrischen Lösung der Gleichung zweiten Grades vermittels zweier Tangenten, die von einem äusseren Punkte an eine Parabel gezogen werden, also vermittels eines Problems, das sich mit Zirkel und Lineal lösen lässt. Tx. (O.)

J. Diekmann. Die Grundtypen der lösbaren quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten. Hoffmann Z. XI. 173-183.

Es werden für zwei ganze Functionen zweiten Grades $f(x, y)$ und $F(x, y)$ durch Betrachtung der Discriminante von $f+\lambda F = 0$

Typen aufgefunden, in denen die Lösung des Systems $f = 0$, $F = 0$ von Irrationalitäten dritten Grades unabhängig ist.

No.

H. Gerlach. Ueber reciproke Gleichungen. Pr. Parchim.

Es wird untersucht, wie zwei Gleichungen zweiten Grades zwischen zwei Unbekannten beschaffen sein müssen, damit das Resultat der Elimination einer dieser Unbekannten auf eine reciproke Gleichung vierten Grades führe. Es findet dies z. B. für y statt, wenn beide Gleichungen von der Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \pm 2bx + 2ey + c = 0$$

sind.

No.

A. P. L. Claussen. Trigonometrische Auflösung der quadratischen und cubischen Gleichungen. Schleswig. J. Bergas.

Elementare, mitunter weitschweifige Ableitung der Formeln, nebst vielen durchgeführten Beispielen.

No.

Th. Sinram. Beitrag zu den Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades mit rationalen Wurzeln. Grunert Arch. LXVI. 94-107.

Es werden die allgemeinen Formen für Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades aufgestellt, welche gewissen Vorschriften über Realität und Rationalität ihrer Wurzeln genügen; so z. B. für Gleichungen dritten Grades, welche drei reelle und mindestens eine rationale Wurzel haben, für Gleichungen vierten Grades mit zwei rationalen und zwei imaginären Wurzeln, wenn die eine Wurzel ihrer cubischen Resolvente, durch die Cardani'sche Formel berechnet, rational ist u. s. w.

No.

E. Kummer. Ueber die cubischen und biquadratischen Gleichungen, für welche die zu ihrer Auflösung nöthigen Quadrat- und Cubikwurzelausziehungen alle rational auszuführen sind. Berl. Monatsber. 1880. 930-936.

Alle cubischen Gleichungen mit rationalen Coefficienten, welche eine rationale Wurzel haben, die nach der Cardani'schen Formel sich so finden lässt, dass alle nöthigen Wurzelausziehungen rational ausgeführt werden, haben die drei Wurzeln von der Form α, $\beta+\gamma\sqrt{-3}$, $\beta-\gamma\sqrt{-3}$ und sind demnach alle in der Form

$$x^3-(\alpha+2\beta)x^2+(2\alpha\beta+\beta^2+3\gamma^2)x-\alpha(\beta^2+3\gamma^2) = 0$$

enthalten, wo α, β, γ rationale Grössen sind.

Alle biquadratischen Gleichungen mit rationalen Coefficienten, welche eine rationale Wurzel haben, die nach der allgemeinen Methode der Auflösung der Gleichungen vierten Grades sich so finden lässt, dass alle nöthigen Wurzelausziehungen rational ausgeführt werden können, haben ausser dieser noch eine zweite rationale Wurzel und erfüllen die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass ihre vier Wurzeln von der Form α, β, $\gamma+\delta\sqrt{-3}$, $\gamma-\delta\sqrt{-3}$ sind, wo α, β, γ, δ rationale Grössen bezeichnen; sie sind demnach alle in der Form enthalten

$$x^4-(\alpha+\beta+2\gamma)x^3+(\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2+3\delta^2)x^2$$
$$-[(\alpha+\beta)(\gamma^2+3\delta^2)+2\alpha\beta\gamma]x+\alpha\beta(\gamma^2+3\delta^2) = 0.$$

No.

Franke. Ueber Gleichungen dritten und vierten Grades. Borchardt J. XC. 102-108.

Setzt man in

$$(1) \qquad x^3+ax^2+bx+c = 0$$

$\varrho+i\sigma$ für x, wo ϱ und σ reell sein sollen, so zerfällt die Gleichung in zwei neue; eliminirt man σ, so erhält man eine Gleichung 6ten Grades, welche nur dann reelle Wurzeln hat,

wenn (1) complexe besitzt, so dass die Bedingung für die Realität der Wurzeln von (1) aus der Gleichung

$$(2\sigma)^6 + A_1(2\sigma)^4 + A_2(2\sigma)^2 + A_3 = 0$$

leicht abgeleitet werden kann. Bedeuten x_1, x_2, x_3 die Wurzeln von (1), so wird die Gleichung in σ durch

$$(2\sigma)^2 = -(x_1 - x_2)^2, \quad -(x_2 - x_3)^2, \quad -(x_3 - x_1)^2$$

befriedigt. Aehnlich wird die Gleichung

$$\varrho^3 + a\varrho^2 + \frac{a^2 - b}{4}\varrho + \frac{ab - c}{8} = 0$$

behandelt; ihre Wurzeln sind

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad \frac{x_3 + x_1}{2}.$$

Die Gleichung 4[ten] Grades führt zu entsprechenden Resultaten.

No.

R. Rawson, A. Anderson. Solution of a question (6234). Educ. Times XXXIII. 89.

Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + nx^2 + ax + b = 0$$

sämmtlich reell sind, so ist

$$4bn^3 - a^2n^2 - 18abn + 4a^3 + 27b^2 < 0$$

und eine der Wurzeln kleiner als

$$\tfrac{1}{3}\{2(n^2 - 3a)^{\frac{1}{2}} - n\}.$$

O.

W. Ligowski. Zurückführung der vollständigen Gleichung vierten Grades auf eine reciproke Gleichung zweiten Grades. Grunert Arch. LXV. 426-429.

Die Gleichung

$$4y^2 + (1 - t^2)y + 4 = 0$$

kann durch die Substitution

$$y = (x^2 + \tfrac{1}{2}(a-1)x + s) : (x + v)$$

bei geeigneter Bestimmung von s, v, t mit der allgemeinen Gleichung vierten Grades identificirt werden; t^2 hängt von einer Gleichung dritten Grades ab.

No.

M. Lederer. Ueber eine Auflösung einer biquadratischen Gleichung. Bair. Bl. XVI. 454-455.

Soll man die Gleichung

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$$

auflösen, so hat man nach Aronhold (Heilermann hat übrigens die bezüglichen Formeln schon ein Jahr früher angegeben) die Determinanten

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & b & c+2\lambda \\ b & c-\lambda & d \\ c+2\lambda & d & e \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial\Delta}{\partial e} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}$$

zu bilden, aus ersterer Gleichung λ zu berechnen und in $\frac{\partial\Delta}{\partial e}$ für λ successive einen der drei Wurzelwerthe λ_1, λ_2, λ_3 einzusetzen, wodurch man

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_1, \ \left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_2, \ \left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_3$$

erhält. Sodann ist

$$x=\frac{1}{a}\left(-b\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_1}\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_2}\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)_3}\right).$$

Der Verfasser führt den Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes dadurch, dass er zuerst $x=y-\frac{b}{a}$ setzt und alsdann die Identität der Gleichung $\Delta=0$ mit der gewöhnlichen cubischen Resolvente einer Gleichung des vierten Grades erhärtet.

Gr.

H. Krey. Ueber Hermite's Auflösung der Gleichung fünften Grades. Schlömilch Z. XXV. 129-147.

Die Arbeit giebt eine sehr übersichtliche Darstellung der Hermite'schen Untersuchungen über die Modulargleichung sechsten Grades und die Fünftheilungsgleichung. Vorausgesetzt wird nur die Kenntnis des Transformationsproblems nebst einigen elementaren Formeln der elliptischen Functionen; die benutzten Sätze von Lagrange und Galois werden abgeleitet. No.

J. Tetmajer. Trigonometrische Auflösung binomischer Gleichungen. Krak. Denkschr. 1880. (Polnisch).

Dn.

L. F. M. Ferreira. Sur un problème. Teixeira J. II. (Portugiesisch).

Lösung der Gleichung $x^y = y^x$. Tx. (O.)

Weitere Lösungen specieller Gleichungen von Kniseley, J. L. Kitchin, E. W. Symons, T. R. Terry, J. J. Sylvester finden sich Educ. Times XXXIII. 24, 42, 115.

O.

A. Freeman. Note on the value of the least root of an equation allied to $J_0(z) = 0$. Proc. of Cambr. III. 375-377.

Die Gleichung heisst

$$1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{1^2.2^2} - \frac{x^3}{1^2.2^2.3^2} + \cdots = 0.$$

Poisson giebt im XII. Bande der Mémoires de l'Académie des Sciences (Paris 1833) den Werth der kleinsten Wurzel, den Herr Largeteau für ihn berechnet, gleich 1,46796491. Herr Freeman findet den wahren Werth der Wurzel gleich 1,4457963.

Glr. (O.)

Capitel 2.

Theorie der Formen.

C. Dahl. Bevis for en Sätning af Invarianttheorien. Zeuthen Tidsskr. (4) IV. 154-158.

Beweis des bekannten Satzes von Clebsch, dass jede simultane Invariante eines Systems von linearen Formen sich aus Determi-

nanten zusammensetzen lässt. Der Beweis wird nur für ternäre Formen geführt, kann aber direct erweitert werden. Transformirt man die gegebenen Formen $a_x, b_x, c_x \dots$ mittels der Formeln

$$x_1 = \alpha_y, \; x_2 = \beta_y, \; x_3 = \gamma_y,$$

so erhält man für eine Invariante π die Identität

$$\pi(a', b', c' \dots) = (\alpha\beta\gamma)^n \pi(abc\dots),$$

woraus ersichtlich ist, dass jedes Glied von π $3n$ Factoren enthält. Führt man beiderseits nach einander die folgenden Operationen aus

$$\alpha'_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \beta'_1 \frac{\partial}{\partial\beta_1} + \gamma'_1 \frac{\partial}{\partial\gamma_1},$$
$$\alpha'_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + \beta'_2 \frac{\partial}{\partial\beta_2} + \gamma'_2 \frac{\partial}{\partial\gamma_2},$$
$$\alpha'_3 \frac{\partial}{\partial\alpha_3} + \beta'_3 \frac{\partial}{\partial\beta_3} + \gamma'_3 \frac{\partial}{\partial\gamma_3},$$

so erhält man aus $\pi' = r^n \pi$ eine neue Gleichung $\pi^{IV} = r^{IV}.\pi$. Durch passende Vertauschung der Indices von α', β', γ' und Addition der mit verschiedenen Vorzeichen versehenen Resultate erhält man hieraus die neue Identität $\pi^V = r^V.\pi$. Hier zeigt es sich, dass erstens

$$r^V = n(n+1)(n+2)r^n,$$

zweitens dass π^V sich in Glieder spaltet, von welchen jedes einen Factor von der Form $r(abc)$ enthält, während der andere Factor eine Invariante von niedrigerer Ordnung ist, welche auf ähnliche Weise behandelt werden kann. Sodann nimmt π endlich die Form einer rationalen Function von Determinanten (abc) an. Gm.

Faa de Bruno. Sur un théorème général dans la théorie des covariants. C. R. XC. 1203-1205.

Faa de Bruno. Sur quelques théorèmes relatifs au développement des fonctions et aux covariants. Borchardt J. XC. 186-188.

Faa de Bruno. Notes on modern algebra. Am. J. III. 154-164.

Die beiden ersten Noten, sowie der erste Theil der dritten Arbeit behandeln eine eigenthümliche Darstellung der Covarianten. Als Ausgang dient ein Satz, der wohl, wie auch Herr Sylvester kürzlich (Am. J. II. p. 357) zugiebt, vom Herrn Verfasser herrührt (Théorie des formes binaires, 1875. p. 311).

„Hat man eine Function von x

$$\Phi = \varphi[A_0, A_1, \dots A_i],$$

wo

$$A_k = a_k + k a_{k-1} x + \cdots a_0 x^k,$$

so hat man

$$\Phi = \varphi + x\delta\varphi + \frac{x^2}{1.2}\delta^2\varphi + \cdots \frac{x^i}{1.2\dots i}\delta^i\varphi + \cdots = e^{\delta x}\varphi,$$

wo δ das bekannte Symbol darstellt

$$\delta = a_0\frac{d}{da_1} + 2a_1\frac{d}{da_2} + 3a_2\frac{d}{da_3} + \cdots,$$

hier noch mit der Voraussetzung, dass nach den Differentiationen $x = 0$ zu setzen ist."

Es erfolgt ein neuer, höchst einfacher Beweis dieses Satzes, der sofort aus der MacLaurin'schen Entwickelung von Φ entspringt.

Andrerseits gilt aber ein ähnlicher Satz für die Covarianten einer binären Form (cf. Faà de Bruno's Werk p. 188), denn für die Coefficienten c einer Covariante

$$\varphi = (c_0, \dots c_m)\widehat{\ }(x, y)^m$$

einer Form

$$f = (a_0, \dots a_n)\widehat{\ }(x, y)^n$$

gelten die Beziehungen

$$\delta c_k = k c_{k-1}, \quad \delta_1 c_k = (m-k)c_{k+1},$$

wo δ_1 das reciproke Symbol

$$\delta_1 = a_n\frac{d}{da_{n-1}} + 2a_{n-1}\frac{d}{da_{n-2}} + \cdots n a_1\frac{d}{da_0}$$

vorstellt. Daraus folgen aber die Darstellungen

$$\varphi = e^{\delta x}c_m, \quad \varphi = e^{\delta_1 x}c_0.$$

Durch Vergleich mit dem obigen Satze erhält man den neuen:

„Jede Covariante φ kann aus ihrem letztem Term (c_m resp. c_0) abgeleitet werden, sobald man die a_i durch die resp. A_i ersetzt.“

Man kann diesen Satz aber in eine noch einfachere Form bringen, wenn man (cf. des Herrn Verfassers Werk, p. 130) bemerkt, dass

$$A_n = e^{x\delta} a_n, \quad A_i = e^{x\delta} a_i,$$

sowie

$$A_{i-1} = \frac{1}{i} \delta A_i, \quad A_{i-2} = \frac{1}{i(i-1)} \delta^2 A_i \text{ etc.}$$

Dann folgt:

„Alle Covarianten einer Form können als symbolische Functionen eines einzigen Parameters (a_n resp. a_0) dargestellt werden.“

f selbst ist in dieser Form $= e^{\delta x} a_n$.

Die dritte Arbeit leitet sodann, unabhängig vom ersten Theil, einen sehr fruchtbaren Determinantensatz ab. Ist nämlich $\varDelta$ irgend ein Differentiationssymbol, und sind in der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} A, & \varDelta A, & \varDelta^2 A, \ldots & \varDelta^n A \\ B, & \varDelta B, & \varDelta^2 B, \ldots & \varDelta^n B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \end{vmatrix}$$

die Glieder der letzten Colonne constant in Bezug auf $\varDelta$, so ist

$$\varDelta D = 0.$$

Es folgt dies sogleich aus den Differentiationsregeln für Determinanten. Wichtige Beispiele erläutern den Satz. Um eins anzuführen, so ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} xyz, & xy+yz+zx, & x+y+z, & 1 \\ yzt, & \cdot & \cdot & \cdot \\ ztx, & \cdot & \cdot & \cdot \\ txy, & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

das Differenzenproduct der vier Grössen x, y, z, t.

Im dritten Theil giebt der Herr Verfasser einen nicht-symbolischen Beweis des bekannten Satzes (cf. Clebsch, Binäre Formen, p. 119), dass das Quadrat der Functionaldeterminante zweier Formen eine quadratische homogene Function der Formen selbst ist, nebst Beispielen.

Am Schluss wird die Gleichung fünften Grades für den Fall, dass ihre Invariante 18ter Ordnung verschwindet, aufgelöst.

My.

W. Braun. Zur Berechnung der Doppelwurzel einer binären Form. Bair. Bl. XVI. 449-454.

Wenn

$$U = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),$$

so besteht eine Doppelwurzel, falls die Discriminante Δ identisch gleich Null wird; jene Doppelwurzel $\alpha_1 = \alpha_2$ zu berechnen, hat man die Proportionenkette

$$\alpha_1^{n-1} : \alpha_1^{n-2} : \cdots \alpha_1 : 1 = \frac{\partial \Delta}{\partial a_1} : \frac{\partial \Delta}{\partial a_2} : \cdots : \frac{\partial \Delta}{\partial a_{n-1}} : \frac{\partial \Delta}{\partial a_n}.$$

Für diese Relation wird ein neuer Beweis mitgetheilt, der auf ziemlich complicirten Determinanten-Umformungen beruht.

Gr.

F. Franklin. On the calculation of the generating function and tables of groundforms for binary quantics. Am. J. III. 128-154.

Uebersichtliche Zusammenstellung der von Sylvester und Cayley gegebenen Berechnungsmethoden der generating functions, über die F. d. M. X. 1878. p. 88 und XI. 1879. p. 81 ff. im Einzelnen referirt worden ist.

My.

A. Cayley. On the finite groups of linear transformations of a variable. Correction to this paper. Clebsch Ann. XVI. 260-264, 439-440.

Die Note knüpft an den Aufsatz des Herrn Gordan: „Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen" (Clebsch Ann. XII., cf. F. d. M. IX. 1877. p. 78) an. Dort ist wohl die Gruppe der 24, nicht aber die Gruppe der 60 Transformationen grade in einer solchen Form aufgestellt,

die erkennen lässt, dass die Gruppe der 12 Transformationen in beiden enthalten ist. Dieses leistet die Note des Herrn Verfassers und constatirt zugleich die Identität der „60." Gruppe mit der der positiven Permutationen von fünf Elementen. Diesen entsprechend, werden die drei Tabellen für die drei Gruppen übersichtlich zusammengestellt.

Ein Irrthum in der Anordnung einer Tabelle wird berichtigt.

My.

L. Wedekind. Das Doppelverhältnis und die absolute Invariante binärer biquadratischer Formen. Clebsch Ann. XVII. 1-20.

Herr Klein hat in seiner Erlanger Programmschrift 1872 (cf. F. d. M. IV. p. 229) darauf hingewiesen, dass die Theorie der binären Formen complexer Variabeln sich mittels der stereographischen Projection deckt mit der reellen räumlich-projectivischen Massgeometrie mit reeller Fundamentalkugel; später (Erlanger Ber. Nov. 1873) hat er an Stelle der Kugel eine reelle, nicht geradlinige Fläche zweiter Ordnung substituirt. Es ist damit die Interpretation der binären complexen Formen auf der Fläche zweiter Ordnung angezeigt, und in diesem Sinne ist die Arbeit des Herrn Verfassers eine Fortsetzung und Ergänzung von zwei früheren: „Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen" (Clebsch Ann. IX.) und „Studien im binären Werthgebiet", Karlsruhe 1876 (cf. F. d. M. VIII. 1876. p. 60).

Da die Fläche nicht geradlinig ist, muss ihre Discriminante negativ sein; darum wird die Bedingung aufgestellt, dass die auf ein eingeschriebenes Coordinatentetraeder bezogene Fläche zweiter Ordnung nicht geradlinig sei, und zwar, wenn $\Sigma a_{ik} y_i y_k = 0$ ihre Gleichung ist, müssen die drei Producte $a_{ik} a_{lm}$ gleiches Vorzeichen haben und aus den absoluten Längen $\sqrt{a_{ik} \cdot a_{lm}}$ muss sich ein reales Dreieck construiren lassen.

Für die sechs Doppelverhältnisse von vier Werthen wird eine bequeme trigonometrische Interpretation gebraucht: Es sind die Quadrate der sechs trigonometrischen Functionen (abgesehen

von einigen Vorzeichen). Der zugehörige Winkel kann geometrisch leicht construirt werden. Es erfolgt seine Uebertragung auf die Fläche. Als weitere Beispiele dienen der Modul des elliptischen Integrals und die Jacobi'sche Construction des Additionstheorems der elliptischen Functionen, zum Schluss die absolute Invariante der biquadratischen Form. Als Hülfsform tritt dabei eine cubische binäre Form auf, die, wenn $a_x^2 = b_x^2 = 0$ die Fläche darstellt und ξ, η, ζ, ϑ vier ihrer Punkte, zu Wurzeln die Invarianten

$$a_\xi a_\eta . b_\zeta b_\vartheta, \quad a_\xi a_\zeta . b_\vartheta b_\eta, \quad a_\xi a_\vartheta . b_\eta b_\zeta$$

besitzt. Verschwindet deren quadratische Covariante identisch, so liegen die vier Punkte äquianharmonisch; verschwindet ihre Discriminante nebst der der Fläche, so liegen sie harmonisch.

My.

A. Cayley. On the theorem of the finite number of the covariants of a binary quantic. Quart. J. XVII. 137-147.

Der angegebene Satz wird von einem andern Standpunkt als gewöhnlich betrachtet. Der Herr Verfasser geht von der Wurzelform

$$\frac{1}{a}(a, b, \ldots)(x, y)^n = (x-\alpha)(x-\beta) \ldots$$

aus und bezeichnet als „monomiale" Form einer Covariante die folgende:

$$(\alpha-\beta)^m(\alpha-\gamma)^n(\beta-\gamma)^p \ldots (x-\alpha)^q(x-\beta)^r \ldots,$$

wo in allen Factoren, die z. B. α enthalten, die Summe der Indices einen Werth ϑ hat, der sich nicht ändert, wenn man statt α eine andere Wurzel betrachtet. Es sind z. B.

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta), \quad (\alpha-\gamma)(\beta-\delta), \quad (\alpha-\delta)(\beta-\gamma)$$

solche monomialen Invarianten einer Quartic.

Dann wird gezeigt, (A) dass die Zahl der irreduciblen monomialen Covarianten endlich ist.

Weiter wird ein unbewiesenes Hülfstheorem (B) mitgetheilt: „Wenn ein unendliches System von ganzen und rationalen Functionen der endlichen Buchstabenreihe $(a, b, c, \ldots)$ sich nicht

ändert bei allen Substitutionen irgend einer Gruppe $\zeta(a, b, c, \dots)$, so schliesst es eine endliche Zahl von solchen Functionen σ ein, dass jede andere des Systems sich durch diese ganz und rational ausdrückt."

Daraus folgt die Endlichkeit des Formensystems der Quartic, so dass der Beweis dafür auf den Beweis von (B) reducirt ist.

So hat man, um den Satz (B) zu illustriren, für eine Quartic $(x-\alpha)\dots(x-\delta)$ sechs monomiale Invarianten (die oben angegebenen mit doppeltem Vorzeichen); sie seien $a, b, \dots h$. Eine wirkliche Invariante muss dann eine solche rationale ganze Function von $a, b, \dots h$ sein, dass sie zugleich eine symmetrische Function von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist, d. h. dass sie sich bei keiner der 24 Substitutionen, die auf die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausgeübt werden, ändert. Nun zeigt sich, dass diese 24 Substitutionen, in $a, b, \dots h$ eingeführt, congruent sind mit einer Gruppe von sechs Substitutionen, die auf $a, b, \dots h$ ausgeübt werden. Dann aber giebt es nach (B) eine endliche Zahl von Formen σ, und da $a+b+c=0$, so sind diese in der That

$$bc+ab+ca \quad \text{und} \quad (b-c)(c-a)(a-b),$$

d. h. die wirklichen Invarianten der Quartic sind rationale ganze Functionen der Invarianten i, j.

Den Beweis des Satzes (A) führt der Herr Verfasser mittels einer eigenthümlichen graphischen Darstellung der monomialen Invarianten, indem die Potenzen der einzelnen Differenzen $(\alpha-\beta)$ etc. als Elemente einer symmetrischen Determinante auftreten.

My.

C. LE PAIGE. Note sur certains covariants des formes algébriques binaires. Bull. de Belg. (2) XLIX. 113-125.

F. FOLIE. Rapport sur le mémoire de M. Le Paige. Bull. de Belg. (2) XLIX. 91-92.

Das Quadrat der Covariante

$$\Delta(a, b, \dots l) a_x^{k+1} b_x^{k+1} \dots l_x^{k+1}$$

von $n-k$ Formen grader (oder ungrader) Ordnung $a_x^n, b_x^n, \dots l_x^n$

ist eine quadratische (oder lineare) Function der Covarianten

$$\Delta(a, b, \dots l)_{k+1}(a_x^{n-k} b_x^{n-k} \dots l_x^{n-k})_{k+1}.$$

Für $k = 0$ ergiebt sich ein Satz von Rosanes.

Mn. (O.)

C. Le Paige. Sur la représentation géométrique des covariants d'une forme biquadratique. Bull. de Belg. (2) L. 115-121.

Mn.

Julius Petersen. Om binäre Formers Kovarianter. Zeuthen Tidsskr. (4) IV. 177-190.

Anfang einer Abhandlung, über welche ein vollständiges Referat im nächsten Jahrgang gegeben werden soll.

Gm.

E. Bonsdorff. Method att utreckta relationer emellan binäre formers covarianter (resp. invarianter). Act. S. Fenn. XI.

M. L.

E. Bonsdorff. Om binära formers discriminanter. Act. S. Fenn. XI.

M. L.

E. Winter. Ueber das simultane Formensystem einer binären Form zweiter Ordnung. Pr. Darmstadt. Brill.

Nach den von Clebsch und Gordan gegebenen Regeln entwickelt. Ausser den zwei Formen der letzteren (φ) und den 23 der ersteren (ψ) ergeben sich zunächst 50 Ueberschiebungen von Potenzen von φ über Covarianten von ψ; ausserdem noch 57 solche Ueberschiebungen über Producte von Covarianten von ψ. Diese letzteren 57 werden bis auf 19 reducirt.

Doch können noch weitere unter diesen Formen reducibel sein.

My.

E. d'Ovidio. La relazione fra gli otto invarianti fondamentali di due forme binarie biquadratiche.
Atti di Torino. XV. 471-488.

Zwischen den acht fundamentalen simultanen Invarianten

$$i_f,\ i_\varphi,\ j_f,\ j_\varphi,\ A_\psi,\ B_\psi,\ C_\psi,\ D_\psi$$

zweier biquadratischer binärer Formen (cfr. Bertini, Battaglini G. XIV. p. 1 und Clebsch Ann. XI. p. 30, siehe F. d. M. VIII. 1876. p. 59, IX. 1877. p. 81) muss, einem allgemeinen Satz zufolge (Clebsch „Binäre Formen" p. 79) eine Relation bestehen. Diese hatte Bertini a. a. O. aufgestellt, indem er die 16 simultanen Invarianten der vier quadratischen Covarianten A_3 B_3 C_3 D_3 durch die acht fundamentalen Invarianten ausdrückte, und diese Werthe in eine von Clebsch (a. a. O. p. 207) gegebene Formel einsetzte.

Der Berechnung jener 16 Invarianten liegt eine Identität zu Grunde, die leider, wie Herr d'Ovidio nachweist, mit einem Rechenfehler behaftet ist, so dass alle weiteren Ausdrücke ungenau sind.

Der Herr Verfasser unternimmt diese Rechnung auf's Neue und kommt auf verschiedene Weisen zu der gesuchten Relation:

$$\begin{aligned}&R\varrho+108[4D^3-(AD-BC)^2]-3i_f^2 i_\varphi^2 A^2\\ &+18[2A^2D+4ABC-6D^2]i_f i_\varphi-18(i_f i_\varphi+12D)(i_f B^2+i_\varphi C^2)\\ &+24[2A^3-9(AD+BC)j_f j_\varphi+144(j_f B^3+j_\varphi C^3)\\ &+36A(i_f^3 j_\varphi B+j_f^3 i_\varphi C)+72(3D-A^2)(j_f i_\varphi B+i_f j_\varphi C)=0,\end{aligned}$$

wo

$$R=i_f^3-6j_f^2,\quad \varrho=i_\varphi^3-6j_\varphi^2$$

und bei den A, B, C, D der Index ψ weggelassen ist.

My.

E. d'Ovidio. Sopra due covarianti simultanei di due forme binarie biquadratiche. Atti di Torino XV. 301-304.

E. d'Ovidio. Il risultante di due forme binarie biquadratiche espresso mediante i loro invarianti fondamentali. Atti di Torino XV. 385-389.

Herr Sylvester hat gezeigt (C. R. LXXXIV. p. 1285, siehe

F. d. M. IX. 1877. p. 76), dass von den dreissig Gordan'schen simultanen Bildungen zweier binärer biquadratischer Formen (dem vollen System) zwei reducibel sind, eine Covariante sechsten Grades (D_1) und eine vierten Grades (D_2).

Der Herr Verfasser führt in der ersten Note diese Zerlegung der beiden Covarianten D_1, D_2 aus, indem er sich einer andern Methode dazu bedient, als Herr Sylvester. In der zweiten Note wird auf zwei verschiedene Weisen (das zweite Mal sehr schnell mittels der Gleichung $\delta R = 0$, wo die Operation

$$\delta = \frac{d}{da_0}\alpha_0 + \frac{d}{da_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{d}{da_4}\alpha_4$$

auf die Resultante R angewandt wird) die Relation abgeleitet

$$R = 3(i_f^2 i_\varphi^2 + A^4) + 24(D i_f i_\varphi + A^2 D) - 10 A^2 i_f i_\varphi$$
$$+ 96(A j_f j_\varphi - B i_\varphi j_f - C i_f j_\varphi + B^2 i_f + C^2 i_\varphi - ABC) - 144 D^2.$$

Ueber die Bezeichnungen vgl. das obige Referat.

My.

E. d'Ovidio. Nota sui covarianti lineari fondamentali di due cubiche binarie. Atti di Torino XV. 267-270.

Herr Sylvester hat (C. R. LXXIX. p. 828, cfr. F. d. M. XI. 1879. p. 84) gezeigt, dass von den bis dahin als irreducibel geltenden acht linearen simultanen Covarianten zweier Cubics es zwei in der That nicht sind. Unter dieser Voraussetzung hat der Herr Verfasser ihre Zusammensetzung abgeleitet, indem er die darin zuerst auftretenden unbekannten Coefficienten mittels specieller Annahme der Cubics bestimmt.

Eine zweite directere symbolische Methode, die jene Voraussetzung nicht macht, hat Herr D'Ovidio als von Herrn Gerbaldi herrührend, am Schluss angegeben.

Die beiden fraglichen Covarianten sind die von den resp. Graden 3, 4 und 4, 3 in den Coefficienten der Cubics.

My.

E. D'OVIDIO. Nota sulle forme binarie del 5^0 ordine. Atti di Torino. XV. 591-612.

Es wird eine grosse Zahl von Relationen zwischen den Formen des vollen Systems (den 23 Co- und Invarianten, siehe Clebsch, Binäre Formen § 73 etc.) und weiteren invarianten Formen aufgestellt.

Der Werth der Discriminante A^2-64B wird directer abgeleitet als bei Clebsch (mit Bezug auf die Arbeit des Herrn Verfassers über die Resultante zweier biquadratischer binärer Formen siehe obiges Referat).

Mit Bezug auf seine andere Arbeit (siehe obiges Referat) über die Relation zwischen den acht Fundamentalinvarianten zweier biquadratischer binärer Formen erhält er die wichtige Relation

$$3C+M-2AB=0.$$

Die Bedingungen für vielfache Wurzeln der gegebenen Form werden durch das Verschwinden von Invarianten gegeben. Endlich wird die Hauptformel der Arbeit des Herrn Verfassers „Estensione di alcuni teoremi sulle forme binarie" (Atti di Torino XIV. 963, siehe F. d. M. XI. 1879. p. 86) benutzt, um eine weitere neue Reihe von Relationen abzuleiten. My.

VON GALL. Das vollständige Formensystem einer binären Form achter Ordnung. Clebsch Ann. XVII. 31-52, 139-152.

VON GALL. Auszug aus einem Briefe an die Redaction. Clebsch Ann. XVI. 456.

Herr Gordan in seinem Erlanger Programm 1875 (F. d. M. VII. 1875. p. 50) folgert aus seinen allgemeinen Betrachtungen für binäre Formen achter Ordnung f, dass das volle System erhalten wird durch Combinirung (Ueberschiebung) der Formen

$$f,\ (ff)^6,\ ((ff)^6,f)^?,\ k=(ff)^4,\ (f,k),\ ((ff)^6,k),\ (f,k)^2,\ (f,k)^3$$

mit dem vollen System der biquadratischen Form $(ff)^6$, indem man ausserdem noch die Invariante $(f,f)^8$ zufügt.

Die Rechnungen sind vom Herrn Verfasser nach den von

Herrn Gordan a. a. O. angegebenen allgemeinen Regeln ausgeführt.

Das ganze System von Formen (vom ersten bis zum 17ten Grade) wird am Ende der ersten Arbeit zusammengestellt. Eine Anmerkung der Redaction giebt an, dass dem Herrn Verfasser die neueren Sylvester'schen Untersuchungen im Am. J., wo Bd. II. p. 223 abweichend vom Herrn Verfasser die Zahl der Grundformen auf 70 nebst Grad und Ordnung angegeben ist, unzugänglich gewesen sind.

Die zweite Arbeit des Herrn Verfassers bringt, nach Kenntnisnahme der Sylvester'schen Arbeiten, Modificationen der ersten. Eine ziemliche Anzahl von aufgestellten Formen erweisen sich als reducibel. Die Differenz zwischen Herrn Sylvester und Herrn von Gall besteht nur noch darin, dass Herr von Gall drei Sylvester'sche Formen ausscheidet, und umgekehrt eine von Herrn Sylvester ausgeschiedene Form nicht reduciren kann.

In dem Briefe an die Redaction giebt Herr von Gall einen Irrthum zu, dessen Verbesserung zur Folge hat, dass die eben erwähnten drei Sylvester'schen Formen in der That irreducibel sind.

Also bleibt noch eine Differenz in einer Form.

My.

B. Igel. Wann ist eine binäre Form m^{ter} Ordnung Theiler einer binären Form n^{ter} Ordnung. Wien. Ber. 1880.

Clebsch stellt in seinem Buche (Theorie der binären algebraischen Formen p. 91) als Bedingung dafür, dass eine Form n^{ter} Ordnung eine solche zweiter Ordnung ganz als Factor enthalte, eine identisch verschwindende Covariante auf, deren Abhängigkeit von den gegebenen Formen nicht deutlich ist.

Der Herr Verfasser stellt nun die Coefficienten dieser Covariante, resp. der einem Theiler m^{ter} Ordnung entsprechenden, als Resultanten von je zwei Gleichungen eines Gleichungssystems auf, das mit den gegebenen Formen in engerem Zusammenhange steht.

Von den verschiedenen dabei möglichen Methoden verdient namentlich eine hervorgehoben zu werden, welche das elegante Eliminationsprincip des Herrn König (Clebsch Ann. XV. p. 168, F. d. M. XI. 1879. p. 62) zu Grunde legt.

Ist diese Aufgabe einmal für den Fall $m = n-1$ gelöst, so ergiebt sich daraus leicht die Beantwortung der allgemeineren.

My.

J. J. Sylvester. On certain ternary cubic form equations. Am. J. III. 58-89, 179-190.

Fortsetzung der Untersuchungen (cfr. F. d. M. XI. 1879). Das Referat kann erst nach Abschluss derselben erfolgen.

My.

F. Gerbaldi. Nota sopra il significato geometrico del covariante di 9° ordine di una forma cubica ternaria. Atti di Torino XV. 707-714.

Die Note schliesst sich an die bekannte Arbeit von Clebsch und Gordan an: „Ueber cubische ternäre Formen", Clebsch Ann. Bd. VI. (siehe F. d. M. V. 1873. p. 91), und behandelt die wichtige Covariante Ω neunten Grades (in den Variabeln). Von der canonischen Form ausgehend, hat Clebsch gezeigt, dass $\Omega = 0$ die neun harmonischen Geraden der Wendepunkte darstellt. Dies wird hier mittels der Symbolik aus der allgemeinen cubischen Form abgeleitet, und zwar ergiebt sich, dass Ω aus einer einfachen binären Invariante $\overline{\Omega}$ mittels des Uebertragungsprincips hervorgeht. Aus der bekannten Eigenschaft von $\overline{\Omega} = 0$ (worüber Clebsch, „Binäre Formen" § 100) folgt die Bedeutung von $\Omega = 0$.

Endlich wird Ω in verschiedene für die Geometrie wichtige Formen gebracht und zum Schluss durch die Symbole der Grundform allein dargestellt, und zwar, wenn $f = a_x^3 = b_x^3 = \cdots$ die letztere, so ist

$$\Omega = 3(def)^2\,(ghk)\,(gha)\,(gkb)\,(lmn)\,(lmc)\,(lnf)\,(mnk)\,a_x^2 b_x^2\, c_x^3\, d_x e_x h_x.$$

My.

P. Gordan. Ueber das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. Clebsch Ann. XVII. 217-234.

P. Gordan. Typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. Clebsch Ann. XVII. 359-379.

Trotzdem es Herrn Gordan schon seit einiger Zeit gelungen war, die Endlichkeit des zu den ternären biquadratischen Formen gehörigen Systems nachzuweisen (cf. Clebsch-Lindemann p. 174 Note), so verhinderte die zu grosse Zahl der Formen eine wirkliche Aufstellung derselben. Erst das Auftreten der im Titel angegebenen Form in den Untersuchungen des Herrn Klein (Clebsch Ann. XIV. XV.) veranlasste den Herrn Verfasser, seine Untersuchungen wieder aufzunehmen und für diese Form, die durch 168 lineare Transformationen in sich übergeht und nur vier linear unabhängige Covarianten besitzt, das volle System aufzustellen. Später zeigt es sich, dass diese specielle Form f aus der allgemeinen durch Festsetzung einer ganz bestimmten Covariantenrelation hervorgeht.

Der erste Theil der ersten Arbeit überträgt die im Erlanger Programm 1875 (cf. F. d. M. VII. p. 50) vom Herrn Verfasser für binäre Formen aufgestellten Methoden auf ternäre. Als Grundoperationen treten auch hier der Ueberschiebungs- und Faltungsprocess auf. Sind zwei ternäre Formen in allgemeinster Weise zu Grunde gelegt

$$A = a_x^r u_\alpha^s, \quad B = b_x^\varrho u_\beta^\sigma,$$

so ist jede in den Coefficienten von A, B bilineare invariante Bildung eine Ueberschiebung; symbolisch ist sie dargestellt durch

$$u = a_\beta^{r_1} b_\alpha^{r_2} (abu)^{r_3} (\alpha\beta x)^{r_4} a_x^{r_5} b_x^{r_6} u_\alpha^{r_7} u_\beta^{r_8},$$

(wo natürlich $r_1 + r_3 + r_5 = r$ etc.).

Ersetzt man im Producte

$$A . B = a_x^r u_\alpha^s . b_x^\varrho u_\beta^\sigma$$

irgend welche Factorenpaare

$$a_\alpha u_\beta \quad b_x u_\alpha \quad a_x b_x \quad u_\alpha u_\beta,$$

resp. durch

$$a_\beta \quad b_\alpha \quad (abu) \quad (\alpha\beta x),$$

so erhält man eine neue „gefaltete Form". Besonders wichtig sind die Faltungen von A resp. B allein

$$A_\lambda \equiv a_\alpha^\lambda\, a_x^{r-\lambda}\, u_\beta^{s-\lambda},$$

entsprechend

$$B_\lambda \equiv b_\beta^\lambda\, b_x^{\varrho-\lambda}\, u_\beta^{\sigma-\lambda}.$$

Irgend eine Ueberschiebung u ist ein Aggregat symbolischer Producte („Glieder" von u). Von diesen gilt der fundamentale Satz: „Irgend ein solches Glied ist ersetzbar durch ein anderes Glied von u und Glieder niederer Ueberschiebungen."

Speciell für die biquadratischen Formen ist der Umstand massgebend, dass sie eine einfache Covariante vierter Classe besitzen, und zwar, wenn $f = a_x^4$, so ist sie $\varphi = 2(abu)^4 = u_\gamma^4$. Denn es zeigt sich als sehr fruchtbar, sowohl die Symbole von f als zugleich die von φ einzuführen. Die zu f gehörigen Bildungen zerfallen demnach in drei Classen, je nachdem sie die eine oder die andere Symbolreihe oder beide enthalten (dies sind die Systeme S_1, S_2, S_3).

Zugleich erweist sich die Einführung des neuen Begriffs „Reducent" als nothwendig. Dies ist ein Ausdruck, der beide Symbolreihen enthält, von der Eigenschaft, dass alle symbolischen Producte, die ihn zum Factor haben, und in denen nur die Symbole des Reducenten vorkommen, Aggregate von Formen sind, die „entweder eine Invariante als Factor haben oder aus weniger Symbolen bestehen."

Von den drei Systemen S wird das erste (mit den Symbolen von f) für eine ganz allgemeine Form f aufgestellt.

Es zerfällt in die aus dem binären Gebiet herübergenommenen Formen (an Zahl 4, da ja φ auszulassen ist) und die Formen mit 3, 4 ... Symbolen. Unter denen befinden sich nur zwei irreducibele

$$\varDelta = \tfrac{16}{3}(abc)^2\, a_x^2 b_x^2 c_x^2 \quad \text{(drei Symbole)}$$
$$(\varDelta f u) \quad \text{(vier Symbole).}$$

Mithin besteht S_1 (incl. f) aus sechs Formen.

S_2 und S_3 werden nur für die specielle Form f aufgestellt. Es zeigt sich, dass für f die Relation gilt

$$f_\varphi^2 - \frac{i}{\gamma} u_x^2 = 0,$$

wo i die Invariante $\frac{1}{3} f_\varphi^4 = 1$ ist. Umgekehrt (wie in der zweiten Arbeit gezeigt wird) definirt diese Relation die specielle Form. Dass für diese die Aufstellung des Systems noch gelingt, liegt in der Eigenschaft (wie aus jener Relation folgt), dass „if gradeso von φ abhängt wie φ von f." So ergiebt sich, dass das System S_2 nur drei irreducible Formen aufweist: φ, H, L, wo H, L die Formen Δ, $(f, \Delta u)$ sind, nur in Bezug auf φ genommen. Die grösste Schwierigkeit bereitet das System S_3, das durch geeignete Combination von S_1 und S_2 construirt wird, d. h. es werden je aus S_1 und S_2 alle möglichen symbolischen Producte A resp. B gebildet und dann das Product $A.B$ gefaltet, so dass bei jeder Faltung ein Factor von A und einer von B verwendet wird. Das Zahlensystem, das angiebt, wie viel Faltungen zu einer bestimmten Form P führten, wird als Characteristikensystem von P aufgefasst und die Formen P nach diesem geordnet.

So ergeben sich, alles zusammengefasst, 54 Bildungen, die das volle System der speciellen Form f repräsentiren. Während alle anderen Formen sich aus diesen ganz darstellen lassen, bringt die zweite Arbeit die associirten Formen, durch die alle andern sich rational darstellen.

Diese associirten Formen sind: f selbst, eine Invariante i, drei Covarianten (vom Grade 6, 14, 21) und sechs lineare Zwischenformen. Es geht dies schon aus einer früheren Arbeit der Herren Clebsch und Gordan: „Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen" (Clebsch Ann. I., s. F. d. M. II. 1869. p. 64) hervor. Im Uebrigen zeigt sich eine gewisse Analogie zwischen den cubischen und biquadratischen Formen, namentlich entsprechen drei charakteristischen linearen Zwischenformen N, L, M dort drei bestimmte, hier p, q, r, (wo p, q vom niedrigsten Grade 8, resp. 9 sind). Die Hauptaufgabe ist daher jetzt eine andere, wie früher. Es soll jetzt irgend eine Form durch die gegebenen associirten Formen ausgedrückt werden.

Diese Aufgabe formt sich aber sofort um in eine andere. Denkt man sich irgend eine Form Π, die neue Symbole von f enthält, mit einer solchen Potenz $(pqx)^a$ multiplicirt, dass auf jeden Factor (abu), resp. (abc) ein Factor (pqx) kommt, so gelangt man mittels der bekannten Umformung der Determinantenproducte $(abu)(pqx)$, $(abc)(pqx)$ sofort zu dem Satze, dass $\Pi(pqx)^a$ eine ganze Function von f und der nach p, q genommenen ersten 14 Polaren $f_p f_q \dots f_{q^4}$ ist.

Es sind also nur noch (pqx), nebst diesen Polaren durch die associirten Formen auszudrücken. Und da (pqx) und die Polaren nur die x enthalten, sind sie ganze Functionen von f, der Invariante i und den drei Covarianten. Diese Berechnung wird im ersten Theile geleistet.

Dann erfolgt die schon erwähnte Charakterisirung von f durch die angegebene Covariantenrelation mit Hülfe der expliciten Darstellung der associirten Formen.

Es zeigt sich dabei, dass, geometrisch gesprochen, $f=0$ eine Curve vierter Ordnung darstellt, die in den Ecken des Coordinatendreiecks Wendepunkte hat; zugleich sind die Seiten Wendetangenten. Entspricht u_x einem Eckpunkt, so entsprechen die Zwischenformen q, r den beiden andern.

Sodann wird das Klein'sche „Fundamentalproblem" erledigt (mit Hülfe einiger von Herrn Klein gegebenen Formeln): „x_1, x_2, x_3 zu berechnen, wenn $f=0$ und die drei canonischen Covarianten numerisch gegeben sind." Sie stellen sich als elliptische Functionen dar.

Das „Fundamentalproblem" wird noch erweitert, indem f nicht gleich 0, sondern auch numerisch gegeben ist, während das Uebrige bleibt. Die sieben zur Lösung erforderlichen Operationen werden am Ende übersichtlich zusammengestellt. My.

A. Capelli. Sopra le forme ternarie a più serie di variabili. Battaglini G. XVIII. 17-34.

Herr Gordan legt in seinem bekannten Erlanger Programm (siehe F. d. M. VII. 1875. p. 50) seinen Untersuchungen

über das Formensystem binärer Formen den Satz zu Grunde, dass man eine solche Form mit mehreren Reihen Veränderlicher $x_1 x_2$; $y_1 y_2$; $z_1 z_2$; etc. nach Potenzen und Producten der Determinanten $(xy)(xz)\ldots$ in eine Reihe entwickeln kann, deren Coefficienten aus Formen mit nur einer Reihe von Variabeln durch den Polarenprocess ableitbar sind. Im Anhang deutet Herr Gordan an, wie diese Reihenentwickelungen auf ternäre, ... Formen mit mehreren Reihen Variabler auszudehnen sein würden.

Diese Ausdehnung auf solche beliebig hohe Formen leistet Herr Capelli für den einfachsten Fall, dass die vorkommenden Variabeln nur Punktvariabeln sind

$$(x_1, x_2, x_3 : y_1, y_2, y_3 ; z_1, z_2, z_3 ; \ldots,$$

desgleichen

$$x_1, x_2, x_3, x_4 ; y_1, y_2, y_3, y_4 ; \ldots \text{ etc.}).$$

Es genügt die Darstellung ternärer Formen mit drei solchen Reihenvariabeln. Sie lautet:

$$(1) \quad f(x^m, y^n, z^l)$$
$$= \sum_\nu \sum_\mu \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}^\varrho D_{yz}^\nu D_{xz}^\mu \varphi_{\mu\nu} (x^{m-\varrho+\mu} y^{n-\varrho+\nu}) \right\}.$$

Hier ist $\mu+\nu+\varrho = l$; ferner sind D_{xz}, D_{yz} die Symbole

$$D_{xz} \equiv z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial x_3};$$
$$D_{yz} \equiv z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial y_3}.$$

$\varphi_{\mu\nu}$ ist eine Covariante von f, die nur x, y (zu den angegebenen Graden) enthält, und zwar entsteht φ aus f durch zwei verschiedene Polarenprocesse in der Art, dass

$$(2) \quad \varphi_{\mu,\nu} = \sum_\sigma k_\sigma D_{zx}^\tau D_{zy}^{\tau'} D_{xy}^{\tau''} D_{yx}^\sigma \Omega_{xyz}^\varrho . f,$$

wo die k Zahlencoefficienten sind, σ innerhalb gewisser Grenzen variirt, die τ bestimmte Functionen von σ sind und endlich Ω das Symbol

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_3} \end{vmatrix}$$

vorstellt. Bemerkenswerth ist, dass der Exponent von Ω unabhängig von σ ist. Es ist dies mit Hülfe der Aronhold'schen Symbolik leicht abzuleiten.

Die Darstellung der Hauptentwickelung (1) geht zunächst von dem speciellen Fall $l = 1$ aus. Hier gelangt man zu der Formel

$$\text{(a)} \qquad f(x^m, y^n, z) = a_x^m\, b_y^n\, c_z = D_{xz}.\varphi + D_{yz}.\psi + (a_x b_y c_z)\, M,$$

wo φ, ψ, M allein die x, y enthalten, und $(a_x\, b_y\, c_z)$ das bekannte Product der beiden Determinanten $(xyz)\,(abc)$ ist.

Die Untersuchung der Formen φ, ψ zeigt zunächst, dass das diophantische Gleichungssystem zwischen den Exponenten von

$a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y$ für φ $2\nu+1$, für ψ $2\nu+2$ resp. $2\nu+1$ $(\mu = \nu)$

Lösungen zulässt bei der immer erlaubten Annahme $\mu \geqq \nu$, d. h. es setzen sich φ, ψ aus ebenso vielen bez. Formen linear zusammen

$$\varphi = g_0 + g_1 + \cdots g_{2\nu}, \qquad \psi = \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots \gamma_{2\nu+1} \quad (\text{resp.}\ \gamma_{2\nu}).$$

Polarisirt man nun die Form $a_x^\mu\, b_x^\nu c_x$ nach den y in der Weise, dass die Formen

$$A_0 = a_x^\mu\, b_x^\nu\, c_x, \qquad \underset{i=1,\dots\nu}{A_i} = (a_x b_y)^i\, a_x^{\mu-i}\, b_x^{\nu-i}\, c_x;$$

$$\underset{i=1,\dots\nu}{B_i} = (a_x b_y)^{i-1}\,(a_x c_y)\, a_x^{\mu-i}\, b_x^{\nu-i+1}, \qquad B_{\nu+1} = (a_x b_y)^\nu\,(a_x c_y)\, a_x^{\mu-\nu-1}$$

entstehen, so sind die $(2\nu+1)$ Formen g nichts anderes als lineare Functionen von

$$\underset{k=0,1,\dots\nu}{D_{xy}^{\nu-k}\, A_k}; \qquad \underset{k=1,\dots\nu}{D_{xy}^{\nu-k}\, B_k}$$

und die γ entsprechende von

$$\underset{k=0,1\dots\nu}{D_{xy}^{\nu+1-k}\, A_k}; \qquad \underset{k=1,\dots\nu+1}{D_{xy}^{\nu+1-k}\, B_k}.$$

Es fliesst dies aus dem wichtigen Identitätensystem

$$\alpha_\varrho A_\varrho + \beta_\varrho B_\varrho = 0.$$

Eine lineare Relation zwischen den g und γ entspringt sofort aus der Bemerkung, dass A_0 nur die x enthält; denn daraus folgt die Proportionalität

$$D_{yz} D_{xy}^{\nu+1} A_0 = (\nu+1) D_{xz} D_{xy}^{\nu} A_0.$$

Andererseits wird bewiesen, dass es keine andere lineare Relation zwischen den g, γ geben kann.

Die Darstellung für $a_x^\mu b_y^\nu c_z$ erweist sich auch als wichtig für alle andern Elementarformen von demselben Grade in x, y, z, z. B. für $\mu = 2$, $\nu = 2$, für $a_y^2 b_x^2 c_z$, $a_y^2 b_x b_z c_x, \ldots a_x a_y b_y b_z c_x$.

Im zweiten Theil wird der allgemeine Fall $l > 1$ auf den obigen aufgebaut. Zunächst wird durch eine Polarisirung nach den neuen (unabhängigen) Coefficientenreihen

$$a_1' \, a_2' \, a_3', \ldots a_1^{(\mu)} \, a_2^{(\mu)} \, a_3^{(\mu)};$$
$$b_1' \, b_2' \, b_3', \ldots b_1^{(\nu)} \, b_2^{(\nu)} \, b_3^{(\nu)}$$

die obige Darstellung angewandt auf die Form

$$a_x' a_x'' \ldots a_x^{(\mu)} \, b_y' b_y'' \ldots b_y^{(\nu)} c_z,$$

sodann beide Seiten der Gleichung mit den analogen Formen

$$c_z'' \, c_z''' \ldots c_z^l$$

multiplicirt, und $\mu = m$, $\nu = n$ gesetzt.

Mittels des Schlusses von l auf $l+1$ und Benutzung der geleisteten Darstellung für $l = 1$ resultirt, indem man am Schluss wieder $a' = a'' = \cdots a^{(m)} = a$, entsprechend die $b = b$, die $c = c$ setzt, die Anfangs gegebene Form (1).

Es ist zu bemerken, dass der Herr Verfasser den von Herrn Gordan angedeuteten Weg, die auftretenden Polarenbildungen durch Differentialrelationen zu ersetzen, hier nicht eingeschlagen hat, sondern sich der Darstellung desselben für binäre Formen möglichst angenähert hat.

Die Erweiterung auf mehr als drei Reihen Variabler, sowie auf quaternäre ... Formen bietet nach der Angabe des Herrn Verfassers keinerlei principielle Schwierigkeit mehr.

My.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

Ch. Biehler. Sur un procédé d'élimination. Nouv. Ann. (2) XIX. 202-206.

Ch. Biehler. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XIX. 332-334.

Sind

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots,$$
$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \cdots$$

zwei Functionen m^{ten} Grades, so kann ihre Resultante nach einem dem Bézout'schen ähnlichen Verfahren gebildet werden, indem man

$$f_1 = a_0 g - b_0 f \quad = a_{0,1} x^{m-1} + a_{1,1} x^{m-2} + \cdots,$$
$$f_2 = a_0 x f_1 - a_{0,1} f = a_{0,2} x^{m-1} + a_{1,2} x^{m-2} + \cdots,$$
$$f_3 = a_0 x f_2 - a_{0,2} f = a_{0,3} x^{m-1} + a_{1,3} x^{m-2} + \cdots$$

berechnet und die Determinante der Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ aufstellt. Diese Methode kann benutzt werden, um x aus den beiden Gleichungen

$$f(x) = 0, \ \alpha + \beta x + \cdots + \delta x^{m-1} - y = 0$$

zu eliminiren. No.

Ch. Biehler. Sur la transformation du déterminant de M. Sylvester en celui de Cauchy. Nouv. Ann. (2) XIX. 110-115.

Ventéjol. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XIX. 188-192.

Die Umformung der Resultante zweier Gleichungen vom m^{ten}, resp. n^{ten} Grade aus einer Determinante $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades in eine solche von $m(\geqq n)$ Zeilen wird durchgeführt. Herr Biehler bemerkt beiläufig, dass Herr Ventéjol dieselbe Methode bei speciellen Gleichungen angegeben habe; Herr Ventéjol betont nachdrücklich, dass die allgemeine Biehler'sche Methode die seinige sei. Uebrigens findet sich das Streitobject im Wesentlichen bereits in den ersten Auflagen des Baltzer'schen Lehrbuches.

No.

A. Brill. Ueber eine Eigenschaft der Resultante. Clebsch Ann. XVI. 345-348.

Die Coefficienten zweier algebraischer Gleichungen $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ mögen so von Grössen a_1, $b_1 \dots$ abhängen, dass, wenn eine bestimmte rationale Function derselben $R(a_1, b_1 \dots)$, die selbst nicht Potenz einer solchen ist, verschwindet, allemal n Wurzeln beider Gleichungen übereinstimmen. Dann wird R Factor der Resultante von f und φ sein. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass R mindestens n-facher Factor derselben sei.

No.

C. le Paige. Sur l'élimination. C. R. XC. 1210-1212.

Sehr einfache Umwandlung der als $(m+n)$-gliedrige Determinante geschriebenen Resultante (Euler'sche Form) in eine $m(>n)$-gliedrige Determinante (Bézout'sche Form). No.

A. Cayley. On a formula of elimination. Proc. L. M. S. XI. 139-141.

Die Elimination der Unbekannten aus

$$a\theta^3+b\theta^2+c\theta+d = 0, \quad A\theta^2+B\theta+C = 0,$$

wobei die Coefficienten lineare Functionen der vier Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 sind, wird so durchgeführt, dass in der Resultante, als Gleichung einer Fläche aufgefasst, die Existenz einer Doppel-Curve zu Tage tritt. No.

J. J. Sylvester. On the exact relation which resultants and discriminants bear to the product of the differences of roots of equations. Messenger (2) IX. 162-166.

Man denke sich zwei rationale ganze Functionen, in x resp. vom Grade r und s so, dass die Coefficienten von x^r und x^s gleich 1 sind. Die Wurzeln der einen seien ϱ und die der andern σ. Es mögen ferner $D_{\varrho,\sigma}$ die Producte der Differenzen bezeichnen, die

durch Subtraction jedes σ von jedem ϱ entstehen, und $R_{r,s}$ die rationale ganze Function der Coefficienten, in welche die höchste Potenz der letzten Coefficienten der s-Gleichung mit dem positiven Zeichen eintritt. Dann ist bekanntlich

$$R_{r,s} = \mu D_{\varrho,\sigma}.$$

Hier wird bewiesen, dass

$$\mu = (-)^{\frac{1}{2}(n-1)n}.$$

Glr. (O.)

Ch. Biehler. Sur les équations linéaires. Nouv. Ann. (2) XIX. 311-331, 356-362.

Theorie der linearen Gleichungen mit n Unbekannten. Die Bedingungen über die Verträglichkeit von Gleichungen, die Reduction eines Systems auf die von einander unabhängigen Gleichungen u. s. f. werden gegeben, ohne dass neue Resultate oder Methoden zu verzeichnen wären. No.

C. Jordan. Sur la réduction des substitutions linéaires. C. R. XC. 598-601.

Bedeuten s, s' zwei lineare Substitutionen mit Coefficienten $a+bi$, so mögen sie äquivalent heissen, wenn $s' = ese'$ ist, wobei e, e' Substitutionen mit ganzen Coefficienten und der Determinante 1 sind. Dann ist jede Substitution s der Determinante D einer andern reducibeln Substitution äquivalent, deren Coefficienten geringere Normen als $k_n \sqrt[n]{\text{Norm}\,(D)}$ haben; k_n hängt dabei nur von der Anzahl n der Variablen ab, welche in der Substitution auftreten. No.

Pasch. Ein algebraischer Satz nebst geometrischen Anwendungen. Borchardt J. IXC. 252-257.

Ist

$$\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \cdots + \alpha_m$$

ein Theiler der Function

$$k_1 G_1 + k_2 G_2 + \cdots + k_m G_m,$$

wo die Bedeutung von G_i die folgende ist:

$$G_i = a_{i0}x^n + a_{i1}x^{n-1} + \cdots + a_{in},$$

so besteht zwischen den a eine von den k unabhängige homogene Gleichung vom Grade $n-m+1$, welche als Determinante von einfacher Gestalt geschrieben werden kann. Hieraus folgt dann ein allgemeiner geometrischer Satz, dessen Specialfälle für $m=2$ und $m=3$ lauten: „Werden einem Kegelschnitte zwei n-Ecke einbeschrieben, so berühren ihre $n(n-1)$ Seiten eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe.“ „Werden einer Raumcurve dritter Ordnung drei n-Ecke einbeschrieben, so sind die $\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$ Ebenen, welche je drei Punkte eines n-Ecks verbinden, Tangentialebenen einer Fläche $(n-2)^{\text{ter}}$ Classe.“ No.

G. Bellavitis. Giuoco americano. Atti d. Ist. Ven. (5) VI. 901-905.

Zur Theorie des bekannten Sechzehner-Spiels wird angegeben, dass die Lösung möglich sei, falls die geforderte Substitution der alternirenden Gruppe angehört. Ferner wird ein Weg für die Lösung mitgetheilt, falls eine solche besteht. Ausführungen der Beweise werden nicht gegeben. No.

Otto Hesse. Die Determinanten elementar behandelt. In's Polnische übersetzt von Żdziarski. Warschau.

Dn.

R. Hoppe. Elemente der Determinantentheorie. Grunert Arch. LXV. 65-73.

Die Arbeit enthält eine Zusammenstellung der ersten Sätze der Determinantentheorie, allein durch die einfachsten Schlüsse, und zwar ohne Anwendung der Unterdeterminanten bewiesen. Nur scheint es dem Referenten zweifelhaft, ob der Satz, der an die Vertauschung zweier Parallelreihen anknüpft, ohne ein Wort des Beweises, lediglich als „Beobachtung“ aufgefasst werden darf. No.

R. F. Scott. A treatise on the theory of determinants and their applications in analysis and geometry.
Cambridge. Leipzig. F. A. Brockhaus.

Dieses Werk ist ein ausführliches Lehrbuch, welches sich von den bisher geschriebenen dadurch unterscheidet, dass es grundsätzlich die Grassmann'sche Darstellung der Determinanten zum Zweck der Ableitung ihrer Eigenschaften adoptirt. Es geschieht dies allerdings nicht ganz in dem von Grassmann angedeuteten und vom Referenten in seinem „System der Raumlehre" II., S. 121—156 innegehaltenen Umfange, indem z. B. die innere Multiplication keine Verwendung gefunden hat. Doch treten auch bei der Beschränkung auf die äussere Multiplication die Vortheile der Grassmann'schen Methoden schon genugsam hervor. Der Stoff ist in 14 Capitel getheilt, von denen die ersten sieben die Theorie der gewöhnlichen (auch der cubischen und höher dimensionirten) Determinanten enthalten, während die folgenden Anwendungen auf die Theorie der Gleichungen, Functionaldeterminanten, quadratische Formen, Kettenbrüche und zuletzt geometrische Anwendungen geben. Die letzteren bieten dem Verfasser Gelegenheit, noch einige andere in der Determinantentheorie nicht vorkommende Begriffe der Ausdehnungslehre zu erörtern. Ausser den zahlreichen dem Texte eingestreuten erläuternden Beispielen findet sich noch am Schlusse des Buches eine 92 Nummern umfassende Aufgabensammlung und ein Nachweis der dem Verfasser zugänglich gewesenen Literatur.

Schg.

L. Lindelöff. Bidrag till läran om determinanter.
Öfv. af Finskka Vet. Soc. Forh. XXII.

Enthält eine sorgfältig ausgeführte Ermittelung derjenigen Relationen, welche durch das Verschwinden einer Determinante und deren Unterdeterminanten verschiedener Ordnung entstehen.

M. L.

C. W. Borchardt. Remarque relative au mémoire de M. Sylvester sur les déterminants composés.
Borchardt J. IXC. 82-85.

Herr Borchardt theilt mit, dass das im LXXXVIII. Bande seines Journals p. 58 (s. F. d. M. XI. 1879. p. 109) von Herrn Sylvester gegebene Theorem über zusammengesetzte Determinanten von diesem als unrichtig erkannt sei. No.

A. Schmitz. Bemerkungen über die Anwendbarkeit der französischen Methode zur Auflösung linearer Gleichungen. Hoffmann Z. XI. 428-431.

Ist eine Unterdeterminante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Determinante eines Systems von n linearen Gleichungen gleich Null, so lässt sie sich bei Anwendung der Bézout'schen Lösungsmethode in der That nicht benutzen. No.

E. Fürstenau. Beiträge zur Theorie der Determinanten.
Borchardt J. IXC. 86-88.

I. Es sind zwei Systeme von Grössen $a_{\lambda\mu}(\lambda, \mu = 0, 1, \dots n)$ und $b_{\lambda\mu}(\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$ vorgelegt; es sei $a_{\lambda\mu} = b_{\lambda\mu}$ für $\mu > 0$, $\lambda > m$. Man bilde die Determinanten $|a_{\lambda\mu}|$, $|b_{\lambda\mu}|$, leite aus der letzteren $(m+1)$ neue Determinanten $B^{(i)}$ her, indem man für die b_{ik} der Reihe nach die a_{ik} substituirt ($k > 0$; $i = 0, 1, \dots m$), und multiplicire jedes $B^{(i)}$ mit derjenigen Unterdeterminante n^{ter} Ordnung A_{i0} von $|a_{\lambda\mu}|$, welche dem Elemente a_{i0} entspricht. Dann ist

$$\sum_{i=0}^{i=m} A_{i0} B^{(i)} = 0.$$

Für $m = n$ kommt man auf einen bekannten Satz. Der Fall $m = 0$ bildet eine Ausnahme.

II. Multiplicirt man die der Hauptdiagonale einer Determinante parallelen Reihen rechts der Reihe nach mit $\varrho, \varrho^2, \dots \varrho^n$,

links mit ϱ^{-1}, ϱ^{-2}, ... ϱ^{-n}, wo ϱ eine willkürliche Grösse bedeutet, so bleibt die Determinante ungeändert. No.

F. MERTENS. Ueber die Bedingungen der algebraischen Theilbarkeit eines ganzen Ausdruckes von n^2 willkürlichen Elementen durch die Determinante der letzteren. Wien. Ber. 1880. 260-270.

Wenn ein ganzer Ausdruck A der n^2 Elemente $a_{\lambda\mu}$ durch $|a_{\lambda\mu}|^m$ theilbar ist, so wird, wenn man $a_{n\mu}$ durch

$$p.a_{1\mu}+q.a_{2\mu}+\cdots+t.a_{n\mu}$$

ersetzt, wo unter p, q, ... t willkürliche Elemente zu verstehen sind, A durch t^m algebraisch theilbar. In der Arbeit des Herrn Mertens wird umgekehrt gezeigt, dass diese letztere Eigenschaft hinreichend ist, um schliessen zu können, A sei durch $|a_{\lambda\mu}|^m$ algebraisch theilbar. Es werden verschiedene Anwendungen dieses Satzes gegeben. No.

B. IGEL. Zur Theorie der Determinanten. Wien. Ber. 1880.

Bildet man alle $\frac{n(n-2)}{2}$ Determinanten aus den Elementen

$$a_{\lambda\mu}\ (\lambda = 2, 3, \dots n-1;\ \mu = 1, 2, \dots n)$$

und bezeichnet mit B_{ik} diejenige Determinante dieses Systems, in der $\mu = i$ und k fehlt, so bestehen zwischen diesen Grössen Identitäten, von denen

$$B_{ik}B_{\lambda\mu}+B_{i\lambda}B_{\mu k}+B_{i\mu}B_{k\lambda} = 0$$

angeführt werden mag. Es werden ferner die Ausdrücke auf directem Wege hergeleitet, welche im Falle gleicher Elemente an die Stelle der alternirenden Function treten. (Vgl. F. d. M. IX. 1877. p. 106.) No.

G. v. ESCHERICH. Die Determinanten höheren Ranges und ihre Verwendung zur Bildung von Invarianten. Wien. Denkschr. XLIII.

Eine Determinante $(m+1)^{ten}$ Ranges und n^{ter} Ordnung wird als eine Summe

$$\Sigma^{(m+1)} \pm a^{(1)}_{1,1,\dots 1}\, a^{(2)}_{2,2,\dots 2} \dots a^{(n)}_{n,n,\dots n}$$

definirt, welche aus dem hingeschriebenen ersten Gliede durch Vertauschung der gleichstelligen unteren Indices entspringt, wobei das Vorzeichen wie bei Determinanten ersten Ranges bestimmt wird. Eine Anzahl der Eigenschaften von gewöhnlichen Determinanten kann man sofort auch hier als gültig erkennen. Die Theorie liefert eine Reihe invarianter Bildungen, welche nicht bloss bei Functionen mit einer Reihe von Variabeln ihre Geltung behalten. Jede Ueberschiebung zweier binärer Formen ist, abgesehen von einem numerischen Factor, eine Determinante höheren Ranges; jede Covariante ist als Aggregat solcher Determinanten darstellbar u. s. w. Vgl. F. d. M. 1868. I. p. 43 u. 44.

No.

C. LE PAIGE. Sur les déterminants bordés. Bull. S. M. F. VIII. 128-132.

Es sei eine Determinante n^{ten} Grades Δ gegeben. Man vervollständige sie zu einer Determinante $(n+1)^{ten}$ Grades Δ' dadurch, dass man an jede der n Zeilen je p neue Elemente ansetzt, ebenso an jede der n Colonnen entsprechend dieselben Elemente und die übrigen p^2 Stellen durch Nullen ausfüllt. Dann ist $\Delta'.\Delta^p$ gleich einer Determinante p^{ten} Grades, deren Elemente bilineare Formen sind.

No.

C. LE PAIGE. Sur quelques propriétés des déterminants. N. C. M. VI. 489-496.

Sätze über Determinanten, deren Elemente wieder Determinanten sind.

Mn. (O.)

R. F. SCOTT. On cubic determinants and other determinants of higher class, and on determinants of alternate numbers. Proc. L. M. S. XI. 17-23.

Der Verfasser zeigt, wie die Grassmann'sche Darstellung einer gewöhnlichen Determinante (als Zahlencoefficient eines äusseren Productes von n linearen Factoren, deren jeder aus denselben n Einheiten $e_1 \dots e_n$ abgeleitet ist) sich durch Einführung weiterer Gruppen von Einheiten $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$, $(\eta_1 \dots \eta_n)$ etc. mit Vortheil auf cubische und höher dimensionirte Determinanten ausdehnen lässt, um in besonders kurzer Weise den Werth solcher Determinanten zu bestimmen und Sätze über dieselben abzuleiten, z. B.: „Eine cubische Determinante n^{ter} Ordnung ist die Summe von $n!$ ebenen Determinanten n^{ter} Ordnung." „Das Product zweier Determinanten von den Dimensionen p und q und gleicher Ordnung n ist eine Determinante von gleicher Ordnung und der Dimensionenzahl $p+q-1$." Es folgen Anwendungen auf die Determinanten, welche die Fläche eines Dreiecks und das Volumen eines Tetraeders ausdrücken, mit Verallgemeinerung auf n Dimensionen. Am Schluss wird gezeigt, wie die von Spottiswoode und Clifford betrachteten Determinanten aus alternirenden Zahlen (siehe F. d. M. VIII. 1876. p. 72) sich erweitern lassen zu solchen, deren Glieder Producte aus alternirenden Zahlen sind.

Schg.

R. F. Scott. Note on a determinant theorem of Mr. Glaisher's. Quart. J. XVIII. 129-132.

Herr Glaisher bewies, dass die Determinante der Form

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots a_{2n} \\ a_{2n} & a_1 & a_2 \dots a_{2n-1} \\ a_{2n-1} & a_{2n} & a_1 \dots a_{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = D$$

in eine ähnliche n-reihige Determinante umgewandelt werden kann. Herr Scott zeigt, dass diese neue Determinante das Product zweier anderer n-reihiger Determinanten ist. Es folgt dies, wenn man in D zu jeder der ersten n Colonnen die n^{te} darauf folgende addirt und dann von jeder der n ersten Zeilen die n^{te} darauf folgende subtrahirt.

No.

M. Nöther. Notiz über eine Classe symmetrischer Determinanten. Clebsch Ann. XVI. 551-556.

Die Determinante Δ ist eine $n_1 . n_2 \dots n_\mu$-reihige symmetrische. Theilt man sie durch $n_\mu - 1$ Horizontal- und ebenso viele Verticalstriche in n_μ^2 Quadrate Δ' von je $n_1 . n_2 \dots n_{\mu-1}$ Reihen, so gehen die n_μ Horizontalreihen dieser Quadrate aus der ersten durch Wiederholung derselben cyklischen Vertauschung hervor, indem man nämlich jedes der n_μ Quadrate der ersten Reihe um ein Glied vorrückt. Theilt man weiter jedes dieser n_μ^2 Quadrate Δ' analog in je $n_{\mu-1}^2$ Quadrate Δ'', so gehen auch die $n_{\mu-1}$ Reihen solcher Quadrate, welche in einem Δ' enthalten sind, aus der ersten Reihe von $n_{\mu-1}$ Quadraten durch analoge cyklische Vertauschung hervor; u. s. w. Δ ist in ein Product von linearen Factoren zerfällbar. Seine Unterdeterminanten nach zwei zu einander symmetrischen Elementen sind einander gleich, so dass dieselben eine dem Δ analoge Determinante bilden. No.

L. Gegenbauer. Ueber eine specielle symmetrische Determinante. Wien. Ber. 1880.

Der Satz über die Zerlegung der eben angeführten Nöther'schen Determinante in ein Product von homogenen linearen Factoren wird in einfacher Weise abgeleitet; es wird die Folgerung gezogen, dass diese Determinante verschwindet, wenn zwischen ihren Elementen eine lineare homogene Relation besteht, die bei allen cyklischen Permutationen derselben ungeändert bleibt. No.

S. Günther. Ueber einen Satz von den symmetralen Determinanten. Bair. Bl. XVI. 310-314.

Lengauer. Zum Beweise des Cayley'schen Satzes von den symmetralen Determinanten. Bair. Bl. XVI. 423-424.

An dem speciellen Falle einer sechsreihigen symmetralen Determinante von leerer Diagonale wird nachgewiesen, dass

und wie sich jedes solche Gebilde durch blosse Elementaroperationen, schliesslich aber mit Zugrundelegung des Laplace'schen Satzes, in ein vollständiges Quadrat transformiren lässt. Herr Lengauer bringt an dem Beweise noch eine Vereinfachung an.

Gr.

F. J. STUDNIČKA. Notiz über einige Determinanten, in welchen Binomialcoefficienten als Elemente auftreten. Prag. Ber. 1879. 292-295.

Es werden folgende Sätze bewiesen: „Es ist

$$(n+k-1)_k = \begin{vmatrix} n_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n_2 & n_1 & 1 & \dots & 0 \\ n_3 & n_2 & n_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_k & n_{k-1} & n_{k-2} & \dots & n_1 \end{vmatrix}.“$$

„Bedeutet D_k die zum letzten Elemente der ersten Zeile zugehörige Unterdeterminante, so ist

$$D_k = \begin{vmatrix} (n+k-2)_{k-1} & (n+k-3)_{k-2} \\ (n+k-1)_k & (n+k-2)_{k-1} \end{vmatrix}.“$$

No.

F. J. STUDNIČKA. Ueber eine neue Determinantentransformation. Prag. Ber. 1879. 489-494.

Addirt man zu den Elementen der k^{ten} Zeile noch unbestimmte Vielfache der ersten für $k = 2, 3, \dots n$, so können die Vielfachen so gewählt werden, dass die erste Colonne gleiche Elemente enthält. Dann ist die Reduction auf eine Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung leicht, deren Elemente Determinanten zweiter Ordnung sind. So wird allgemein bewiesen, dass eine Determinante n^{ter} Ordnung sich durch eine Determinante $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellen lasse, deren Elemente selbst Determinanten $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind.

No.

F. J. Studnička. Ueber einen neuen Determinantensatz. Casopis IX. 97. (Böhmisch.)

Sowie man den Grad einer Determinante beliebig erhöhen kann, indem man sie als Subdeterminante von entsprechendem Grade der erhöhten Determinante darstellt, ebenso kann man den Grad einer Determinante dadurch erniedrigen, dass man ihre Elemente durch Subdeterminanten von entsprechendem Grade der erniedrigten Determinante ausdrückt. Hat man nämlich

$$\Delta = (a_1 b_2 c_3 \dots l_n),$$

wobei Binet's einfache Bezeichnung benutzt erscheint, so ist auch

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_1\, b_2 \dots h_k\ ), & (a_1\, b_2 \dots i_k\ ), \dots \\ (a_1\, b_2 \dots h_{k+1}), & (a_1\, b_2 \dots i_{k+1}), \dots \\ (a_1\, b_2 \dots h_{k+2}), & (a_1\, b_2 \dots i_{k+2}), \dots \\ \vdots & \\ (a_1\, b_2 \dots h_n\ ), & (a_1\, b_2 \dots i_n\ ), \dots \end{vmatrix} \frac{1}{(a_1 b_2 \dots g_{k-1})^{n-k}},$$

im einfachsten Falle also z. B.

$$\Delta = \frac{1}{a_1^{n-2}} \begin{vmatrix} (a_1\, b_2), & (a_1\, c_2), \dots, & (a_1\, l_2) \\ (a_1\, b_3), & (a_1\, c_3), \dots, & (a_1\, l_3) \\ \vdots & & \\ (a_1\, b_n), & (a_1\, c_n), \dots, & (a_1\, l_n) \end{vmatrix}.$$

Hiebei wird zugleich bemerkt, wie sich das Verhältnis der Subdeterminanten des ursprünglichen und beigeordneten Systems zu den betreffenden Determinanten aus diesen Formeln in speciellen Fällen ableiten lasse. Std.

F. J. Studnička. Bemerkung zur vorangehenden Determinantenformel. Casopis IX. 154. (Böhmisch.)

Hat man auf welche Art immer die Formel zur Berechnung der Dreiecksfläche aus den Seitenlängen in Form einer Determinante abgeleitet, so ist der Uebergang zur bekannten Productenform herzustellen, was hier auf eine eigenartige Weise geschieht. Std.

Pasch. Ueber gewisse Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen. Borchardt J. IXC. 247-251.

Verschiedene Umformungen der Determinante

$$\Sigma \pm a_1^2\ b_2^2\ c_3^2\ d_2\ d_3\ e_3\ e_1\ f_1\ f_2$$

werden gegeben und Beziehungen zwischen ihr und anderen ausgezeichneten Determinanten abgeleitet. No.

C. L. Landré. Eene stelling omtrent determinanten. Nieuw Archief VI. 208-211.

Aus Veranlassung eines Fehlers in Dostor's „Eléments de la théorie des déterminants“ wird der Zusammenhang zwischen einer gegebenen Determinante und einer anderen, die man durch Subtraction der Reihen von einander erhalten kann, behandelt. Hierbei ergiebt sich die folgende Eigenschaft: Wenn man in einer Determinante n^{ten} Grades jede Reihe um die Summe aller übrigen vermindert, so entsteht dadurch die ursprüngliche Determinante multiplicirt mit $2^n - n2^{n-1}$. G.

G. Dötsch. Zum Unterrichte in der Determinantenlehre. Bair. Bl. XVI. 25-28.

Versteht man unter P_k das Differenzenproduct $(k > 1 < n)$

$$(a_k - a_1)(a_k - a_2)(a_k - a_3)\dots(a_k - a_{k-1}),$$

so lässt sich successive zeigen, dass

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3^1 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = P_n \begin{vmatrix} 1 & a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3^1 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = P_n . P_{n-1} . P_{n-2} \dots P_3 \begin{vmatrix} 1 & a_1^1 \\ 1 & a_2^1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=2}^{k=n} P_k$$

ist. Die hierzu nöthigen Umformungen sind elementarer Natur. Gr.

J. W. L. Glaisher. On some algebraical expressions which are unaltered by certain substitutions. Messenger (2) X. 60-63.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, \dots a_n \\ a_n, & a_1, & a_2, \dots a_{n-1} \\ a_{n-1}, & a_n, & a_1, \dots a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_2, & a_3, & a_4, \dots a_1 \end{vmatrix}$$

ist so beschaffen, dass wenn $a_1, a_2, \dots$ ersetzt werden durch

$$a_2+a_3+\cdots+a_n, \quad a_1+a_3+\cdots+a_n, \dots,$$

ihr Werth multiplicirt wird mit dem Factor $(-1)^{n-1}(n-1)$. Werden aber $a_1, a_2, \dots$ ersetzt durch

$$\tfrac{1}{2}(-a_1+a_2+\cdots+a_n), \quad \tfrac{1}{2}(a_1-a_2+\cdots+a_n) \dots,$$

so wird ihr Werth im Verhältnis von 1 zu $(-1)^{n-1}\frac{1}{2}(n-2)$ verändert. Glr. (O.)

E. Hunyady. Der Satz von Desargues über perspectivische Dreiecke. Borchardt J. IXC. 79-81.

Es sei

$$\delta = |a_{\lambda\mu}|, \quad \delta' = |a'_{\lambda\mu}|, \quad \Delta = |b_{\lambda\mu}|, \quad \Delta' = |b'_{\lambda\mu}|$$
$$(\lambda, \mu = 1, 2, 3);$$

die $a_{\lambda\mu}$, $a'_{\lambda\mu}$ mögen beliebige Grössen bedeuten; ferner sei

$$b_{\lambda\mu} = a_{\lambda,\mu+1}\, a'_{\lambda,\mu-1} - a_{\lambda,\mu-1}\, a'_{\lambda,\mu+1},$$

und $b'_{\lambda\mu}$ entstehe aus $b_{\lambda\mu}$, wenn man die a, a' durch ihre bei der Entwickelung von δ, δ' auftretenden Coefficienten ersetzt. Dann gilt die Identität $\Delta' = \delta.\delta'\Delta$. Bedeuten nun die $a_{\lambda\mu}$ die homogenen Coordinaten eines Dreiecks, $a'_{\lambda\mu}$ diejenigen eines andern, so beweist jene Identität den Satz von Desargues über perspectivische Dreiecke. No.

B. **Hansted.** Trois théorèmes relatifs à la théorie des nombres. Teixeira J. II.

II. Die Anzahl der Glieder einer Determinante, die keine Elemente der Diagonale enthalten, ist die nächste ganze Zahl in $\frac{[n]}{e}$. Tx. (O.)

L. **Clariana y Ricart.** Aplicacion de las determinantes à la resolucion de las ecuaciones de cuarto grado. Cron. cient. III. 425-429.

L. **Clariana y Ricart.** Applicaciones de las determinantes à la trigonometria. Cron. cient. III. 201-204.

L. **Kronecker.** Ueber die symmetrischen Functionen. Berl. Monatsber. 1880. 936-948.

Versteht man unter $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \dots \mathfrak{f}_m$; $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots \mathfrak{g}_n$ die elementaren symmetrischen Functionen von $x_1, x_2, \dots x_m$ resp. $y_1, y_2, \dots y_n$, so ist

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\mathfrak{f}_1 y_k+\mathfrak{f}_2 y_k^2+\cdots+\mathfrak{f}_m y_k^m) = \prod_{i=1}^{m}(1+\mathfrak{g}_1 x_i+\mathfrak{g}_2 x_i^2+\cdots+\mathfrak{g}_n x_i^n);$$

aus der Vergleichung der Entwickelung beider Seiten ergiebt sich der Fundamentalsatz der Darstellung symmetrischer Functionen durch die elementaren, sowie die lineare Unabhängigkeit der Producte $\mathfrak{f}_a^{\alpha}\mathfrak{f}_b^{\beta}\dots$ von einander, welche am Schluss der Abhandlung nochmals in einfacher Weise nachgewiesen wird. Sehr übersichtlich gestaltet sich der Fundamentalsatz bei Anwendung inductiver Schlussfolgerung. Setzt man $x_i = v^{g^{i-1}}$, so wird

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+\mathfrak{g}_1 v^{g^k}+\mathfrak{g}_2 v^{2g^k}+\cdots+\mathfrak{g}_n v^{ng^k})$$

eine erzeugende Function aller symmetrischen Functionen von $y_1, \dots y_n$ werden, zuerst in dem Sinne, dass alle symmetrischen

Functionen, welche aus der Indexpermutation eines Ausdrucks $y_1^\alpha y_2^\beta \dots y_n^\delta$ entspringen, als Coefficienten gewisser Functionen von v auftreten; dann auch so, dass gewisse symmetrische Functionen, aus denen sich alle anderen linear ableiten lassen, als Coefficienten der einzelnen Potenzen von v erscheinen. Von Wichtigkeit ist für diese Ableitungen ein gewisses Princip für die Ordnung und Reihenfolge mehrerer Variabeln, wie es z. B. Gauss in seinem zweiten Wurzelexistenz-Beweise (Werke III. S. 36) verwendet hat. Die allgemein leitenden Gesichtspunkte solcher Anordnungen werden auseinandergesetzt; besonders werden Schlüsse aus der einfachen Bemerkung gezogen, dass die Substitution $x_i = v^{g^{i-1}}$ bei passend gewählten g es bewirkt, alle Producte $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$ zu Potenzen von v mit von einander verschiedenen Exponenten zu machen; dies führt wiederum u. A. auf die Darstellung des litteralen Theils einer gegebenen symmetrischen Function durch die elementaren symmetrischen Functionen. No.

F. Mertens. Zur Theorie der symmetrischen Functionen. Wien. Ber. LXXXI. 988-1000.

Herr Mertens leitet den Fundamentalsatz der Theorie auf einem inductiven Wege ab, welcher sich zugleich als brauchbar für die wirkliche Berechnung erweist. Ferner giebt er eine Erweiterung dieses Satzes in folgender Form: „Ein ganzer symmetrischer Ausdruck A der n Gruppen

$$x_1, y_1, \dots z_1;\quad x_2, y_2, \dots z_2;\quad x_n, y_n, \dots z_n$$

von je p Elementen, d. h. ein ganzer Ausdruck dieser Elemente, welcher identisch ungeändert bleibt, wenn man die Gruppen in irgend einer Weise gegen einander vertauscht, lässt sich immer identisch als ganze Function der Coefficienten des nach $t, x, y, \dots z$ zu entwickelnden Productes

$$(t+t_1)(t+t_2)\dots(t+t_n)$$

darstellen, wo zur Abkürzung

$$x_i x + y_i y + \dots + z_i z = t_i$$

gesetzt worden ist.“ No.

L. Crocchi. Una relazione fra le funzioni simmetriche semplici e le funzioni simmetriche complete.
Battaglini G. XVIII. 377-380.

Versteht man unter V_p denjenigen Ausdruck, welcher aus $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^p$ dadurch entsteht, dass man alle Coefficienten der Entwickelung durch die Einheit ersetzt, und unter s_p wie gewöhnlich die Summe $x_1^p+x_2^p+\cdots+x_m^p$, so finden unter den V_p und den s_p Relationen statt, die den Newton'schen Formeln bis auf die Vorzeichen der linken Seiten völlig gleichen. Man hat nämlich:

$$V_0 s_1 = V_1$$
$$V_1 s_1 + V_0 s_2 = 2V_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_{m-2}s_1 + V_{m-3}s_2 + \cdots + V_0 s_{m-1} = (m-1)V_{m-i}.$$

No.

A. R. Farsyth. The symmetric functions of the roots of an equation. Messenger (2) X. 44-54.

Die Arbeit enthält eine Formel, mit der die Zahl der symmetrischen Functionen irgend eines Grades berechnet werden kann, und eine Tabelle dieser Anzahlen für die Grade 1 bis 30. Auch wird eine Methode mitgetheilt zur Berechnung dieser Functionen irgend eines Grades (ausgedrückt durch die Coefficienten der Gleichung), aus denen des nächst niederen Grades.

Glr. (O.)

Dritter Abschnitt.

Zahlentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

R. DEDEKIND. Vorlesungen über Zahlentheorie von P. Lejeune-Dirichlet. 3te Aufl. 1te Abth. Braunschweig.

Sn.

H. BROCARD. Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers. N. C. M. VI. 255-263, 481-488, 529-542.

Siehe Abschn. I. Cap. 1. B. p. 32.

FLECK. Factoren, grösster gemeinschaftlicher Theiler und kleinster gemeinschaftlicher Dividend. Pr. Altenburg.

Sn.

GROSSCURTH und GUDILA-GODLEWSKY. Factorentabelle oder Zergliederung aller Zahlen von 1 bis 10000 in die Grundzahlen. Moskau.

Sn.

A. v. BRAUNMÜHL. Ein Verfahren zur Division ganzer Zahlen. Bair. Bl. XVI. 272-274.

Reproduction und Besprechung der von Crelle in Band XIII. seines Journals in Vorschlag gebrachten Methode.

Gr.

J. H. HUMMEL. Evolution by subtraction. Phil. Mag. 1880.

Die Methode besteht darin, dass nacheinander die Glieder einer Reihe von der Zahl abgezogen werden, deren Wurzel man bestimmen will. Der letzte Rest ist dann die gesuchte Wurzel. Um z. B. die Cubikwurzel aus 512 zu ziehen, muss man die sechsfachen dreieckigen Zahlen bis 6·28 subtrahiren. Der letzte Rest ist dann die gesuchte Wurzel. Csy. (O.)

C. CRONE. Bevis for en Sätning af Taltheorien. Zeuthen Tidsskr. (4) IV. 158-159.

Zum Beweis der bekannten Formel für die Anzahl derjenigen Zahlen, welche kleiner als $n = p_1 p_2 \dots p_q$ sind und mit n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, benutzt der Verfasser die Summe

$$A = \Sigma\left(\frac{n}{p_1} - 1\right) - \Sigma\left(\frac{n}{p_1 p_2} - 1\right) + \cdots - (-1)^q \Sigma\left(\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_{q-1}} - 1\right).$$

Gm.

LANDRY. Décomposition de $2^{64}+1$. N. C. M. VI. 417.

Die Zahl $2^{64}+1$ ist durch 274177 theilbar.

Mn. (O.)

LE LASSEUR. Autres décompositions. N. C. M. VI. 147-148.

Die Zahl 18 928 956 449 131 ist theilbar durch 3270961, und Aehnliches. Mn. (O.)

W. W. JOHNSON. Solution of a problem. Analyst VII. 129-130.

Wenn a relativ prim zu n, dann ist entweder $a^{\frac{1}{2}\varphi(n)}-1$ oder $a^{\frac{1}{2}\varphi(n)}+1$ durch n theilbar, ausser wenn $n=2$.

Glr. (O.)

E. CATALAN. Lettre à M. Hermite. N. C. M. VI. 320-321.

Beweis des folgenden Satzes von Hermite: „Wenn p eine ungrade Primzahl ist, so ist

$$C_{2n+1,\,2p-1}+C_{2n+1,\,2p-2}+C_{2n+1,\,2p-3}+\cdots$$

ein Multiplum von p.“ Mn. (O.)

B. HANSTED. Trois théorèmes relatifs à la théorie des nombres. Teixeira J. II.

I. Der Bruch $\frac{M}{N}$, der in seinem Nenner nur Primfactoren, verschieden von 2 und 5 enthält, sei in einen Decimalbruch mit einer Periode von k Stellen verwandelt. Die sich hierbei ergebenden Divisionsreste seien $b_1, b_2, \dots b_r, \dots b_k$. Jedem Werth von N entspricht dann eine von M und r unabhängige Grösse p, für welche $b_r \equiv Mp^{k-r}$ (mod. N) ist. Anwendung auf die Multiplication zweier Zahlen durch cyklische Vertauschung der Ziffern.

Tx. (O.)

Th. PEPIN. Mémoire sur les lois de réciprocité relatives aux résidus des puissances. Acc. P. N. L. XXXI. 40-149.

Den Grundgedanken dieser Abhandlung findet man F. d. M. IX. 1877. p. 132; über einzelne Theile ist V. 1873. p. 100, VI. 1874. p. 114, VII. 1875. p. 91, VIII. 1876. p. 96 referirt worden. In der vorliegenden Arbeit finden sich die von dem Herrn Verfasser gegebenen Beweise für das Reciprocitätsgesetz für die quadrati-

schen, cubischen, biquadratischen Reste, sowie eine Reihe von einzelnen Sätzen für fünfte und siebente Potenzreste.

Sn.

L. Kronecker. Ueber den vierten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Berl. Monatsber. 1880. 686-698, 854-860.

Im Anschluss an die von Cauchy zuerst aus der linearen Transformation der θ-Reihen abgeleitete Werthbestimmung der Gauss'schen Summen wird hier der genaue Nachweis dieses Zusammenhanges und somit einer Aequivalenz der Reciprocitätsgleichung für die quadratischen Reste und der Transformationsgleichung für die θ-Reihen gegeben. Cauchy's functionentheoretische Grundformeln liefern aus den θ jene Grenzfunction, deren Eigenschaften unmittelbar Eigenschaften des Legendre'schen Zeichens resp. der Jacobi'schen Verallgemeinerung desselben sind. Ebenso wird umgekehrt aus der Werthbestimmung der Gauss'schen Summen die Transformation der θ-Reihen erschlossen. Die bekannte Vorzeichenbestimmung ergiebt sich auf diesem Wege ebenso unmittelbar. Zur Auffindung des absoluten Werthes jener Summen braucht man die Existenz primitiver Congruenzwurzeln nicht. Endlich werden noch die Productentwickelung und die allgemeine Transformation der θ-Reihen mit Hülfe der hier zu Grunde gelegten functionentheoretischen Sätze auf das einfachste abgeleitet.

Sn.

L. Kronecker. Sur la loi de réciprocité. Darboux Bull. (2) IV. 182-192.

Aus den Berl. Monatsber. 1876 (vergl. F. d. M. VIII. 1876. 93-95).

Sn.

A. Genocchi. Sur la loi de réciprocité de Legendre étendue aux nombres premiers. C. R. XC. 300-302.

Mit Hülfe der von Herrn Schering gegebenen Erweiterung

des bekannten Lemma von Gauss (vergl. F. d. M. VIII. 1876. p. 93-95) gelingt es Herrn Genocchi, seinen im Jahre 1852 gegebenen, ursprünglich nur für Primzahlen geltenden Beweis des Reciprocitätsgesetzes auf beliebige ungrade Zahlen auszudehnen. Hieran schliessen sich einige, übrigens längst geläufige Notizen über die Geschichte des Reciprocitätsgesetzes, welche gegen die Nachweise des Herrn Kronecker (Berl. Monatsber. 1875. 267-275, vergl. F. d. M. VII. p. 18-19) gerichtet scheinen, ohne indess irgend eine dieser Feststellungen erschüttern zu können.

Sn.

L. Gegenbauer. Ueber das cubische Reciprocitätsgesetz. Wien. Ber. LXXXI. 1-5.

Beweis desselben mit Hülfe der elliptischen Function $p(u;\ 0,\ 1)$, welche die complexe Multiplication mit Zahlen von der Form $a+b\varrho$ (ϱ primitive dritte Wurzel der Einheit) zulässt. Eine Gattung von Functionen wird aufgefunden, unter deren Adjunction die durch die Formel

$$\frac{p(mu)}{p(u)} = \frac{\Phi([p(u)]^3)}{\Psi([p(u)]^3)}$$

definirte Function $\Psi(x^3)$ reductibel wird. Sn.

J. J. Sylvester. Sur la loi de réciprocité dans la théorie des nombres. C. R. XC. 1053-1057, 1104-1106.

R. Dedekind. Réponse à une remarque de M. Sylvester concernant les „Leçons sur la théorie des nombres de Dirichlet.“ C. R. XCI. 154-156.

Herr Sylvester sucht ein möglichst einfaches Verfahren zur Berechnung des Symbols $\left(\frac{a}{b}\right)$, und glaubt bei dieser Gelegenheit den ehemaligen Schülern Dirichlet's ein Missverständnis nachweisen zu müssen. Herr Dedekind widerlegt die betreffende Anmerkung und weist darauf hin, dass der Grundgedanke für

den Algorithmus des Herrn Sylvester, nämlich die Benutzung einer Kette von ungraden Zahlen, schon von Eisenstein (Crelle J. XXVII. 317) gegeben sei. Sn.

L. Gegenbauer. Algorithmen zur Bestimmung des verallgemeinerten Legendre'schen Symbols. Wien. Ber. 1880.

Der Herr Verfasser knüpft ebenfalls an obige Note des Herrn Sylvester an und legt den gedanklichen Zusammenhang des von diesem gegebenen Algorithmus mit den Gesichtspunkten von Herrn Kronecker und Eisenstein, und ausserdem den sachlichen Ursprung desselben in einer Kettenbruchentwickelung dar. Im Anschluss hieran giebt er zwei verwandte Kettenbruchentwickelungen. Sn.

L. Kronecker. Ueber die Potenzreste gewisser complexer Zahlen. Berl. Monatsber. 1880. 404-406.

Die Primtheiler, für welche die als Congruenzen aufgefassten Abel'schen Gleichungen Wurzeln haben, lassen sich auf zwei Arten bestimmen. Aus der Identität dieser Bestimmungen folgt im Falle quadratischer Gleichungen unmittelbar das quadratische Reciprocitätsgesetz; für die cubischen und biquadratischen Reste führen die allgemeinen Kreistheilungsgleichungen so zu einem vollständigen Beweise der analogen Gesetze. Im Anschluss an eine frühere Mittheilung (s. Abschn. II. Cap. 1. p. 65) zeigt der Herr Verfasser, wie sich hieraus nun die Weiterentwickelung der Theorie der Potenzreste namentlich auch für die von Herrn Kummer ausgeschlossenen Fälle erhoffen lässt.

Sn.

G. Zolotareff. Sur la théorie des nombres complexes. Liouville J. (3) VI. 51-85, 115-129, 145-167.

Ausführliche Darstellung der Theorie der idealen Factoren complexer Zahlen, welche mit Hülfe einer Wurzel einer be-

liebigen ganzen ganzzahligen Gleichung gebildet werden können. Wiederholung des bezüglichen wesentlichen Theiles der früheren, russisch geschriebenen Abhandlungen des Herrn Verfassers (vgl. F. d. M. VI. 1874. p. 117, IX. 1877. p. 125). Besondere Sorgfalt ist hier auf den Nachweis der genauen Analogie mit der von Herrn Kummer für die binomischen Gleichungen gegebenen Theorie verwandt. Neu ist die eingehende Behandlung der Division. Sn.

P. Bachmann. Ergänzung einer Untersuchung von Dirichlet. Clebsch Ann. XVI. 537-550.

Es soll die wahre Bedeutung der Formel von Dirichlet für die Classenanzahl H der quadratischen Formen mit complexen Coefficienten (Crelle J. XXIV.) aufgedeckt werden. Ist die Determinante $D = A+Bi$ ein Product von lauter ungleichen primären Primfactoren (primär heisse eine Zahl, in welcher der reelle Theil von der Form $4x+1$, der Coefficient des i von der Form 2μ ist), so wird

$$H = \lim \frac{8N(\sqrt{D})}{\pi \log \sigma} \cdot \Sigma\left(\frac{\lambda+\nu i}{D}\right) \cdot \frac{1}{(\lambda^2+\nu^2)^{1+\varrho}},$$

wo die Summation auf alle zu D relativ primen primären complexen Zahlen $\lambda+\nu i$ zu erstrecken ist; ϱ bedeutet eine gegen Null convergirende positive Grösse; $\left[\frac{\lambda+\nu i}{D}\right]$ das Jacobi'sche Zeichen der complexen Theorie; σ die Norm des Ausdrucks $T+U\sqrt{D}$, aus welchem alle Lösungen der Gleichung $t^2-Du^2=1$ durch die Formel

$$t+u\sqrt{D} = \pm(T+U\sqrt{D})^n$$

erhalten werden.

Dem Herrn Verfasser gelingt es, eine Formel abzuleiten, welche der von Dirichlet für quadratische Formen mit reellen Elementen und positiver Determinante gegebenen (Crelle J. XXI.) vollständig analog ist. Dieselbe lautet für den Fall, dass D von der Form $8h+1$:

$$N(T+U\sqrt{A+Bi})^{B} = N\left(\frac{\xi-\zeta\sqrt{A+Bi}}{2}\right)^{2},$$

wo ξ und ζ näher zu definirende complexe ganze Zahlen sind. Für dieselben gelten unter anderen folgende Relationen. Es bezeichne $\lambda(z)$ die Umkehrung der Function

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

es sei also

$$\lambda(z) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\frac{sn(z\sqrt{2})}{dn(z\sqrt{2})}$$

und ferner

$$\Omega = (1+i)\omega,$$

wo

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Dann genügen ξ, ζ den Gleichungen

$$\Pi_r \lambda\left(\frac{r\Omega}{A+Bi}\right) = \tfrac{1}{2}(\xi+\zeta\sqrt{A+Bi}),$$

$$\Pi_n \lambda\left(\frac{n\Omega}{A+Bi}\right) = \tfrac{1}{2}(\xi-\zeta\sqrt{A+Bi}),$$

wo die Producte über alle Zahlen r oder n zu erstrecken sind, für die

$$\left(\frac{r}{A+Bi}\right) = +1 \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{n}{A+Bi}\right) = -1.$$

Ist $A+Bi$ eine Primzahl, so ist ferner

$$\xi^2-(A+Bi)\zeta^2 = 4(A+Bi);$$

ist $A+Bi$ aber eine zusammengesetzte Zahl, so ist

$$\xi^2-(A+Bi)\zeta^2 = 4.$$

Aehnliche Formeln gelten für den Fall $8h+5$.

Sn.

G. Cantor. Zur Theorie der zahlentheoretischen Functionen. Clebsch Ann. XVI. 583-588, Gött. Nachr. 1880. 161-169.

Im Anschluss an eine Note des Herrn Lipschitz (C. R. LXXXIX. 948, 985; vergl. F. d. M. XI. 1879. p. 172) giebt der Herr Verfasser Sätze verwandter Art. Ferner analytische Darstellungen zahlentheoretischer Functionen. Sn.

G. Frattini. Un teorema aritmetico. Battaglini G. XVIII. 369-377.

Aus den Eigenschaften der von Jacobi eingeführten zahlentheoretischen Function $\psi(h, k, g)$ (vgl. Bachmann, Kreistheilung, S. 126) wird der Satz abgeleitet, dass die Zahlenreihen

$$\begin{array}{llll} \text{ind}\,2\quad, & \text{ind}\,3\quad, & \text{ind}\,4\quad, \ldots & \text{ind}(p-1) \\ \text{ind}\,1-\text{ind}\,2, & \text{ind}\,2-\text{ind}\,3, & \text{ind}\,3-\text{ind}\,4, \ldots & \text{ind}(p-2)-\text{ind}(p-1) \end{array}$$

Permutationen derselben Art sind, dass also die Zahl der in denselben enthaltenen Inversionen entweder in beiden grade oder in beiden ungrade ist. Sn.

A. Cayley. On the binomial equation $x^p-1=0$; trisection and quartisection. Proc. L. M. S. XI. 4-17.

Ableitung und Discussion der aus der Theorie der Kreistheilung bekannten Gleichungen für die Perioden, für den Fall, dass deren Anzahl drei oder vier ist. Sn.

E. Catalan. Théorème de Staudt et de Clausen. Darboux Bull. (2) III. 77-82.

$n, n', n'', \ldots$ seien ungrade Primzahlen, und $n-1$, $n'-1$, $n''-1, \ldots$ die Theiler von $q-1$. Dann ist die q^{te} Bernoulli'sche Zahl

$$-B_q = E_q + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \cdots,$$

wo E_q eine positive oder negative ganze Zahl. Zusätze. Sn.

A. E. Pellet. Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier. C. R. XC. 1339-1341.

Die Arbeit zeigt, wie man durch die Untersuchungen über die Divisoren der Kreistheilungsgleichung irreductible Functionen des Grades λ nach einem Primzahlmodul erhalten kann, falls λ nur Factoren des um eine Einheit vermehrten oder verminderten Modul enthält. No.

J. J. Sylvester. Sur les diviseurs des fonctions cyclotomiques. C. R. XC. 287-290, 345-347.

In der ersten Mittheilung giebt Herr Sylvester einige Resultate über die Divisoren der Kreistheilungsformen, die grösstentheils von Herrn E. Kummer (Crelle J. XXX. u. s. w.) vor längerer Zeit gefunden sind; in der zweiten Mittheilung schreibt der Herr Verfasser dieselben Herrn P. Bachmann zu. No.

Th. Pepin. Démonstration d'un théorème de M. Sylvester sur les diviseurs d'une fonction cyclotomique. C. R. XC. 526-528.

E. Lucas. Sur les fonctions cyclotomiques. C. R. XC. 855-857.

R. Dedekind. Sur la théorie des nombres complexes idéaux. C. R. XC. 1205-1207.

Alle diese Noten knüpfen an die im vorigen Referat besprochene an. Die erste, um einige der vorgelegten Sätze nochmals zu erweisen; die zweite, um vermeintliche Prioritätsansprüche zu erheben; die dritte endlich betrachtet die Lehre von den Divisoren der Kreistheilungsgleichungen als einen Specialfall der allgemeinen Theorie der Ideale. Sn.

G. Dostor. Questions sur les nombres. Grunert Arch. LXIV. 350-352.

$2n+1$ aufeinanderfolgende ganze Zahlen zu finden, so dass die Summe der Quadrate der $(n+1)$ ersten gleich der Summe der Quadrate der n übrigen sei. Sn.

G. DOSTOR. Sommation des cubes d'un certain nombre d'impairs consécutifs. Grunert Arch. LXIV. 353-355.

Die Summe der Cuben von $2n+1$ aufeinander folgenden ungraden Zahlen, deren erste $2n+1$ ist. Sn.

G. DOSTOR. Propriétés de la suite naturelle des nombres impairs. Grunert Arch. LXIV. 356-361.

Die ungraden Zahlen werden auf verschiedene Arten in Gruppen getheilt und die Gruppen summirt. Sn.

O. SCHLÖMILCH. Notiz über gewisse periodische Decimalbrüche. Schlömilch Z. XXV. 416.

Es werden alle periodischen Decimalbrüche gesucht, deren Periode eine grade Anzahl ($2k$) von Decimalstellen enthält, so dass sich die erste und die $(k+1)^{te}$, die zweite und $(k+2)^{te}$ u. s. f. derselben zu 9 ergänzen. Sn.

S. ROBERTS. Note on a problem of Fibonacci's. Proc. L. M. S. XI. 35-45.

Genaue Discussion des Systems diophantischer Gleichungen:

$$x^2+Py^2 = u^2, \quad x^2-Py^2 = v^2,$$

welches zuerst von Leonhard von Pisa vorgelegt und besonders in neuester Zeit öfters behandelt worden ist. Sn.

S. ROBERTS. Note on the integral solution of $x^2-2Py^2 = -z^2$ or $\pm 2z^2$ in certain cases. Proc. L. M. S. XI. 83-87.

Sehr sorgfältige Analyse der bezeichneten diophantischen Gleichungen. Sn.

Th. Pepin. Nouveaux théorèmes sur l'équation indéterminée $ax^4+by^4=z^2$. C. R. XCI. 100-102.

Der Herr Verfasser fährt hier fort mit der Aufstellung diophantischer Gleichungen von der angegebenen Form, welche keine rationalen Lösungen erlauben. (Vgl. C. R. LXXVIII. 144-148, LXXXVIII. 1255-1257, F. d. M. VI. 1874, 113, XI. 1879, 137.) Sämmtliche aufgeführten Formen sind immer noch von der Gestalt

$$(\alpha a^2+2\beta ab+\gamma b^2)x^4-(\alpha\gamma-\beta^2)y^4=z^2,$$

wie bereits in den früheren Referaten hervorgehoben wurde.

Sn.

E. Lucas. Sur un théorème d'Euler concernant la décomposition d'un nombre en quatre cubes positifs. Nouv. Ann. (2) XIX. 89-91.

Der Herr Verfasser nimmt im Gegensatz zu Herrn Lebesgue an, Euler habe seine Zerlegung bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die diophantische Gleichung $x^3+y^3=Az^3$ gefunden. Er zeigt ferner, dass jede positive ganze oder gebrochene Zahl auf unzählig viele Arten als Product oder als Quotient zweier Summen von zwei Cuben darstellbar ist. Sn.

E. Lucas. Théorèmes généraux sur l'impossibilité des équations cubiques indéterminées. Bull. S. M. F. VIII. 173-182.

Beweise und gelegentliche Einschränkungen der von Herrn Sylvester angegebenen Fälle, wann die Gleichungen

$$x^3+y^3=Az^3,\quad xy(x+y)=Az^3$$

in ganzen Zahlen unlöslich sind. Bezeichnen p, q Zahlen von der Form $18n+5$, $18n+11$, so darf A in keiner der Formen

$$p,\ p^2,\ q,\ q^2,\ 9p,\ 9p^2,\ 9q,\ 9q^2,\ 2p,\ 4p^2,\ 2q^2,\ 4q$$

enthalten sein. Sodann wird die im vorhergehenden Referat besprochene Arbeit und die Abhandlung (Nouv. Ann. (2) XVII. 425-426, vgl. F. d. M. X. 1878. 145-146) im Wesentlichen reproducirt.

Sn.

E. Lucas. Sur les cas d'impossibilité de l'équation $x^3+y^3=Az^3$. Nouv. Ann. (2) XIX. 206-211.

Anknüpfend an eine Arbeit über denselben Gegenstand (Nouv. Ann. (2) XVII. 507-514, vgl. F. d. M. X. 1878. 147) erledigt der Verfasser die auch im vorigen Referat hervorgehobenen Fälle, in denen A von der Form $6n+1$ war. Sodann wird erwähnt, dass A auch nicht von den Formen

$$2r,\ 2r^2,\ 2s,\ 2t^2,\ 4r,\ 4r^2,\ 4t,\ 4s^2$$

sein darf, wo r, s, t die Linearfactoren $18n+1$, $18n+13$, $18n+17$ bedeuten. Zum Schluss folgen einige Sätze über die Fälle, in welchen die obige diophantische Gleichung lösbar ist. Sn.

R. Hoppe. Rationales Dreieck, dessen Seiten auf einander folgende ganze Zahlen sind. Grunert Arch. LXIV. 441-443.

Sind n, $n\pm1$ die drei Seiten, so ist die allgemeine Lösung

$$n=(2+\sqrt{3})^k+(2-\sqrt{3})^k \qquad (k=0, 1, \ldots)$$

und der Inhalt des Dreiecks

$$=\sqrt{3}\ \frac{(2+\sqrt{3})^{2k}-(2-\sqrt{3})^{2k}}{4}.$$

H.

F. Bessel. Rationale sphärische Dreiecke. Grunert Arch. LXV. 363-373.

Es werden sphärische Dreiecke gefunden, für welche die trigonometrischen Tangenten der halben Winkel und der halben Seiten rational sind und aus diesen mittels einer von Herrn Hoppe früher angegebenen Methode unbegrenzt viele abgeleitet.

Sn.

A. Kunerth. Berechnung der ganzzahligen Wurzeln unbestimmter quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten aus den für letztere gefundenen Brüchen, nebst den Kriterien der Unmöglichkeit einer solchen Lösung. Wien. Ber. 1880.

Im Anschluss an eine frühere Abbandlung des Verfassers (Wien. Ber. 1878, vgl. F. d. M. X. 1878, p. 141) werden hier Methoden angegeben, aus rationalen Lösungen diophantischer Gleichungen zweiten Grades ganzzahlige abzuleiten. Nach Erledigung der einfachsten Fälle folgt eine Discussion der aus der bekannten Kettenbruchentwickelung sich ergebenden Lösungen. Viele Zahlenbeispiele. Sn.

E. Lucas. Sur un problème de Diophante. Nouv. Ann. (2) XIX. 278-279.

Vier Zahlen zu finden, so dass die um Eins vermehrten Producte von je zweien derselben Quadratzahlen sind.

Sn.

S. Réalis. Sur quelques questions se rattachant au problème de Pell. N. O. M. VI. 306-312.

Der Verfasser giebt eine Methode, um die Hauptformeln, die sich auf dies Problem beziehen, auf einem directen Wege aufzustellen, der einer Ausdehnung auf allgemeine Fragen fähig ist.

Mn. (O.)

David. Sur la partition des nombres. C. R. XC. 1344-1346, XCI. 621-622.

Zwei Methoden, alle Lösungen der Gleichung

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots = n$$

sofort hinzuschreiben. Sn.

A. Cayley. On the theorems of the 2, 4, 8 and 16 squares. Quart. J. XVII. 258-276.

S. Roberts. Additional note on the impossibility of the general extension of Euler's theorem. Quart. J. XVII. 276-280.

Herr Roberts hatte in einer früheren Arbeit (Quart. J. XVI. 159-170, vgl. F. d. M. VIII. 1876, 147-148) den Nachweis geführt, dass das Product zweier Summen von sechszehn Quadraten

nicht allgemein als Summe von sechszehn Quadraten darstellbar sei. Er hält seinen Beweis den Einwürfen und Verbesserungsvorschlägen des Herrn Cayley gegenüber aufrecht. Sn.

C. Henry. Généralisation d'un théorème d'arithmétique. Nouv. Ann. (2) XIX. 517-518.

Es wird gezeigt, dass nicht nur das Quadrat jeder ungraden Zahl, sondern auch das doppelte Quadrat einer Zahl von der Form $8n+1$ und das dreifache Quadrat einer Zahl von der Form $6n+3$ als Differenz von zwei relativ primen Dreieckszahlen darstellbar sei. Sn.

Lefébure. Sur la résolution de l'équation $x^n+y^n=z^n$ en nombres entiers. C. R. XC. 1406.

Th. Pepin. Sur diverses tentatives de démonstration du théorème de Fermat. C. R. XCI. 366-368.

Alle Primzahlen p von der Form $2kn+1$ lassen sich in zwei Gruppen zerlegen, je nachdem die algebraische Summe der n^{ten} Potenzreste von je dreien unter ihnen ein Vielfaches von p ergeben kann oder nicht. Herr Lefébure behauptet, dass alle Primzahlen der letzteren Art Theiler einer der Grössen x, y oder z einer ganzzahligen Lösung der Gleichung $x^n+y^n=z^n$ sein müssen und will hieraus einen Beweis für die Unmöglichkeit solcher Lösungen herleiten. Herr Pepin macht darauf aufmerksam, dass bereits Libri auf die Aussichtslosigkeit dieses Unternehmens hingewiesen hat und beweist Libri's bezügliches Theorem von Neuem. Sn.

A. Korkine. Sur l'impossibilité de la relation algébrique $x^n+y^n+z^n=0$. C. R. XC. 303-304.

Verbesserung eines von Herrn Liouville (C. R. LXXXIX. 1108-1110, vgl. F. d. M. XI. 1879, 138) gegebenen Beweises.

Sn.

O. Schier. Zur Theorie der Potenzsummen. Wien. Ber. LXXXII.

Es wird die Gleichung

$$x^n+y^n+z^n = U^n$$

untersucht, wo n ungrade Primzahl, x, y, z ganze Zahlen ohne gemeinsamen Factor sein sollen. Es ergeben sich durch immer neue Bedingungen immer speciellere Formen der x, y, z, U, bis nur der Fall $n = 3$ als möglich übrig bleibt. Hierbei ist jedoch folgendes zu bemerken. Auf der zweiten Seite nach Gleichung II. ist eine Gleichung von der Form

$$(y+z)M = nN$$

aufgestellt, aus welcher der Verfasser schliesst, dass $y+z$ den Factor n haben müsse. Der Nachweis, dass M den Factor n nicht haben könne, fehlt gänzlich. Daher bleibt es fraglich, ob das Resultat das einzig mögliche sei. Für $n = 3$ ergiebt nun die Gleichung die einzige Lösung

$$3^3+4^3+5^3 = 6^3.$$

Lässt man die Bedingung, dass x, y, z relativ prim seien, fallen, so erhält man zugleich eine zweite Lösung

$$6^3+1^3+8^3 = 9^3.$$

Weiter wird die Gleichung für $n = 2$ betrachtet, ihre allgemeine Lösung (vermuthlich weil sie bekannt ist) nicht hergeleitet, sondern nur ein einfacher Fall

$$(bc)^2+[b(b+c)]^2+[c(b+c)]^2 = (bc+b^2+c^2)^2$$

entwickelt. Der Verfasser nennt die so erhaltene Zusammensetzung der x, y, z bei fernerer Anwendung eine nothwendige, trotzdem er sie durch specielle Annahme gefunden hat, und stützt darauf den Beweis, dass für $n = 4$ keine Lösung existirt, analog für alle graden n. Dass der Ausdruck x, y, z in b, c nicht der allgemeinste ist, zeigt ein Beispiel, wie etwa $2^2+61^2+62^2 = 87^2$.

H.

A. Desboves. Théorème sur les équations cubique et biquadratique. C. R. XC. 1069-1070.

Für die Gleichungen

$$(1)\quad aX^3+bY^3+gXY^2+eXY^2 = cZ^3,$$
$$(2)\quad aX^4+bY^4+dX^2Y^2+fX^3Y+gXY^3 = cZ^2$$

kann man eine Lösung (X, Y, Z) durch Functionen dritten Grades von (x, y, z) im Falle (1), durch Functionen vierten und achten Grades im Falle (2) bestimmen, wenn (x, y, z) die Lösung einer Gleichung dritten bez. vierten Grades ist, und wenn die linken Seiten von (1), bez. (2) gleich Null gesetzt eine ganzzahlige Lösung besitzen. No.

Th. Pepin. Sur quelques équations biquadratiques et indéterminées. Acc. P. N. L. XXXI. 397-428.

Anwendung der in der oben erwähnten Abhandlung gegebenen Formeln auf Gleichungen von der Form

$$Au^2 = Bx^4+Cy^4.$$

Es gelingt, die Gleichungen

$$u^2 = 3x^4-2y^4,$$
$$8u^2 = x^4+7y^4,$$
$$5u^2 = 7x^4-2y^4$$

vollständig zu lösen. Sn.

Th. Pepin. Sur la réduction d'une formule biquadratique à un carré. Acc. P. N. L. XXXII. 166-202.

Es wird gezeigt, dass unter Anwendung rationaler Substitutionen die Aufgabe nur dann allgemein lösbar ist, wenn das vorgelegte Polynom doppelte Wurzeln hat, reciprok oder sonst irgendwie auf eine Form zweiten Grades zurückführbar ist.

Sn.

Th. Pepin. Nouvelles formules pour réduire à un carré la valeur d'un polynôme rationnel du quatrième degré. Acc. P. N. L. XXX. 211-297.

Methoden, um aus einem rationalen Werth des x, welcher $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$ rational macht, unzählig viele Werthe von derselben Eigenschaft zu finden. Beziehungen dieses Problems zur Theorie der Vervielfältigung elliptischer Integrale.

Sn.

Scott, G. Eastwood. Solutions of a question (6181). Educ. Times XXXIII. 71.

Die n^{te} ungrade Potenz einer ungraden Zahl (grösser als 1) kann als die Differenz zweier Quadratzahlen auf n verschiedene Weisen dargestellt werden.

O.

F. Pisani. Solution d'une question (1318). Nouv. Ann. (2) XIX. 524-526.

Es werden Zahlen gesucht, die gleich der Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Zahlen und gleichzeitig gleich der Summe der Quadrate dreier aufeinanderfolgender Zahlen sind. Es giebt deren unendlich viel, wie z. B. 5, 365, 35645 u. s. f.

O.

Th. Pepin. Sur quelques équations indéterminées du second degré et du quatrième. Acc. P. N. L. (3) XXXII. 79-129.

Für die Gleichungen

$$a\xi^2+2b\xi\zeta+c\zeta^2 = u^2,$$
$$ax^4+2bx^2y^2+cy^4 = z^2$$

werden die Bedingungen der Löslichkeit aufgestellt, die Auffindung einer particulären Lösung und die Ableitung der allgemeinen aus derselben gezeigt. Die hier gegebene Methode für die erste Gleichung wird mit der von Gauss verglichen.

Sn.

E. Catalan. Un nouveau théorème empirique. N. C. M. VI. 552-553.

Die Summe der fünften Potenzen der n ersten natürlichen Zahlen oder das Neunfache dieser Summe lässt sich in drei ganze und positive Quadrate zerlegen. Mn. (O.)

C. Henry. Remarque sur un article des Nouvelles Annales. Nouv. Ann. (2) XIX. 454-455.

Die Notiz bezieht sich auf eine Arbeit von Dostor über die Berechnung von gleichen Potenzen der x ersten Zahlen (s. F. d. M. XI. 1879. p. 178). Der Verfasser bemerkt, dass die dort gegebenen Formeln nicht so einfach seien, wie die früher (1873) von Herrn E. Lucas, „Recherches sur l'analyse indéterminée et l'arithmétique de Diophante," Moulins p. 79-88 gegebenen. Letztere beruhten auf dem Satz: „Die Summe grader Potenzen der x ersten Zahlen ist algebraisch theilbar durch die Summe der Quadrate der x ersten Zahlen, und der Quotient ist eine ganze Function von $y = x(x+1)$." O.

Sondat. Solution d'une question (1296). Nouv. Ann. (2) XIX. 458-459.

Sind

$$A\alpha^3+B\beta^3+C\gamma^3 = 0 \quad \text{und} \quad A\alpha'^3+B\beta'^3+C\gamma'^3 = 0$$

zwei verschiedene Lösungen der Gleichung

$$Ax^3+By^3+Cz^3 = 0,$$

so ist

$$\begin{aligned} x &= B\beta\beta'(\alpha\beta'-\alpha'\beta)+C\gamma\gamma'(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma),\\ y &= C\gamma\gamma'(\beta\gamma'-\beta'\gamma)+A\alpha\alpha'(\beta\alpha'-\beta'\alpha),\\ z &= A\alpha\alpha'(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)+B\beta\beta'(\gamma\beta'-\gamma'\beta) \end{aligned}$$

eine dritte Lösung. O.

M. Rochetti. Solution d'une question (1312). Nouv. Ann. (2) XIX. 459-460.

Umformung des Products

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2[(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2]$$

in eine Summe von drei Cuben. O.

M. Rochetti. Solution d'une question (1313). Nouv. Ann. (2) XIX. 431.

Eine Zahl p, die Summe von n ganzen Cuben, ist gegeben. Man soll eine Zahl q so bestimmen, dass p^2q gleich der algebraischen Summe von n ganzen Cuben ist. Es ergiebt sich

$$q = \sum_{n=1}^{n=n} p^{3n-2}.$$

O.

E. Fauquembergue. Solution d'une question (1297). Nouv. Ann. (2) XIX. 430-431.

Zerlegung des Vierfachen und des Quadrates von $4p^6+27q^6$ in die Summe zweier Cuben. O.

Th. Pepin. Solution d'un problème de Frénicle sur deux triangles rectangles. Acc. P. N. L. XXXIII. 284-290.

Zwei rationale rechtwinklige Dreicke zu finden, so dass die Hypotenuse des einen gleich einer Kathete des anderen, und dass die Differenz der Katheten in beiden Dreiecken die nämliche ist. Die Aufgabe verlangt die Verwandlung eines Polynoms vom vierten Grade in ein Quadrat. Sn.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben zahlentheoretischen Inhalts von Kniseley, H. Pollexfen, Moret-Blanc, J. Lissençon, E. Santomauro finden sich Educ. Times XXXIII. 110-111; Nouv. Ann. (2) XIX. 461-462, 472-473; Riv. d. mat. el. (2) I. 229-237.

O.

E. Fresby. On magic squares. Wash. Bull. III. 143-147.

Sn.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

F. Mertens. Zur Lehre von den quadratischen Formen mit positiver Determinante. Borchardt J. IXC. 332-339.

Ein Beweis des Hauptsatzes, dass zwei reducirte Formen von gleicher Determinante nur dann eigentlich äquivalent sein können, wenn sie derselben Periode angehören, der sich neben die Beweise von Gauss und Dirichlet stellt.

Vorausgeschickt werden die Begriffe des „rechten Nachbars" und der „Periode". Zu jeder reducirten Form (a, b, a') gehört bekanntlich eine zweite (a', b', a''), wo $b+b' \equiv 0 \pmod{a'}$. Dies ist der rechte Nachbar der ersten Form. Dabei bestimmen sich b' und a'' durch

$$b' = -b+h(a'), \quad a'' = \frac{b'^2-D}{a'},$$

wo (a') der Zahlenwerth von a' und h die grösste in $\frac{\sqrt{D}+b}{(a')}$ enthaltene ganze Zahl ist. So kann man einen Cyclus

$$f, f_1, f_2, \dots f_{n-1}, f_n$$

bilden, wo f_{i+1} der rechte Nachbar von f_i und f_n wieder f ist. Die Formen f bis f_{n-1} bilden dann eine Periode, wo die ersten Coefficienten abwechselnde Vorzeichen besitzen. Daher kann man für die beiden vorausgesetzten eigentlich äquivalenten reducirten Formen f, F annehmen, dass ihre ersten Coefficienten positiv sind. Die Substitution $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$ führe f in F über. Aus der ersten immer erlaubten Annahme folgt sogleich die zweite, dass α immer positiv genommen werden kann. Von den zwei nur möglichen Fällen $\beta = 0$ und β nicht $= 0$ wird der erste sofort dadurch erledigt, dass dann auch $\gamma = 0$ ist, und dann sind f und F identisch. (Umgekehrt folgt auch $\beta = 0$ aus $\gamma = 0$.) Im zweiten Fall ist es weiter erlaubt, auch β positiv anzunehmen

(nöthigenfalls hätte man nur f mit F zu vertauschen). Dann sind aber auch γ und δ positiv. Man kann also alle Coefficienten der Substitution, die f in F überführt, immer als positiv annehmen. Dann wird der rechte Nachbar von f gebildet, aber in einer von der gewöhnlichen abweichenden Form. Die obige Zahl h lässt sich nämlich ersetzen durch die Zahl h_1, die einfacher die grösste in $\frac{\delta}{\beta}$ enthaltene ganze Zahl darstellt. Es ist also

$$\delta = h_1\beta + \delta'.$$

Bildet man nun wieder den rechten Nachbar von $f_1:f_2$, so zeigt sich, dass die Substitution $\binom{\alpha'\ \beta'}{\gamma'\ \delta'}$, die f_2 in F_2 überführt, lauter positive und durchweg kleinere Coefficienten besitzt als $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$. Ist speciell $\gamma' = 0$, so ist nach Obigem $f_2 = F$. Ist dies nicht der Fall, so geht man analog von f_2 über zu f_4. Die Coefficienten der neuen Substitution $\binom{\alpha''\ \beta''}{\gamma''\ \delta''}$, die f_4 in F überführt, sind wieder positiv und noch kleiner als die früheren. Die fallende Reihe der γ: $\gamma, \gamma', \gamma'', \dots$ muss nach einigen Schritten abbrechen, d. h. man gelangt zu einer Zahl $\gamma^{(m)} = 0$. Dann ist aber $f_{2m} = F$, was zu beweisen war. My.

J. Gierster. Ueber Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. Erl. Ber. 1880, Clebsch Ann. XVII. 71-84.

Ueber den ersten Theil dieser Mittheilungen ist schon F. d. M. XI. 1879. 146 referirt. Er enthält die Relationen zwischen Classenzahlen pp, die durch Gleichsetzung der beiden Moduln aus den Klein'schen Ikosaeder-Modulargleichungen folgen. Der zweite beschäftigt sich im Anschluss an die Klein'sche Theorie der elliptischen Modulfunctionen (cfr. die Note von Klein) mit den unendlich vielen entsprechenden Classenzahlrelationen. Das Mittel, sie zu erhalten, besteht darin, die „Coincidenzen“ der Klein'schen

Modularcorrespondenzen m^{ter} Stufe einmal arithmetisch, einmal algebraisch abzuzählen.

Das erste ergiebt immer eine Summe von Classenzahlen; die Vergleichung beider Producte die gesuchte Relation. m kann unendlich viele Werthe annehmen.

Die arithmetische Abzählung bietet nach Angabe des Herrn Verfassers keine principielle Schwierigkeit, für eine beliebige Primzahlstufe wird sie durchgeführt.

Bei der algebraischen Abzählung macht die allgemeine Definition der Modularcorrespondenz m^{ter} Stufe viel Mühe. Der Herr Verfasser beschränkt sich daher auf den Fall, wo das Geschlecht $p = 0$ ist. Dann hat man es nur mit Modulargleichungen schlechthin zu thun. „Die dahin gehörigen Classenzahlrelationen enthalten auch die acht Kronecker'schen Formeln und zwar als Formeln 2ter, 4ter, 8ter, 16ter Stufe."

Das ganze System der zu $p = 0$ gehörigen Relationen theilt der Umstand, „dass ihre rechten Seiten sich durch höchst einfache a priori angebbare Theilersummen darstellen lassen." Als Beweis werden wirklich aufgestellt die Gesammtergebnisse, die zur 7ten Stufe gehören.

Das Referat kann auf die Ausführungen im Einzelnen nicht gut eingehen, da sie die Klein'sche Theorie der Modulfunctionen vollständig voraussetzen. Folgendes möge aber noch besonders hervorgehoben werden.

Bei der arithmetischen Abzählung tritt als Factor der Classenzahlsumme eine wichtige Grösse auf, das Gewicht g (nach Herrn Klein). Dies ist zugleich die Zahl der linearen Transformationen der Modularcorrespondenzen in sich, die zugleich das Verhältnis der ursprünglichen Moduln zu den transformirten ungeändert lassen.

Bei der Aufstellung der rechten Seiten der Relationen für die 7te Stufe treten vier ausgezeichnete Hauptmoduln auf, aus denen sich alle übrigen rational zusammensetzen. Daher gelingt es, alle Formeln 7ter Stufe mit Hülfe eines Parameters $\xi(n)$ einfach darzustellen. Dieser Parameter aber selbst ist eine noch zu erforschende complicirtere zahlentheoretische Function.

Am Schlusse setzt der Herr Verfasser sein Verhältnis zu den hierhergehörigen Arbeiten von Liouville und Kronecker kurz auseinander. My.

Th. Pepin. Composition des formes quadratiques binaires. Acc. P. N. L. XXXIII. 6-73.

Der Herr Verfasser stellt die Lehren über die Composition quadratischer binärer Formen in voller Allgemeinheit, also ohne sich auf die Betrachtung von Formen derselben Determinante zu beschränken, zusammen. Er vermeidet dabei langwierige Rechnungen, durch die bei Gauss das Studium der entsprechenden Untersuchungen erschwert wird. Es ist hier nicht möglich die Einzelheiten der Arbeit zu verfolgen; doch sei wenigstens auf die neuen Theoreme des letzten Abschnittes aufmerksam gemacht. Die einzelnen Paragraphen behandeln: Die nothwendigen Bedingungen dafür, dass eine Form in ein Product zweier gegebener anderer transformirbar sei; die Lösung des Fundamentalproblems der Zusammensetzung quadratischer Formen; die Zusammensetzung der Formen von gleicher Determinante; die Zusammensetzungen der Ordnungen, Genera und Classen; die Eintheilung der Classen in Perioden; die quadratischen Formen, welche zu gewissen Potenzen ganzer Zahlen gehören. No.

A. Markoff. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. Clebsch Ann. XVII. 379-400.

Fortsetzung der Arbeit Clebsch Ann. XV. (cf. F. d. M. XI. 1879. p. 147). Einer jeden Classe von binären quadratischen Formen von positiver Determinante entsprach eine bestimmte Reihe ganzer positiver Zahlen

$$\dots \alpha_{-3}\ \alpha_{-2}\ \alpha_{-1}\ \alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2 \dots$$

und umgekehrt.

Das Verhältnis zwischen $2\sqrt{D}$ und dem Minimum dieser Formen ist gleich dem Minimum der Summe der beiden Kettenbrüche

$$\alpha_k + \cfrac{1}{\alpha_{k+1} + \cfrac{1}{\alpha_{k+2} + \cdots}} + \cfrac{1}{\alpha_{k-1} + \cfrac{1}{\alpha_{k-2} + \cdots}} = \frac{2}{S_k} \quad (k \text{ variabel}).$$

Es werden nun mehrere verschiedene Specialfälle untersucht. Der wichtigste darunter ist durch die Ungleichung bestimmt

$$S_k \geqq l > \tfrac{2}{3} \text{ für jedes } k.$$

Für diesen Fall wird die Periode der Reihe der α bestimmt, sowie das Maximum von $\frac{2}{S_k}$.

Für die Perioden, die verschiedenen Werthen von k zugehören, wird eine Tabelle aufgestellt, die sich schon im ersten Band von Bernoulli's „Recueil pour les astronomes“ findet.

Eine Anwendung wird gemacht auf die Lösung der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

in ganzen und positiven Zahlen. My.

H. Poincaré. Sur les formes cubiques ternaires.

C. R. XC. 1336-1339.

Die ternären cubischen Formen werden je nach den Eigenschaften der Curven, welche sie repräsentiren können, in sieben Classen getheilt. Es werden die Eigenschaften der linearen Substitutionen untersucht, welche eine gegebene Form in sich selbst überführen. Für jede Classe giebt es reducirte Formen, deren Coefficienten angegebene Grössen nicht übersteigen. In begrenzter Zahl kommen solche nur in einzelnen Classen vor. Diese und ähnliche Resultate sind auszugsweise angegeben.

No.

H. Poincaré. Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire. C. R. XCI. 844-846.

Auszug aus einer Fortsetzung der eben besprochenen Arbeit. Andeutungen über die Substitutionen, welche eine quadratische und eine lineare Substitution in sich selbst transformiren. Ist m eine gegebene ungrade Zahl, und sind a, b die kleinsten ganzen, c, d die kleinsten ungraden ganzen Zahlen, welche die Gleichungen

$$a^2-b^2m = 1, \quad c^2-d^2m = 4$$

erfüllen, so ist

$$\left(\frac{c+d\sqrt{m}}{2}\right)^3 = a+b\sqrt{m}.$$

No.

C. Jordan. Sur l'équivalence des formes. C. R. XC. 1422-1423.

Es sei

$$F = \text{Norm}(a_{11}\, x_1+\cdots+a_{1n}x_n)+\cdots+\text{Norm}(a_{n1}\, x_1+\cdots+a_{nn}x_n);$$

die x und die a können complex sein. Jede Form F mit einer nicht verschwindenden Determinante kann auf eine andere reducirt werden, in der die Moduln der Coefficienten unterhalb gewisser Grenzen liegen. Die F mit ganzzahligen Coefficienten, welche zu derselben Determinante gehören, theilen sich in eine endliche Anzahl von Classen. Die linearen Substitutionen mit ganzen Coefficienten, welche eine Reducirte in sich selbst überführen, haben Grenzen für die Moduln ihrer Coefficienten. (Vgl. das Referat p. 105.) No.

L. Charve. De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de son application aux irrationnelles du troisième degré. Ann. d. l'Éc. N. (2) IX. Suppl. 3-156.

I. Ueber die Reduction der quadratischen Formen. II. Reductionsmethode von Selling. Nach kurzer Besprechung der Arbeiten von Gauss, Seeber, Eisenstein, Dirichlet wird die von Herrn Selling angegebene Methode behandelt. Wir verweisen

hinsichtlich derselben auf das Referat F. d. M. VI. 1874, 128-131. Es wird gezeigt, dass die aufgestellten Bedingungen ausreichen, um zu jeder gegebenen Form eine einzige reducirte Form festzulegen, falls man von der Anordnung der Coefficienten absieht. Daran schliesst sich der Beweis des Gauss'schen Satzes, dass das Product der drei Minimalwerthe einer Form kleiner als das Doppelte ihrer Determinante ist. III. Untersuchung der Substitutionen, durch welche eine Form reducirt wird. Es handelt sich dabei um die Reduction einer Form, welche aus einer reducirten dadurch entsteht, dass ein, oder dass mehrere Coefficienten durch stetige hinreichend kleine Aenderungen die Bedingungsgrenzen überschreiten, welche die ursprüngliche Form zu einer reducirten machten. Dann lässt sich die Reduction der neuen Form durch die Combination zweier Substitutionen S, T mit den Coefficienten 0, $+1$, -1 erreichen, und umgekehrt lässt sich jede Substitution, welche die Reduction leistet, aus S und T combiniren; die beiden lassen sich nicht aufeinander zurückführen. IV. Untersuchung der Irrationalitäten dritten Grades. Hermite'sche Methode. A) Gleichungen dritten Grades, bei denen nur eine Wurzel reell ist. Es seien α, β, γ diese Wurzeln, Δ eine positive veränderliche Grösse,

$$f = (x+\alpha y+\alpha^2 z)^2+2\Delta(x+\beta y+\beta^2 z)(x+\gamma y+\gamma^2 z)$$

mit der Determinante $D = +A^2\Delta^2$, wobei $-A^2$ die Discriminante der Gleichung dritten Grades ist. Reducirt man f, so erhält man bis auf einen constanten Factor eine Form

$$F = (X+A_1 Y+A_2 Z)^2+2\Delta P(X+B_1 Y+B_2 Z)(X+C_1 Y+C_2 Z),$$

in welcher die Coefficienten A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 unterhalb gewisser durch A^2 bestimmter Grössen liegen. Lässt man daher Δ beständig wachsen, so durchläuft F eine Reihe von Formen, bei denen diese Coefficienten sich periodisch wiederholen. Es wird bewiesen, dass die im vorigen Abschnitte besprochenen Substitutionen, durch welche eine durch stetiges Wachsen von Δ aus F entstandene Form reducirt wird, sich gleichfalls periodisch wiederholen. Es wird dies an den Gleichungen

$$x^3-2=0, \quad x^3-3=0, \quad x^3-2x-5=0$$

durchgeführt. B) Gleichungen dritten Grades, deren drei Wurzeln reell sind. Hier wird

$$f = (x+\alpha y+\alpha^2 z)^2+A(x+\beta y+\beta^2 z)^2+B(x+\gamma y+\gamma^2 z)^2$$

zu Grunde gelegt; A und B durchlaufen die Werthe von 0 bis ∞; die reducirte Form wird bis auf einen constanten Factor

$$F = (X+A_1 Y+A_2 Z)^2+AP(X+B_1 Y+B_2 Z)^2+BQ(X+C_1 Y+C_2 Z)^2,$$

wo für die sechs Coefficienten A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 gleichfalls obere Grenzen bestehen; die obigen Schlüsse wiederholen sich; aber wegen der beiden Variabeln A, B giebt es für die sich wiederholenden Substitutionen doppelte Periodicität. Die Sache lässt sich geometrisch u. A. so darstellen, dass die bei der reducirten Normalform auftretenden sechs Coefficienten, welche in A, B linear sind, als Linien in der A, B-Ebene, die Form selbst als Sechseck aufgefasst werden; die Bedingung dafür, dass die Form reducirt sei, ist dann die, dass der Punkt (A, B) innerhalb des Sechsecks liege. Ueberschreitet (A, B) eine Seite desselben, so geht er in ein anderes, der neuen Form angehöriges Sechseck über. Die doppelte Periodicität liefert je nach der Art des Fortganges zwei Reihen von unter sich periodischen Sechsecken; die Vereinigung beider Schemata überdeckt die gesammte A, B-Ebene. Periodisch ist nur die Art des Ueberganges; die einzelnen Polygone sind von einander verschieden. Die Sechsecke können degeneriren. An einigen Beispielen wird die Theorie erläutert. V. Complexe Einheiten, welche aus Irrationalitäten dritten Grades gebildet sind. Mit Hülfe einer reducirten Form und einer complexen Einheit ist eine zweite reducirte Form ableitbar; durch zwei reducirte Formen bestimmt sich eine complexe Einheit.

No.

Capitel 3.

Kettenbrüche.

Laguerre. Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynôme entier. Liouville J. (3) VI. 99-110.

Laguerre. Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels. Bull. S. M. F. VIII. 21-27.

G. Humbert. Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions. Bull. S. M. F. VIII. 182-187.

G. Humbert. Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques. Bull. S. M. F. VIII. 191-196.

Siehe Abschn. VII. Cap. 1.

C. Schmidt. Ueber die Eigenschaften des aus einer Quadratwurzel hervorgehenden Kettenbruches. Pr. Spremberg.

Die Abhandlung ist, abgesehen von einigen kritischen Bemerkungen, für Schüler geschrieben. Sie stellt in neuer und eigenthümlicher, dabei klarer und übersichtlicher Art die Eigenschaften der periodischen Kettenbrüche zusammen, welche reinen quadratischen Gleichungen entsprechen. No.

B. Hansted. Trois théorèmes relatifs à la théorie des nombres. Teixeira J. II.

III. Entwickelung von $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ in einen Kettenbruch von der Form:

$$\alpha_0 + \beta_0\sqrt{c} + \cfrac{1}{\alpha_1 + \beta_1\sqrt{c} + \cfrac{1}{\alpha_2 + \beta_2\sqrt{c} + \cdots}}$$

wo a, b, α_0, $\beta_0, \dots$ ganze Zahlen sind und c ganz und positiv ist. Tx. (O.)

HERMES. Rechenschema für die Verwandlung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch. Grunert Arch. LXIII. 438-443.

Durch eine geschickte Anordnung der Recursionsformeln, welche für die Lagrange'sche Kettenbruchentwickelung einer Quadratwurzel massgebend sind, gelangt der Verfasser zu folgendem Schema:

$$\sqrt{D} = \sqrt{a^2+d_1} \backsim a_0, \quad a_1 = a_0 - r_1, \quad a_2 = a_1 - r_2, \quad a_3 = a_2 - r_3, \dots$$

$$\frac{2a_0}{d_1} = k_1 + \frac{r_1}{d_1}, \quad \frac{2a_1}{d_2} = k_2 + \frac{r_2}{d_2}, \quad \frac{2a_2}{d_3} = k_3 + \frac{r_3}{d_3} \dots$$

$$d_2 = 1 + r_1 k_1, \quad d_3 = d_1 + r_2 k_2, \quad d_4 = d_2 + r_3 k_3 \dots$$

und endlich

$$\sqrt{D} = a_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \cdots + \cfrac{1}{2a_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cdots}}}}}.$$

Wie ungemein dieses Verfahren, dem gewöhnlichen gegenüber, die Rechnung abkürzt, leuchtet von selbst ein. Auch einige andere Theoreme erhalten in der Abhandlung einfachere Beweise. Gr.

W. JUNG. Ein neuer Kettenbruch für die Zahl π. Casopis IX. 157. (Böhmisch.).

Das Resultat der Transformation und Specification des bekannten Kettenbruchs für arctg liefert dem Verfasser die Formel

$$\frac{\pi}{2} = \cfrac{\sqrt{3}}{1 + \cfrac{1^2}{3\cdot 3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{3\cdot 7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{3\cdot 11 + \cdots}}}}}}$$

Std.

Vierter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

Fr. Gerbaldi. **Nota sopra alcune applicazioni di una formola combinatoria.** Battaglini G. XVIII. 308-317.

Der Verfasser geht von der Identität aus

$$\binom{m-m'}{n} = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{m'}{r} \binom{m-r}{n-r},$$

wo $\binom{m}{r}$ die Anzahl der Combinationen von je r aus m Elementen bezeichnen soll. Er zeigt zunächst, wie dieselbe umgeformt für die Beweise verschiedener bekannter Sätze benutzt werden kann, und kommt dann auf die Sätze:

1) dass eine Zahl, gleich

$$\sum_{i=0}^{i=n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^r$$

durch $1, 2 \dots n$ theilbar ist,

2) dass eine Zahl, gleich

$$\sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \frac{i^\mu}{1.2\dots i \; 1.2\dots(n-i)},$$

stets eine ganze Zahl ist, und zwar gleich 0, wenn $\mu < n$ und gleich 1, wenn $\mu = n$, sowie auf einige weitere, deren Anführung wir uns versagen müssen, da wir sonst auf die Umformungen selbst einzugehen hätten. Ls.

F. J. STUDNIČKA. Ueber eine neue Formel der Combinatorik. Prag. Ber. 1879. 295-298.

Es handelt sich um die allgemeine Formel für die Summe der aus den Elementen

$$1, 2, 3 \ldots n-1$$

gebildeten Combinationen k^{ter} Ordnung. Der Verfasser findet

$$\Sigma C_k = \frac{1}{k}\begin{vmatrix} (n)_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ (n)_3 & (n-1)_2 & -2 & \cdots & 0 \\ (n)_4 & (n-1)_3 & (n-2)_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ (n)_{k+1} & (n-1)_k & (n-2)_{k-1} & \cdots & (n-k+1)_2 \end{vmatrix}.$$

Ls.

L. P. M. PEGADO. Théorie générale des combinaisons avec répétitions. Jorn. d. sc. m., ph. e nat. VIII. (Portugiesisch).

Die Arbeit enthält die Elemente der Combinationslehre. Der Verfasser beginnt mit dem Beweise, dass die Anzahl der Anordnungen, die man r Elementen geben kann, von denen das erste αmal, das zweite βmal etc. vorkommt, gleich $\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}$ ist, und giebt eine Methode zur Aufstellung dieser Anordnungen an. Dann sucht er die Zahl der Anordnungen vom m Elementen zu n mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gleichen Elementen und findet

$$n!\left\{\frac{{}^{m-r}C_{n-\alpha-\beta\ldots}}{\alpha!\,\beta!\ldots}+\frac{{}^{m-r}C_{n-\beta-\gamma\ldots}}{\beta!\,\gamma!\ldots}+\cdots\right\}.$$

Der Verfasser bestimmt ferner die Anzahl der Anordnungen von m Elementen zu je n mit Wiederholung von r dieser Elemente und findet

$${}^mA_n + {}^rC_1\, m!\, \Sigma\frac{{}^{m-1}C_{n-\alpha}}{\alpha!},\quad {}^rC_2\, n!\, \Sigma\frac{{}^{m-2}C_{n-\alpha-\beta}}{\alpha!\,\beta!}+\cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ in allen Systemen Werthe haben, die nicht kleiner als 2 sind, so dass $\alpha+\beta+\gamma\cdots <$ oder $= n$.

Schliesslich geht er zu den Combinationen über, für die er dieselben Probleme löst. Die Zahl mit Wiederholung ist

$$ {}^mC_n + {}^rC_1\,\Sigma^{m-1}\,C_{n-\alpha} + {}^rC_2\,\Sigma^{m-2}\,C_{n-\alpha-\beta} + \cdots . $$

Tx. (O.)

P. Boschi. Ricerche sopra una questione di partizioni di numeri. Mem. di Bol. (4) I. 555-573.

Es handelt sich um die Beantwortung der Frage, auf wie viel verschiedene Arten durch Summation von s Zahlen aus der Reihe $1.2\ldots n$ die Zahl p gebildet werden kann. Es werden dann die Formeln für s gleich 2, 3, 4 entwickelt. Der Verfasser setzt

$$ x^r + x^{r+1} + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n = S_{1,r}, $$
$$ x^r S_{1,r+1} + x^{r+1} S_{1,r+2} + \cdots + x^{n-2} S_{1,n-1} + x^{n-1} S_{1,n} = S_{2,r}, $$
$$ x^r S_{2,r+1} + x^{r+1} S_{2,r+2} + \cdots x^{n-2} S_{2,n-1} = S_{3,r} \text{ u. s. w.} $$

und zeigt, dass allgemein $S_{n,r}$ entwickelt und nach Potenzen von x geordnet, durch den Coefficienten von x^p angiebt, auf wie viel verschiedene Arten die Zahl p durch Summation von n Zahlen der Reihe r, $r+1$, $r+2, \ldots n$ entstehen kann. Es werden sodann die vorbemerkten Ausdrücke umgeformt und vereinfacht, so dass sie zur Lösung der gestellten Frage verwendet werden können. Ls.

M. Lionnet. Note relative aux intersections intérieures des diagonales d'un polygone convexe. Nouv. Ann. (2) XIX. 456-457.

Es wird unmittelbar gezeigt, dass die Anzahl der Schnittpunkte der Diagonalen eines convexen Polygons von m Seiten im Innern des Polygons gleich ist der Anzahl der Combinationen von 4 aus m Elementen C_m^4. Ls.

M. d'Ocagne. Remarque sur un problème d'analyse combinatoire. Nouv. Ann. (2) XIX. 44-46.

Die Anzahl der Schnittpunkte der Diagonalen eines convexen

Polygons von m Seiten im Innern des Polygons N_m wird gewöhnlich aus dem Verhältnis $\frac{N_m}{N_{m-1}} = \frac{m}{m-4}$ abgeleitet. Man findet $N_m = C_m^4$. Der Verfasser entwickelt diesen Werth aus der Differenz $N_m - N_{m-1}$, nachdem er gezeigt hat, dass diese Differenz gleich C_{m-1}^3 ist.

Ls.

P. G. Tait. Mathematical notes. Proc. of Edinb. X. 400-404.

1) Ueber ein Problem der Anordnungslehre. 2) Graphische Lösung der Gleichung $V\varrho\varphi\varrho = 0$.

Cly. (O.)

Weitere Lehrsätze und Aufgaben über Combinationen etc. von T. P. Kirkman, W. J. C. Sharp, J. L. Kitchin, Ch. Ladd finden sich Educ. Times XXXIII. 20, 41, 113, 114.

O.

M. Laquière. Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier. Bull. S. M. F. VIII. 82-103, 132-158.

Diese interessante Abhandlung enthält eine umfassende Darstellung der regelmässigen Rösselsprünge, von den einfachsten Fällen ausgehend und allmählig zu verwickelteren Aufgaben fortschreitend. Die gedrängte Kürze, mit welcher der Verfasser seinen Gegenstand behandelt, verbietet uns eine auszugsweise Berichterstattung; diejenigen, welche sich für den Rösselsprung interessiren, müssen wir auf die Abhandlung selbst verweisen.

Ls.

D. Bierens de Haan. Gelukspelen met dobbelsteenen. Nieuw Arch. VI. 49-66, 113-123.

Im Anschluss an frühere Aufsätze des Verfassers über denselben Gegenstand (s. F. d. M. X. 1878. p. 157) wird hier von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Würfel-

spiel gehandelt. Dabei wird das Gesetz für das Werfen einer Zahl mit einer beliebigen Zahl von n Würfeln gesucht und eine Tabelle hinzugefügt, welche sich bis $n = 8$ erstreckt. Einige Folgerungen hinsichtlich der bekanntesten und gebräuchlichsten Würfelspiele schliessen sich dem an. G.

Théorie mathématique du jeu de la bouillotte. Journ. des Act. 1879. 289-312.

Lösungen weiterer Aufgaben über Wahrscheinlichkeit bei Spielen von J. L. Kitchin, G. Heppel, L. Tanner, Matz, W. H. Lowry finden sich Educ. Times XXXIII. 39-40, 73-75, 84.

O.

O. Stone. A quasi proof of the arithmetical mean. A. Hall. Query.

Es wird nachgewiesen, dass, vorausgesetzt der wahrscheinlichste Werth einer unbekannten Grösse, welche zweimal unter gleichen Umständen beobachtet worden, sei gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Beobachtungswerthen, der wahrscheinlichste Werth nach drei Beobachtungen gleich dem arithmetischen Mittel der drei Beobachtungswerthe sein muss, und dass der Satz allgemein für $p+1$ Beobachtungen gilt, wenn er für p Beobachtungen richtig ist. Ls.

O. Stone. A quasi proof of the arithmetical mean. Analyst VII. 150-151.

Es wird bewiesen, dass wenn drei Grössen a, b, c gegeben sind, und wenn

$$a_1 = \frac{b+c}{2}, \quad b_1 = \frac{c+a}{2}, \quad c_1 = \frac{a+b}{2}, \quad a_2 = \frac{b_1+c_1}{2}, \dots,$$

alsdann

$$a_\infty = b_\infty = c_\infty = \frac{1}{3}(a+b+c).$$

Glr. (O.)

J. Lüroth. Ein Problem der Fehlertheorie. Z. f. Verm. IX. 432-438.

Die behandelte Aufgabe, betreffs deren Lösung auf den Aufsatz selber zu verweisen ist, ist folgende. Es seien von p Variabeln $x_1 \dots x_p$ q Functionen $\mathfrak{f}_\alpha(x_1 \dots x_p)$ gegeben: und für diese durch Beobachtungen Werthe gefunden, die bezw. zwischen den Grenzen m_α und $n_\alpha (m < n)$ liegen; die Genauigkeit der Beobachtungen hängt von r Präcisionsmassen $h_1 \dots h_r$ ab, deren Werthe in die Function für die Fehlerwahrscheinlichkeit auf eine bekannte Weise eingehen sollen: Es wird die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass bei jenen Beobachtungen die x und h innerhalb eines gegebenen der $(p+r)$-fachen Mannigfaltigkeit der x und h angehörigen Bereiches liegen. Die Aufgabe wird zunächst für den Fall $p = 2$, $r = 1$ gelöst und dann verallgemeinert. Hervorzuheben ist die Bemerkung, dass die Fehlerfunction nicht durch den Spielraum, welchen man den Unbekannten x und h giebt, in das Problem hineinkommt, sondern durch den Spielraum, welchen man den beobachteten Werthen geben muss, damit man überhaupt zu einem bestimmten Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gelangt. B.

D. McAlister. On the law of the geometric mean in the theory of errors. Quart. J. XVII. 175-194.

Der Verfasser geht von der Hypothese aus, dass bei einer grossen Anzahl von geschätzten Masswerthen einer unbekannten Grösse das geometrische Mittel aus diesen Schätzungen mit grösserer Wahrscheinlichkeit als irgend ein anderer Werth dem wahren Werth der unbekannten Grösse entspricht, und untersucht, wie sich unter dieser Annahme die verschiedenen in der Fehlertheorie vorkommenden Functionen gestalten.

Ls.

E. L. de Forest. On unsymmetrical adjustments and their limits. Analyst VII. 1-9.

Schluss der Arbeit, über die bereits im vorigen Bande p. 158 berichtet worden ist. Glr. (O.)

E. L. de Forest. On a theorem in probability.
Analyst VII. 169-176.

In dieser Arbeit vergleicht der Verfasser die von ihm durch wiederholten Gebrauch von Ausgleichungsformeln gefundenen Resultate mit den bekannten Untersuchungen über die Fehlertheorie und Wahrscheinlichkeitscurve. Glr. (O.)

E. L. de Forest. On some properties of polynomials.
Analyst VII. 39-46, 73-82, 105-115.

Die Arbeit enthält die Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verfassers, welche sich auf die wiederholte Ausgleichung einer Reihe

$$u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3\dots$$

durch unsymmetrische Formeln bezogen, wie z. B.

$$\begin{aligned}u_0' = l_0u_0 + l_1\, u_1 &+ l_2\, u_2 + l_3\, u_3 + l_4\, u_4\\ &+ l_{-1}u_{-1} + l_{-2}u_{-2} + l_{-3}u_{-3} + l_{-4}u_{-4},\end{aligned}$$

die also die ausgeglichenen Glieder

$$\dots u_{-2}',\ u_{-1}',\ u_0',\ u_1',\ u_2',\ u_3',\dots$$

liefert, wo

$$u_1' = l_0u_1 + l_1u_2 + \dots + l_{-4}u_{-3},\quad u_2' = l_0u_2 + l_1u_3 + \dots + l_{-4}u_{-2},\ \text{u.s.f.}$$

Und zwar enthält die Arbeit Erweiterungen der früheren Resultate auf Reihen, welche zwei Variabeln x, y und drei x, y, z enthalten.

Der Verfasser betrachtet ferner folgendes Problem: „Man setze voraus, dass die unbegrenzte Reihe

$$u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ u_2,\dots$$

von algebraischer Form ist und ihre Glieder äquidistante Werthe der Function

$$u = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_rx^r$$

sind und Ordinaten der Curve, deren Gleichung diese ist. Es mögen ferner diese Glieder ausgeglichen sein durch eine unsymmetrische Formel

$$u'_1 = l_0u_0 + l_1u_1 + l_2u_2 + \cdots + l_mu_m + l_{-1}u_{-1} + l_{-2}u_{-2} + \cdots + l_{-m}u_{-m}.$$

Man bestimme die Bedingung, welche von den Coefficienten l erfüllt werden muss, damit das ausgeglichene Glied u'_0 dieselbe Ordinate für die Curve sei, wie u_0." Das entsprechende Problem für zwei und drei Variable wird ebenfalls behandelt. Ferner wird gezeigt, dass, wenn die Coefficienten in

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

als ein System äquidistanter paralleler Kräfte betrachtet werden, welche auf die als Hebelarm betrachtete Axe der X rechtwinklig wirken, und wenn h_1 die Entfernung der Mittelpunkte der parallelen Kräfte vom Angriffspunkt von a_0 oder den Hebelarm des Systems bei Unterstützung des Angriffspunktes von a_0 bezeichnet, dann in der k^{ten} Potenz dieses Polynomens der Hebelarm des Systems der Coefficienten für einen beliebigen unterstützten Punkt kh_1 ist. Dieser Satz wird auf den Fall von zwei und drei Variabeln ausgedehnt. Glr. (O.)

Em. Czuber. Zur Theorie der Fehlerellipse. Wien. Ber. 1880.

Der Verfasser giebt eine sehr interessante Darstellung der Theorie der Fehlerellipse auf Grundlage einer von Bienaymé 1852 veröffentlichten Abhandlung. Ls.

H. Seeliger. Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über die Vertheilung zufälliger Fehler. Astr. Nachr. XCVII. No. 2323, 289-304.

In einer früheren Arbeit (Astr. Nachr. 2284, s. F. d. M. XI. 1879. p. 797) hatte der Verfasser untersucht, wie sich die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer bestimmten Anzahl von Zeichenwechseln in einer gegebenen Reihe von zufälligen Beobachtungsfehlern gestaltet. § 1 giebt zunächst eine neue Her-

leitung des früher gefundenen Resultats; es wird

$$W = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mu\gamma}^{\infty} e^{-tt}\, dt, \qquad (m+n = \mu\sqrt{2mn}),$$

die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Reihe von m positiven, n negativen Fehlern die Zahl der Zeichenwechsel zwischen den Grenzen

$$\frac{2mn}{m+n} \pm 2\gamma \sqrt{\frac{mn}{m+n}}$$

liege. Um nun noch die Grössen der Fehler selbst zu berücksichtigen, wird in §§ 2 und 3 die Häufigkeit der positiven Vorzeichen untersucht, welche in der aus der Fehlerreihe gebildeten Reihe der ersten Differenzen auftreten. Die Aufgabe führt auf die Differenzengleichung

$$f(x, n) = (x+1)\, f(x, n-1) + (n-x)\, f(x-1, n-1),$$

deren Integration ohne Schwierigkeit gelingt. Das Resultat ist von ähnlicher Einfachheit wie vorher. Die analoge Untersuchung für die Häufigkeit der Zeichenwechsel in der ersten Differenzenreihe führt, wie in § 4 und 5 gezeigt wird, auf die Differenzengleichung

$$\varphi(x, n+1) = (x+1)\ \varphi(x,n) + 2\varphi(x-1, n) + (n-x)\ \varphi(x-2, n),$$

deren Integration jedoch nicht vollständig durchgeführt wird.

B.

H. Seeliger. Bemerkung über die allgemeine Cauchysche Interpolationsmethode. Astr. Nachr. XCVI. No. 2295, 235-240.

Wenn man als Mass für die bei irgend einem Interpolationsverfahren erreichte Genauigkeit die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler ansieht, so ist, wie der Verfasser durch allgemeine Betrachtung sowie durch ein numerisches Beispiel für den Fall des Cauchy'schen Verfahrens (siehe Liouville J. 1837 und Y. Villarceau, Conn. d. temps 1852) nachweist, nicht immer zu erwarten, dass bei einer bestimmten zu Grunde gelegten Ge-

stalt der Formel, die Rechnung convergire, oder mit andern Worten, dass die Genauigkeit der Darstellung mit wachsender Zahl der mitgenommenen Glieder wachse. In dem behandelten Falle tritt die Divergenz auch dann ein, wenn man statt der Fehlerquadratsummen die Summen der absoluten Werthe der Fehler vergleicht. B.

T. N. Thiele. Om Anvendelse af mindste Kvadraters Methode i nogle Tilfälde, hvor en Komplikation af visse Slags uensartede tilfäldige Fejlkilder giver Fejlene en systematisk Karakter. Kjob. Vid. Selsk. Skrifter (5) XII. 383-408.

T. N. Thiele. Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systématiques par la méthode des moindres carrés. Copenhague 1880. C. A. Reitzel.

Man findet zuweilen, z. B. bei der Untersuchung von Instrumentalconstanten oder persönlichen Fehlern, Fehlersysteme, welche scheinbar einen systematischen Character zeigen, wo aber doch eine wirkliche Abhängigkeit von irgend einer Variablen sich nicht nachweisen lässt. Dieses hat oft darin seinen Grund, dass der einzelne Fehler nicht nur eine einzige Beobachtung, sondern eine ganze Reihe derselben beeinflusst, so dass die Beobachtungsfehler sich anhäufen, wie es der Fall wäre, wenn nicht die einzelnen Beobachtungen, sondern deren successive Summen betrachtet würden. Es ist dieser Fall, den der Verfasser einer Behandlung mittels der Methode der kleinsten Quadrate unterwirft. Er hebt dabei hervor, dass es für die Behandlung solcher Probleme von besonderer Wichtigkeit ist, dass alle Gleichungen, welche die vermutheten wirklichen Verhältnisse definiren, bei der analytischen Formulirung des Problems auch wirklich in Betracht kommen. Entsprechen den Zeitpunkten t_0, t_1, t_2... die Beobachtungen z_0, z_1, z_2..., während die wahren Werthe einer Instrumentalconstante x_0 x_1 x_2... sind, so erhält man zur Bestimmung dieser Unbekannten die folgenden beiden

Systeme von Gleichungen

$x_1 - x_0 = 0$ Gewicht $v_{0,1}$	$z_0 - x_0 = 0$ Gewicht v_0
$x_2 - x_1 = 0$ „ $v_{1,2}$	$z_1 - x_1 = 0$ „ v_1
. . . .	. . . .
$x_n - x_{n-1} = 0$ „ $v_{n-1,n}$	$z_n - x_n = 0$ „ v_n.

Werden diese nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, so geht aus denselben ein verhältnismässig einfaches System hervor, welches sich durch eine Reihe von sinnreichen Transformationen auflösen lässt. Die Auflösung geschieht successive durch ein einfaches Verfahren, das sich auf einen gewissen Kettenbruch stützt und auch solche specielle Fälle zu berücksichtigen erlaubt, wo die Gewichte 0 oder ∞ werden. Sie kann aber auch auf graphischem Wege ausgeführt werden, wodurch eine Art von mechanischer Ausgleichung geliefert wird, bei welcher auch auf die gegebenen Gewichte Rücksicht genommen wird. Nach der typischen Auflösung der Gleichungen, welche in der That nicht von dem bekannten Gauss'schen Verfahren abweicht, untersucht der Verfasser die resultirenden mittleren Fehler der ausgeglichenen Werthe. Hierbei macht er einen ausgedehnten Gebrauch von dem Satze, dass die in „den transformirten Gleichungen“ links auftretenden Functionen als unter einander unabhängig beobachtete Grössen betrachtet werden können. Dadurch erhält man leicht den mittleren Fehler jeder linearen Function derselben und sodann auch diejenigen eines x. Auch diese mittleren Fehler können durch einfache Recursionsformeln berechnet werden, welche auch für willkürlich eingeschaltete fictive Beobachtungen vom Gewicht Null ihre Gültigkeit behalten. Noch bleibt die Bestimmung der Einheiten der beiden Systeme von Gewichten übrig. Meistens sind nämlich von vornherein nur die Verhältnisse der Gewichte v_a unter sich, sowie die der $v_{a,a+1}$, nicht aber die absoluten Werthe derselben bekannt. Die respectiven Einheiten E_v und E_ω der beiden Systeme lassen sich nur hypothetisch bestimmen. Der Verfasser nimmt an, dass sie mittels der Formeln

$$E_v = \frac{n+1-\Sigma v_a M^2(x_a)}{\Sigma v_a (z_a - x_a)^2}, \quad E_\omega = \frac{n - \sum\limits_{a,a+1} v \, M^2(x_a - x_{a+1})}{\sum\limits_{a,a+1} v \, (x_a - x_{a+1})^2}$$

dargestellt werden können. Das Kennzeichen dafür, dass man, nachdem die ganze Rechnung mit verbesserten Gewichten wiederholt ist, schliesslich mit richtigen Gewichten gerechnet habe, wird dann, dass E_v und E_ω der Einheit gleich werden.

Schliesslich wird noch der Fall erwähnt, wo angenommen werden kann, dass das beobachtete Phänomen nach Gesetzen variirt, welche sich als lineare Functionen gewisser Veränderlicher ausdrücken lassen, und zuletzt erläutert der Verfasser das ganze Verfahren durch ein numerisches Beispiel. Gm.

J. M. de Tilly. Correspondance. N. C. M. VI. 410-414.

1) In der Methode der kleinsten Quadrate findet sich ein subjectives Element. 2) Es giebt einen Fall, in dem diese Methode nicht dazu dienen kann, die Unbekannten zu finden, nämlich denjenigen, in dem die corrigirten Gleichungen in einander eingehen. Mn. (O.)

C. H. Kummell. Proof of some remarkable relations in the method of least squares. Analyst VII. 84-88.

Aufstellung der bekannten allgemeinen Formeln für die Methode der kleinsten Quadrate. Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On the method of least squares. Monthl. Not. XL. 600-614, XLI. 18-83.

Fortsetzung einer früheren Arbeit: „On the solution of the equations in the method of least squares“ (Monthl. Not. XXXIV. 311-334, s. F. d. M. VI. 1874. p. 144-145). Die Werthe der in der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden Grössen, d. h. die wahrscheinlichsten Werthe, die Summe der Quadrate der Reste, die mittleren Werthe werden als Determinanten dar-

gestellt und die Art der Bildung dieser Determinanten aus den Coefficienten der Bedingungsgleichungen untersucht.

In dem zweiten Theil der Arbeit werden die Ausdrücke für die mittleren Fehler von x und y dargestellt in der Form

$$\varepsilon_x^2 = \frac{x_0(\xi - x_0)}{m-\mu}, \quad \varepsilon_y^2 = \frac{y_0(\eta - y_0)}{m-\mu}, \dots,$$

wo x_0, y_0 die durch die normalen Gleichungen gegebenen Werthe sind. ξ ist der Werth von x, der durch ein System von Gleichungen sich ergeben hat, das sich von den normalen Gleichungen nur dadurch unterscheidet, dass die x-Gleichung durch eine neue Gleichung ersetzt ist; η ist der entsprechende Werth von y, wie ξ der von x, u. s. w. Glr. (O.)

L. Giletta. Intorno ai fondamenti del principio dei minimi quadrati. Battaglini G. XVIII. 159-174.

Der Verfasser geht davon aus, dass eine Reihe von Beobachtungen, deren jede das gleiche Vertrauen verdient, für die unbekannte Grösse V die Werthe $o_1\ o_2\ o_3 \dots o_n$ geliefert habe. Er nimmt an, dass alle constanten Fehlerquellen bei den Beobachtungen die sorgfältigste Berücksichtigung gefunden haben, so dass die Beobachtungsresultate nur noch als mit den zufälligen Beobachtungsfehlern behaftet anzusehen sind. Er kommt dann zu dem Schluss, dass der wahrscheinlichste Werth der unbekannten Grösse V gleich $\frac{o_1 + o_2 + \cdots o_n}{n} + C$ gesetzt werden muss, wo C eine Constante.

Dem entsprechend findet er die Formel für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x gleich $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-C)^2}$.

Wunderbarerweise kann sich der Verfasser nicht entschliessen, diese Constante C gleich Null zu setzen, er glaubt vielmehr den Beweis zu führen, dass dies unzulässig sei, und dass man a priori nichts über diese Grösse bestimmen dürfe. Fast scheint die Abhandlung zu dem Zwecke geschrieben, um gegen die Annahme,

dass die bei den einzelnen Beobachtungen vorgekommenen Fehler sich ausgleichen werden, so dass ihre Summe verschwindet, zu protestiren. Ls.

G. JUNG. Statica grafica. Compensazione degli errori proporzionali per un dato sistema di osservazioni diretti. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII. 238-242.

Der Verfasser knüpft an eine vorhergegangene Arbeit an. In derselben ist gezeigt worden, wie auf graphischem Wege die Constanten α und β der linearen Function $y = \alpha + \beta x$ bestimmt werden, in dem Falle, dass n Paare zusammengehöriger Werthe x_i und y_i gegeben sind und die Summe $\Sigma(y_i - \alpha - \beta x_i)^2$ ein Minimum werden soll. In der vorliegenden Arbeit wird dieselbe Aufgabe gelöst für die Bedingungsgleichung

$$\Sigma\left(\frac{y_i - \alpha - \beta x_i}{y_i}\right)^2$$

ein Minimum, und zwar auch für den Fall, dass den Beobachtungen, denen die Werthe x_i und y_i entspringen, eine verschiedene Präcision beigelegt werden muss. Die Untersuchung wird schliesslich ausgedehnt auf den Fall, dass $y = f(x)$ in den Grenzen x_0 und x_1 durch die lineare Function $\alpha + \beta x$ bestmöglichst ersetzt werden kann. Ls.

J. W. L. GLAISHER. Note on a point in the method of least squares. Messenger (2) IX. 132.

Beweis des Satzes, dass, wenn die Anzahl der Gleichungen die Anzahl der Unbekannten um 1 übertrifft, der wahrscheinliche Fehler eine lineare Function der beobachteten Grössen ist.

Glr. (O.)

Lösungen weiterer Aufgaben über Bestimmung mittlerer Werthe von MATZ, SEITZ, C. J. MONRO, G. J. GRIFFITHS, NASH, CROFTON, G. HEPPEL finden sich Educ. Times XXXIII. 61-62, 75-76, 83, 95-96, 106-107.

O.

A. **Percin.** Note sur une application de la loi de probabilité du tir. Rev. d'Art. X. 341-348.

M. W. **Drobisch.** Ueber die nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwartende Dauer der Ehen. Leipz. Ber. 1880. 1-26.

O. **Schlömilch.** Zur Schuldentilgungs- und Rentenrechnung. Hoffmann Z. XI. 262-264.

Es bezeichne K ein beliebiges Capital, q den jährlichen Zins der Capitaleinheit, H die jährliche Abzahlung, so wird der nach n Jahren verbleibende Rest des schuldigen Capitals

$$(1) \qquad R = K(1+q)^n - H\frac{(1+q)^n-1}{q}.$$

Es sind K, H, R, n gegeben und es soll q bestimmt werden. Der Verfasser zeigt zuerst, dass

$$q_1 = \frac{1}{K}\left(H - \frac{K-R}{2^n}\right)$$

einen Näherungswerth für q bildet, und dass bessere Näherungswerthe gefunden werden, wenn man der Gleichung (1) die Form giebt

$$q = \frac{H[(1+q)^n-1]}{K(1+q)^n-R}$$

und dann setzt

$$q_2 = \frac{H[(1+q_1)^n-1]}{K(1+q_1)^n-R},$$

$$q_3 = \frac{H[(1+q_2)^n-1]}{K(1+q_2)^n-R}$$

u. s. w. Ls.

E. B. **Elliot.** The construction of the government sinking fund. Wash. Bull. III. 113-116.

Der Verfasser macht eine Mittheilung über die Tilgung bei

dem Staatsschuldenwesen der Vereinigten Staaten Nord-Amerika's und zeigt an einem Zahlenbeispiel, dass in 13,2993 Jahren 750 Millionen Dollars getilgt sein werden, da die Staatsschuld am 1. Januar 1880 $ 2011,798,504.87 und der Tilgungsfond $ 472,243,622 betragen hat; die Zinsen werden dabei mit jährlich 5 Procent angenommen. Ls.

Th. B. Sprague. Explanation of a new formula for interpolation. Journ. of Act. XXII. Juli.

Der Verfasser bespricht verschiedene Formeln, welche bei der Interpolation von Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten angewendet worden sind, und meint, man solle die Ausgangspunkte der Interpolation, welche doch Näherungswerthe sind, nicht als absolut fest betrachten, dieselben vielmehr einer geeigneten Correctur unterziehen. Er geht bei seinem Verfahren von sechs gegebenen Punkten aus und verlangt, dass die zwischen dem 3ten und 4ten Punkt verlaufende Curve sich ebenso regelmässig an das vorhergehende wie an das nachfolgende Curvenstück anschliesse; das geschehe am einfachsten, wenn beide Stücke im 3ten und 4ten Punkt dieselbe Tangente und denselben Krümmungshalbmesser hätten, was für zwei Parabeln 4ter Ordnung, von denen die eine durch die fünf ersten, die andere durch die fünf letzten Punkte geht, der Fall sei. Aus diesen Bedingungen leitet er die fünf Constanten ab, deren er sich bei Bestimmung der Curve zwischen dem 3ten und 4ten Punkt bedient, und welche er bei seiner Interpolation mit 5ten Differenzen benutzt. Ls.

W. Küttner. Zur mathematischen Statistik. Schlömilch Z. XXV. 11-25.

Der Verfasser giebt eine neue Begründung der Formeln über die Invaliditätsverhältnisse, welche Zeuner in seinen „Abhandlungen aus der mathematischen Statistik,“ Leipzig 1869, aufgestellt hat, und knüpft daran weitere Entwickelungen, bei denen die Voraussetzung, die Sterblichkeit der Invaliden sei die gleiche, wie

bei den Activen, verlassen wird. Er zeigt dabei, dass die Behm'schen Formeln nur daher von den Zeuner'schen abweichen, weil ersterer die Entwickelung gebrauchte

$$\log \operatorname{nat} p = -\left\{(1-p)+\frac{(1-p)^2}{2}+\frac{(1-p)^3}{3}+\cdots\right\},$$

letzterer die besser convergirende Reihe

$$\log \operatorname{nat} p = -2\left\{\frac{1-p}{1+p}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^3+\cdots\right\},$$

so dass die Behm'schen Formeln als Näherungen zu den Zeuner'schen anzusehen sind. Schliesslich beleuchtet der Verfasser die Karup'sche, „unabhängige Invaliditätswahrscheinlichkeit“ und den über dieselbe entstandenen Streit zwischen Karup, Dienger, Behm und Heym, wobei er die Berechtigung der Hypothese anerkennt, jedoch bestreitet, dass durch dieselbe das Problem der Invaliditätsversicherung in einfacherer Weise und ohne den Hinzutritt anderer Untersuchungen gelöst werden könne. Ls.

G. King und G. F. Hardy. Notes on the practical application of Mr. Makeham's formula to the graduation of mortality tables. Journ. of Act. XXII. April.

Es wird hier wieder ein Verfahren angegeben, um die Constanten der Makeham'schen Formel für eine Mortalitätstafel zu bestimmen, und es ist auch in dem betrachteten Falle eine recht gute Näherung erzielt worden. Aber man darf bezweifeln, ob die Näherung wirklich die möglichst beste ist, und ob das Verfahren in einem anderen Falle eine gleich gute Lösung geben würde. Die Anwendung der allgemeinen Ausgleichung ist zwar etwas zeitraubender und mühsamer, aber mit Rücksicht auf den schliesslichen Erfolg unbedingt vorzuziehen. Ls.

J. Sorley. Observations on the graduation of mortality tables, with special reference to the conditions under which certain methods are to be preferred. Journ. of Act. XXII. Oct.

Der Verfasser geht davon aus, dass es sich bei der Ausgleichung von Mortalitätstafeln um zwei völlig verschiedene Absichten handeln könne. Man wolle Irrthümer eliminiren, absichtliche oder unabsichtliche, welche in den gesammelten Daten enthalten sind, diese werden „persönliche Fehler" genannt, oder man wolle Unregelmässigkeiten ausmerzen, deren Verschwinden bei einer vergrösserten Anzahl von Beobachtungen zu erwarten ist, weil man annehmen darf, dass ihre Ursache nur der ungenügenden Zahl von Beobachtungen zuzuschreiben ist. Der Verfasser nennt diese „natürliche Fehler". Je nachdem man den einen oder den anderen Zweck verfolgt, müsse man die Wahl unter den verschiedenen Ausgleichungsmethoden treffen. Von diesem Gesichtspunkt aus werden die Methoden von Woolhouse (Journ. of Act. XXI.), McCay (Journ. of Act. XXII.), Sprague (Journ. of Act. XXII.) und von Makeham einer eingehenden Untersuchung unterzogen. Das Schlussresultat derselben fasst der Verfasser in folgende Sätze zusammen:

1. Die Ausgleichung ist nothwendig, wo grössere „persönliche Fehler" existiren.

2. Jede Ausgleichung, welche lediglich das Gesetz der Continuität zu Grunde legt, und welche die Erfahrung zu Hülfe nimmt, ist berechtigt.

3. Die Annahme eines bestimmten Sterblichkeitsgesetzes ist nur dann zulässig, wenn die Ausgleichung der Tafel auch ohne diese Annahme im Wesentlichen dasselbe Resultat geben würde.

4. Die Methode von Woolhouse bewährt sich bei Ausgleichung zahlreicher Beobachtungen, bei denen die „persönlichen Fehler" vernachlässigt werden dürfen; sie ist nicht anwendbar

a) bei vereinzelten und unregelmässigen Beobachtungen,
b) bei schnell wechselnder Sterblichkeit,
c) wenn die Beobachtungen mit erheblichen „persönlichen Fehlern" behaftet sind.

5. In den vorbenannten drei Fällen empfiehlt sich die graphische Methode.

6. Die Makeham'sche Formel eignet sich nicht für die schliessliche Ausgleichung, sie ist aber von grossem Nutzen für theoretische Untersuchungen. Ls.

Th. Miller. Fire insurance. A theory of statistics. Journ. of Act. XXII. Jan.

Wenn sich durch Beobachtung, Experiment oder auf statistischem Wege die Gefahr der Entzündung eines brennbaren Gegenstandes unabhängig von bekannten Ursachen eines Brandes feststellen, und wenn sich bestimmen liesse, in welchem Grade diese Gefahr durch bestimmte Brandursachen erhöht wird, wie gross die natürlichen und passiven Hindernisse sind, welche sich der Fortpflanzung eines Feuers entgegenstellen, und wie gross die Chancen sind, das Feuer durch active Mittel zu unterdrücken und zu löschen; wenn wir endlich den durch eingetretene Brände verursachten Schaden messen könnten, so liessen sich aus diesen Elementen die Feuerversicherungsprämien berechnen. Von diesen Sätzen ausgehend, entwickelt der Verfasser die einschlägigen Formeln, zunächst für Gebäude mit mehreren Stockwerken, und sodann mit Rücksicht auf die Uebertragung eines Brandes auf Nebengebäude. Es wird dann gezeigt, wie die Daten zu sammeln und zu ordnen wären, und das Ganze wird durch ein Zahlenbeispiel illustrirt. Der Gedankengang des Verfassers ist ganz interessant, wir fürchten jedoch, dass die hier entwickelte Theorie eine Anwendung auf die höchst complicirten thatsächlichen Verhältnisse kaum gestatten wird. Ls.

Th. Gessner. Das Abstimmen im Lichte der Durchschnitts- und Wahrscheinlichkeitsmethode. Pr. Quackenbrück.

Der Verfasser geht zunächst davon aus, es sei a priori ebenso wahrscheinlich, dass ein Abstimmender mit „ja" wie mit „nein" stimmt. Er findet dann, dass die Durchschnittsmajorität bei $2n+1$ Votanten, vorausgesetzt, dass n keine allzu kleine

Zahl ist, sich näherungsweise auf $\frac{2n+1}{2}+\sqrt{\frac{2n+1}{2\pi}}$ stellen wird. Er betrachtet sodann den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit für die Abstimmung nach der einen Seite gleich $\frac{x}{x+1}$ sei; es ist eine Majorität $\frac{x}{x+1}$ zu erwarten und der Ueberschuss der Durchschnittsmajorität über diesen Werth, welcher, wenn x gleich 1, $\sqrt{\frac{2n+1}{2\pi}}$ beträgt, wird um so kleiner, je mehr x wächst. Der Verfasser untersucht sodann, wie die Verhältnisse sich gestalten, wenn indirect abgestimmt wird, d. h. in Gruppen, in denen die Majorität über das Votum der Gruppe entscheidet, und wo schliesslich die Majorität der Voten der Gruppen massgebend ist. Es wird gezeigt, dass dabei die Entscheidung durch eine Minorität der abstimmenden Personen herbeigeführt werden kann und um so leichter, je complicirter die Abstimmungsmethode ist. Wenn nw von einander unabhängige Personen in w Gruppen indirect abstimmen, wobei es ebenso wahrscheinlich ist, dass ein Abstimmender mit „ja“ wie mit „nein“ stimmt, so ergiebt sich, vorausgesetzt, dass w und n nicht zu kleine Zahlen sind, der Ueberschuss der Durchschnittsmajorität über die absolute in Personen ausgedrückt, näherungsweise gleich $\sqrt{\frac{wn}{\pi^2}}$; er ist also kleiner wie bei der directen Abstimmung, wo er $\sqrt{\frac{wn}{2\pi}}$ betragen haben würde. Ls.

Weitere Lösungen von Aufgaben über Wahrscheinlichkeit von H. McColl, C. J. Monro, S. Tebay, W. J. Macdonald, Ch. Ladd, E. Blackwood, T. J. Sanderson, E. B. Elliott, C. Leudesdorf, A. E. Drinkwater, H. G. Day, J. A. Kealy, J. Hammond, J. E. A. Steggall, W. J. C. Sharp, Matz, W. A. Whitworth

finden sich Educ. Times XXXIII. 22-24, 47, 51, 57, 61, 68-70, 78, 79-80, 82-83, 101, 113.

O.

M. Laquière. Rectification d'une formule de probabilité. Bull. S. M. F. VIII. 74-79.

Die Berichtigung bezieht sich auf eine von Jordan gegebene Formel bei Behandlung der Aufgabe: Eine Gerade l ist in m Theile getheilt, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass n Theile sämmtlich grösser sind, als eine gegebene Länge a. Jordan findet die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten n Theile alle grösser sind als a, gleich

$$X_n = \left(\frac{l-na}{l}\right)^{m-1},$$

wenn $na < l$, und die Wahrscheinlichkeit, dass die von einer Person, welche die Theilung nicht kennt, bezeichneten n Theile alle grösser sind als a, gleich

$$C_n = \frac{m.(m-1)\dots(m-n+1)}{1\,.\,2\,\dots\,.\,n}\left(\frac{l-na}{l}\right)^{m-1}$$
$$= \frac{m.(m-1)\dots(m-n+1)}{1\,.\,2\,\dots\,.\,n} X_n.$$

Laquière bezeichnet dies als einen Irrthum und zeigt, dass $C_n = X_n$. Er entwickelt weiter die Formeln für die Wahrscheinlichkeit, dass grade r Theile grösser sind als a, und dass wenigstens r Theile grösser sind als a, und die Beziehungen zu C_r.

Ls.

M. Laquière. Note sur un problème de probabilité. Bull. S. M. F. VIII. 79-80.

Es handelt sich um die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelpunkt einer geschlossenen Curve innerhalb des geradlinigen Dreiecks liegt, dessen Spitzen willkürlich im Innern der geschlossenen Curve genommen werden. Dieselbe ist $\frac{1}{4}$.

Ls.

E. B. Seitz. Solution of a problem. Analyst VII. 131.

Drei Punkte sind willkürlich auf der nördlichen Halbkugel angenommen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der durch diese Punkte gelegte kleine Kreis ganz im Norden des Aequators liegt, $4 - \frac{9}{8}\pi$.

Glr. (O.)

Weitere Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeit von Crofton, Seitz, A. Martin, C. J. Monro, H. J. Day, E. B. Elliott, W. A. Whitworth, Matz, Casey finden sich Educ. Times XXXIII. 18, 36, 48-50, 52, 54-55, 57-58, 65, 87-88, 101-102, 115-116.

O.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

W. Gallenkamp. Algebraische Analysis und analytische Geometrie. 2te Aufl. Iserlohn. J. Bädeker.

Dieses Buch bildet den 3ten Theil des Gesammtwerks: „Die Elemente der Mathematik, ein Leitfaden für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten.“ Es behandelt ausgewählte Themata, nämlich I. unter dem Titel: „Algebraische Analysis“ Definitionen und Fundamentalbestimmungen, die wichtigsten Eigenschaften der ganzen Functionen, Functionalgleichungen, unendliche Reihen, Elemente der Differential- und Integralrechnung und einige Anwendungen derselben. H.

R. Götting. Einleitung in die Analysis. Berlin. Wohlgemuth.

Die Schrift behandelt ausgewählte Themata der reinen Mathematik, welche die Grenzen der fundamentalen Algebra überschreiten, aber in der obersten Classe vieler Schulen als Unterrichtsgegenstände ganz oder zum Theil aufgenommen zu sein pflegen. Die Hauptgegenstände sind die Combinationslehre mit Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, specielle Reihen,

sowohl endliche als auch unendliche, verbunden mit der Theorie der Complexen. Diese werden vielseitig erörtert. Auf jeden Abschnitt folgen Aufgaben. H.

F. J. Studnička. Allgemeine algebraische Formenlehre. Prag. 1880 (Böhmisch.)

Enthält eine kurze Darstellung der Lehre von den endlichen wie unendlichen Reihen, Factorenfolgen und Kettenbrüchen, namentlich auch von der Wechselbeziehung der letzteren, bewegt sich jedoch nur auf reellem Zahlengebiete. Std.

E. Amigues. Note sur la série de Taylor. Nouv. Ann. (2) XIX. 105-109.

Beweis der Entwickelung von $f(x+h)$ nach ganzen positiven Potenzen von h unter der Voraussetzung, dass sämmtliche Differentialquotienten $f^n(x)$ dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Zahl liegen und die Reihe $f(x)+hf'(x)+\cdots$ auch nach x gliedweise differentiirt werden darf. St.

O. Schlömilch. Ueber den verallgemeinerten Taylor'schen Satz. Leipz. Ber. 1879, Schlömilch Z. XXV. 48-53.

Crelle hat sich s. Z. vielfach mit der Entwickelung von Functionen nach Facultäten beschäftigt, ohne jedoch bezüglich des Bereiches der Gültigkeit derselben zu einem allgemeinen Resultate zu gelangen. Herr Schlömilch beweist den folgenden Satz: „Genügt die eindeutige Function $F(w)$ der Bedingung, dass der Quotient $\{F(w)-F(0)\}:w$ auf der positiven Seite der imaginären Axe holomorph bleibt und für $\lim w=\infty$ den Grenzwerth Null hat, so ergiebt sich

$$F(w) = F(0)+\lambda_1 w+\lambda_2 w(w-1)+\lambda_3 w(w-1)(w-2)+\cdots,$$

worin gesetzt ist

$$\binom{m}{0}F(m)-\binom{m}{1}F(m-1)+\binom{m}{2}F(m-2)-\cdots = m!\,\lambda_m.\text{“}$$

St.

C. L. LANDRÉ. By de sommatie formule van Euler. Nieuw Arch. VI. 212-215.

Aus dem Taylor'schen Theorem wird direct Euler's Summationsformel, wie sie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt, abgeleitet. G.

D. ANDRÉ. Second mémoire sur la sommation des séries. Ann. d. l'Éc. N. (2) IX. 209-227.

Die zu summirenden Reihen haben die Form

$$\sum_n U_n = \sum_n \frac{u_n}{n(n+1)\dots(n+p-1)} x^n,$$

wo u_n das allgemeine Glied einer recurrenten Reihe im eigentlichen Sinne ist. Das Resultat ist vom Verfasser bereits in den C. R. LXXXVII. 973 (S. F. d. M. X. 1878. p. 181) mitgetheilt worden. Die Ableitung desselben beruht im Wesentlichen auf der Identität

$$\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} = \sum_0^{p-1}{}_t \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!t!} \cdot \frac{1}{n+t}.$$

Um von dem weiteren Gange des Beweises eine Vorstellung zu geben, nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass die erzeugende Gleichung für u_n keine vielfachen Wurzeln habe, so dass

$$u_n = \Sigma c_a a^n,$$

wo die Summe sich über alle Wurzeln a der erzeugenden Gleichung erstreckt. Dann wird in U_n derjenige Theil, der sich auf eine einzige Wurzel a bezieht, gleich

$$\sum_{t=0}^{t=p-1} \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!t!} \frac{c_a}{a^t x^t} \frac{(ax)^{n+t}}{n+t}.$$

Diesen Ausdruck summirt man nun erst über n und dann nach a, wobei man bemerkt, dass

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(ax)^{n+t}}{n+t} = -\log(1-ax) - \left(ax + \frac{a^2x^2}{2} + \dots + \frac{a^t x^t}{t}\right).$$

Dann ergiebt sich

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} U^n =$$

$$\sum_a \sum_{t=0}^{t=p-1} \frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!}\,\frac{a^t x^t}{c_a}\left\{\log(1-ax)+ax+\frac{a^2x^2}{2}+\cdots+\frac{a^tx^t}{t}\right\}.$$

Hr.

A. Harnack. Ueber die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Functionen. Clebsch Ann. XVII. 123-132.

Es wird zuerst gezeigt, dass die Fourier'sche Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)d\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}{}_n\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha-x)d\alpha = \varphi(x)$$

im Allgemeinen gleichmässig convergirt, d. i. bezeichnet $R'_{n,r}(x)$ die Summe ihrer Glieder vom n^{ten} bis $(n+r)^{\text{ten}}$, so gehört zu jeder Zahl $\delta > 0$ eine Zahl $\mu > 0$, so dass

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [R_{n,r}(x)]^2 dx < \delta, \qquad n > \mu,$$

wobei r jede positive ganze Zahl und x jeder Werth im Intervalle $(-\pi, +\pi)$ sein kann. Demnach übersteigt $|R_{n,r}(x)|$ eine gegebene Zahl $\delta > 0$ nur in den Punkten einer Menge erster Gattung, worunter hier verstanden wird, dass es möglich sei, die Punkte der Menge in Intervalle einzuschliessen, deren Gesammtlänge beliebig verkleinert werden kann. Wenn diese Menge eine endliche Anzahl von Ableitungen im Sinne des Herrn Cantor besitzt, was aber nicht immer zutreffen dürfte, so ist unschwer einzusehen, dass die Function $\varphi(x)$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ integrirbar ist und ihr Integral durch die Reihe der Integrale der Glieder dargestellt wird. Daraus folgt dann, dass

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x)-\varphi(x)\}^2 dx = 0$$

ist, oder $|f(x)-\varphi(x)|$ eine gegebene Zahl $\delta > 0$ wieder nur in den Punkten einer Menge erster Gattung übersteigt. Man erhält ferner einen Satz des Herrn du Bois-Reymond (vgl. F. d. M. VIII. 1876. 128) allerdings auf elegante Weise, aber anscheinend nicht ganz so allgemein. St.

J. Dini. Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale. Pisa. Nistri.

Ch. Hermite. Sur la série de Fourier et autres représentations analytiques des fonctions d'une variable réelle. C. R. XCI. 1018-1019.

Der vorliegende Band von Dini, welcher den ersten Theil eines Werkes über den genannten Gegenstand bildet, behandelt die Frage nach der Möglichkeit der Entwickelungen einer willkürlichen Function $f(x)$ einer reellen Veränderlichen, während die Untersuchung über die Eigenschaften der Reihen selbst dem zweiten Theile vorbehalten ist. Herr Dini giebt hier ein allgemeines Verfahren, durch welches die bisher bekannten Entwickelungen, sowie andere neue oder noch nicht völlig begründete mit voller Strenge abgeleitet werden können. Darnach zerfällt die Untersuchung in zwei Theile, von denen der eine auf die zu entwickelnde Function $f(x)$, der andere ausschliesslich auf die Natur der Entwickelung selbst sich bezieht. Der erste Theil besteht in der Betrachtung der von Herrn du Bois-Reymond zuerst untersuchten „darstellenden Integrale" (vgl. F. d. M. VI. 1874. p. 244). Nach Ableitung der Sätze I, IV desselben wird eine Reihe von Bedingungen für die endliche und integrirbare Function $f(x)$ aufgestellt, unter welchen die Formel

$$\lim_{h=+\infty}\int_0^b f(x)\varphi(x,h)dx = f(+0)\lim_{h=+\infty}\int_0^b \varphi(x,h)dx \quad (b>0)$$

besteht, wobei der letztere Grenzwerth von b unabhängig sein soll. Darunter befindet sich die Dirichlet'sche Bedingung, die von Lipschitz (Borchardt J. LXIII.), die von du Bois-Reymond (a. a. O. Satz VI) und mehrere andere. Alle gelten im Falle, dass $\int_0^b f(x)dx$ absolut convergirt, auch wenn die Function $f(x)$ im Intervalle $(0, b)$ nicht endlich ist. Durchaus wird vorausgesetzt, dass die Function $\varphi(x,h)$ für $0<a\leqq x\leqq b$, $\int_0^x \varphi(x,h)dx$

für $0<x\leqq\varepsilon$ numerisch kleiner sei als eine bestimmte Zahl, wie gross auch h sein möge.

Im zweiten Theile der Untersuchung wird $\varphi(x,h)$ ersetzt durch $\varphi(x,\alpha,h_n)$, wo die h_n positive, mit dem Zeiger n unbeschränkt wachsende Zahlen, α einen beliebigen Werth innerhalb des Intervalles (a,b) bezeichnen. Nimmt man an, dass die Integrale $\int_{a'}^{b'}\varphi(x,\alpha,h_n)dx$, wenn a', b' gleichbezeichnet sind, für $\lim n=+\infty$ den Grenzwerth 0, die Integrale $\int_0^{\varepsilon}\varphi dx$ und $\int_{-\varepsilon}^{0}\varphi dx$ $(\varepsilon>0)$ einen und denselben von ε und α unabhängigen Grenzwerth G haben, so folgt unmittelbar, dass die Reihe

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)dx\\&+\frac{1}{2G}\sum_1^{\infty}{}_n\int_a^b f(x)\{\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)-\varphi(x-\alpha,\alpha,h_{n-1})\}dx\end{aligned}\right.$$

für alle Punkte α innerhalb (a,b), in welchen $f(x)$ endlich und stetig ist, und in deren Umgebungen nach rechts und links sie einer der obigen Bedingungen genügt, die Summe $f(\alpha)$ hat. Im Falle einer Unstetigkeit erster Art ist die Summe

$$\tfrac{1}{2}\{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)\}.$$

Herr Dini setzt nun, wie es bei Fourier'schen Reihen zutrifft,

$$\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)-\varphi(x-\alpha,\alpha,h_{n-1})=\sum_1^m{}_s H_{n,s}(\alpha)K_{n,s}(x),$$

wo m eine feste ganze Zahl, die H Functionen von α allein die K Functionen von x allein bedeuten. Insbesondere sei ferner

$$K_{n,s}(x)=p_{n,s}F(x)H_{n,s}(x)$$

und zunächst

$$H_{n,s}(x)=H_s(\lambda_n,x).$$

Dann wird die Reihe (1) in der Form erscheinen

$$(2)\quad\frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)dx+\frac{1}{2G}\sum_1^{\infty}{}_n\sum_1^m{}_s P_{n,s}H_s(\lambda_n,\alpha).$$

Dabei hat man

$$(3)\qquad P_{n,s} = p_{n,s}\int_a^b f(x)F(x)H_s(\lambda_n, x)\,dx.$$

Wenn nun für die Werthe x im Intervalle (a, b) die m Functionen $H_1(z, x), \ldots H_m(z, x)$ zugleich holomorphe Functionen der complexen Veränderlichen z in jenen Gebieten sind, welche die Punkte $z = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ enthalten, und wenn diese Zahlen λ, für welche die $H_1, \ldots H_m$ reell sein sollen, absolut genommen mit n unbeschränkt wachsen und einfache Wurzeln einer transcendenten Gleichung $u(z) = 0$ sind, so lässt sich die reelle Function $f(\alpha)$ in den oben erwähnten Fällen für die Werthe α im Intervalle (a, b) in eine Reihe von der Form (2) entwickeln. Dabei kann die reelle Function $F(x)$ nach Belieben gewählt werden, wonach die Constanten G, $p_{n,s}$ zu bestimmen sind. Es ist aber noch zu untersuchen, ob die Function

$$\varphi(t, \alpha, h_n) = \varphi(t, \alpha, h_0) + \sum_1^n{}_r \sum_1^m{}_s\, p_{r,s} H_s(\lambda_r, \alpha) H_s(\lambda_r, \alpha+t) F(\alpha+t),$$

wo $t = x-\alpha$, die im ersten Theile festgesetzten Forderungen erfüllt. So muss namentlich die Reihe, welche $\int_0^t \varphi(t, \alpha, h_n)\,dt$ für $\lim n = +\infty$ ersetzt,

$$(4)\qquad \int_0^t \varphi(t,\alpha,h_0)\,dt + \sum_1^\infty{}_n \sum_1^m{}_s\, p_{n,s} H_s(\lambda_n, \alpha) \int_0^t H_s(\lambda_n, \alpha+t)\,F(\alpha+t)\,dt,$$

für die Werthe von t zwischen 0 und $b-\alpha$, sowie für die zwischen $a-\alpha$ und 0 convergiren und eine von t und α unabhängige von 0 verschiedene Summe G, bez. $-G$ haben. Zieht man in der z-Ebene eine Linie C_n, welche die Punkte $z = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ umschliesst, so ergiebt sich unter der Voraussetzung, dass die Functionen $u(z)$, $\varphi(z)$ innerhalb C_n durchaus vom Charakter der rationalen sind und die letztere für $z = \lambda_r$ weder 0 noch ∞ ist,

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n+} \frac{\varphi(z)}{u(z)}\,dz - \sum_1^{m_n}{}_r\,\gamma_r = \sum_1^n{}_r\,\frac{\varphi(\lambda_r)}{u'(\lambda_r)},$$

worin die γ_r die Residuen bezüglich der anderen Punkte innerhalb C_n, wo $\varphi : u$ unendlich ist, bezeichnen. Wird nun

$$\varphi(z) = \sum_1^m {}_s \varphi_s(z) H_s(z, \alpha) \int_0^t H_s(z, \alpha+t) F(\alpha+t)\, dt$$

gesetzt und angenommen, dass sich für $\lim n = \infty$ der reelle Theil der linken Seite von (5) einem endlichen Grenzwerthe $\chi(\alpha, t)$ nähere, so folgt

$$\chi(\alpha, \pm 0) = -\int_0^t \frac{\partial\chi}{\partial t}\, dt$$

$$+ \sum_1^\infty {}_n \sum_1^m {}_s \left[\frac{\varphi_s(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)}\right]_0 H_s(\lambda_n, \alpha) \int_0^t F(\alpha+t) H_s(\lambda_n, \alpha+t)\, dt,$$

unter $[a]_0$ den reellen Theil einer complexen Zahl a verstanden. Zeigt sich nun, dass $\chi(\alpha, +0)$ und $\chi(\alpha, -0)$ entgegengesetzte von α unabhängige Zahlen sind, so kann man in (4)

$$\varphi(t, \alpha, h_0) = -\frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad p_{n,s} = \left[\frac{\varphi_s(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)}\right]_0, \quad \chi(\alpha, +0) = G$$

setzen. Die hauptsächliche Schwierigkeit liegt nun in der Bestimmung der Functionen $\varphi_1(z), \ldots \varphi_m(z)$. Wenn jedoch das erste Glied der Reihe (2) dieselbe Form hat, wie die übrigen und dabei

$$\int_a^b F(x) H_s(\lambda_n, x) H_t(\lambda_p, x)\, dx = 0$$

ist, falls nicht zugleich $n = p$, $s = t$ sind, so führt die Vermuthung, dass die Reihe (2) gliedweise integrirbar sei, wonach man finden würde

$$\frac{P_{n,s}}{2G} = \int_a^b f(x) F(x) H_s(\lambda_n, x)\, dx : \int_a^b F(x) H_s^2(\lambda_n, x)\, dx,$$

zufolge (3) auf die Formel

$$p_{n,s} = 2G : \int_a^b F(x) H_s^2(\lambda_n, x)\, dx,$$

somit auf die Annahme

$$\varphi_s(z) = u'(z) : \int_a^b F(x) H_s^2(z, x)\, dx.$$

Man kann übrigens, wenn man statt (5) ähnliche Formeln benutzt, auch zu anderen Annahmen über $\varphi(z)$ gelangen.

Herr Dini untersucht folgende Entwickelungen von $f(x)$,

1) die in eine Reihe von der Form

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty{}_n (a_n \cos\lambda_n x + b_n \sin\lambda_n x),$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ einfache positive Wurzeln einer transcendenten Gleichung $u(z) = 0$ sind, die auch die einfache Wurzel $z = 0$ und ausserdem keine Wurzeln auf der positiven Seite der y-Axe und auf dieser Axe selbst besitzt. $u(z) = \sin\pi z$ liefert die Fourier'sche Reihe. Es wird ferner angenommen

$$u(z) = F(z)\cos\pi z + F_1(z)\sin\pi z,$$
$$u(z) = F(z)\cos\pi z + F_1(z)\sin\pi z + F_2(z).$$

Die der Gleichung

$$cz\cos\pi z + c_1\sin\pi z = 0$$

entsprechende Reihe findet sich schon bei Fourier (Théorie de la chaleur p. 348), jedoch ohne strengen Beweis.

2) Aufgabe von Sturm (Liouville J. (1) I). Es soll $f(x)$ im Intervalle (a, b) in eine Reihe von der Form $\Sigma q_n H(\lambda_n, x)$ entwickelt werden, wo

$$q_n = \int_a^b F(x) f(x) H(\lambda_n, x)\,dx : \int_a^b F(x) H^2(\lambda_n, x)\,dx,$$

während für Werthe $m \gtrless n$

$$\int_a^b F(x) H(\lambda_m, x) H(\lambda_n, x)\,dx = 0,$$

und die $H(z, x)$ für die genannten Werthe von x und $z = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ die Differentialgleichung

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{K\frac{\partial H}{\partial x}\right\} + \left\{F(x)\nu(z) + F_1(x)\right\} H = 0$$

erfüllen. Dabei ist K unabhängig von z, und es sind die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ einfache Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$H(z, b) = 0,$$

oder

$$K\frac{\partial H}{\partial x} - hH = 0 \qquad [x = b],$$

wo h eine reelle Constante bezeichnet. Wenn H insbesondere

eine Function von $zx = \xi$ ist, so muss die Gleichung (6) ein der folgenden sein

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^a \frac{\partial H}{\partial x}\right) + x^{a-2}(b x^{a_1+1} z^{a_1+1} + c) H = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{x^a \frac{\partial H}{\partial x}\right\} + x^{a-2}(b \log xz + c) H = 0.$$

Die erstere, auf deren Betrachtung Herr Dini sich beschränkt erscheint mit Rücksicht auf den hier verfolgten Zweck nich wesentlich allgemeiner als die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{2\nu+1} \frac{\partial P_\nu}{\partial x}\right] + x^{2\nu+1} z^2 P_\nu = 0,$$

oder

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi^{2\nu+1} \frac{dP_\nu}{d\xi}\right] + \xi^{2\nu+1} P_\nu = 0,$$

der, falls ν keine negative ganze Zahl ist, die beständig conver gente Reihe

$$P_\nu(\xi) = c\xi^{-\nu} I_\nu(\xi)$$

genügt. So gelangt man zur Entwickelung einer im Intervall (0, 1) willkürlich gegebenen Function $f(x)$ in Reihen von de Form

$$\sum_1 {}_n q_n P_\nu(\lambda_n, x),$$

wo $\nu > -1$ und die λ_n die positiven Wurzeln der Gleichung

$$P_\nu(z) = 0 \quad \text{oder} \quad z P'_{\nu-1}(z) - h P_\nu(z) = 0$$

sind. Dieselben sind demnach mit den bereits bekannten Ent wickelungen nach Bessel'schen Functionen identisch. Falls λ'_n die positiven Wurzeln der Gleichung $P'_\nu(z) = 0$ sind, so ergiebt sich

$$f(x) = (2\nu+2)\int_0^1 f(x) \,.\, x^{2\nu+1}\, dx + \sum_1^\infty {}_n q'_n P(\lambda'_n, x),$$

$$q'_n = \frac{2}{P^2(\lambda'_n)}\int_0^1 f(x) \,.\, x^{2\nu+1} P_\nu(\lambda'_n, x)\, dx.$$

3) Entwickelung von $f(x)$, gegeben im Intervalle $-1, +1$ nach Kugelfunctionen. Hier ist $H_{n,1}(x) = X_n$. An Stelle von (4) tritt die Reihe

$$\tfrac{1}{2}\sum_0^n{}_n(2n+1)X_n(\alpha)\int_0^t X_n(\alpha+t)\,dt,$$

welche für $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $\pm\frac{1}{2}$ hat, je nachdem $t \gtrless 0$.

4) Herr Dini zeigt eine von Herrn Hermite in seinen Vorlesungen ohne Beweis angeführte Formel, wonach eine zwischen 0 und $2K$ willkürlich gegebene reelle Function $f(x)$ sich durch die Reihe

$$f(\alpha) = \frac{k'}{\pi}\sum_0^\infty{}_n \frac{\Theta(\alpha+\lambda_n)}{\Theta(\alpha)\,\Theta'(\lambda_n)(1-\zeta\,\mathrm{sn}^2\lambda_n)}\int_0^{2K} f(x)\cdot\frac{\Theta(x-\lambda_n)}{\Theta(x)}\,dx$$

darstellen lässt. Dabei ist $\zeta = 1:k$, die $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ sind die auf der y-Axe befindlichen Wurzeln der Gleichung $H'(z) = 0$ und λ_0 die Wurzel k derselben Gleichung. Die übrigen Bezeichnungen haben dieselbe Bedeutung, wie bei Jacobi. Aehnlich hat man

$$f(\alpha) = \frac{kk'}{\pi}\sum_0^\infty{}_n \frac{H(\alpha+\lambda_n)}{\Theta(\alpha)\,\Theta(\lambda_n')\,\Theta''(\lambda_n')}\int_0^{2K} f(x)\frac{H(x-\lambda_n')}{\Theta(x)}\,dx,$$

worin λ_0', λ_1' die Wurzeln 0 und k der Gleichung $\Theta'(z) = 0$ und $\lambda_2', \lambda_3' \dots \lambda_n' \dots$ ihre rein imaginären Wurzeln sind. In beiden Formeln hat man die conjugirten Glieder zusammenzufassen. Bedeuten $f(\alpha)$ die Werthe auf der Strecke $(0, 2K)$ einer doppeltperiodischen Function $f(z)$ erster oder zweiter Art mit den Perioden $2K$ und $2K'i$, welche auf der x-Axe nicht unendlich ist, so ergeben sich für die Coefficienten der ersteren Reihe einfache Ausdrücke. Dasselbe gilt bezüglich der zweiten Reihe, wenn die $f(\alpha)$ die analogen Werthe einer eindeutigen Function $f_1(z)$ sind, wofür die Relationen bestehen

$$f_1(z+2K) = -f_1(z), \quad f_1(z+2K'i) = p_1 f_1(z).$$

Den Schluss der bedeutenden Schrift bilden Betrachtungen, durch welche die Darstellungen der willkürlichen Function $f(x)$ noch bedeutend vermehrt werden. St.

W. J. C. SHARP. On Fourier's theorem. Quart. J. XVII. 132-133.

Eine periodische Function $F(x) = F(x+p)$, welche die Bedingung der Taylor'schen Reihe erfüllt, kann jede Lösung der linearen Differentialgleichung von der Ordnung ∞

$$\left(e^{p\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right)y = 0$$

sein. Da diese durch

$$y = e^{\frac{2i\pi}{p}k}$$

befriedigt wird, so ist ihre allgemeine Lösung die Fourier'sche Reihe

$$F(x) = C + \sum_{k=1}^{k=\infty}\left(A_k \cos\frac{2k\pi}{p} + B_k \sin\frac{2k\pi}{p}\right).$$

Ebenso findet man für $F(x+p) = -F(x)$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty}\left(A_k \cos\frac{(2k-1)\pi}{p} + B_k \sin\frac{(2k-1)\pi}{p}\right),$$

und für $F(x+p) = nF(x)$, wo die Differentialgleichung

$$\left(e^{p\frac{\partial}{\partial x}} - n\right)y = 0$$

lautet,

$$F(x) = n^{\frac{x}{p}}\left\{C + \sum_{k=1}^{k=\infty}\left(A_k \cos\frac{2k\pi}{p} + B_k \sin\frac{2k\pi}{p}\right)\right\}.$$

H.

G. CANTOR. Bemerkung über trigonometrische Reihen. Clebsch Ann. XVI. 113-115; Grunert Arch. LXIV. 434-435.

R. HOPPE. Bemerkung über trigonometrische Reihen. Grunert Arch. LXIV. 435-438.

G. CANTOR. Fernere Bemerkung über trigonometrische Reihen. Clebsch Ann. XVI. 267-269.

Herr Cantor weist nach, dass der von Herrn Appell zum Beweise eines Cantor'schen Satzes (siehe F. d. M. XI. 1879. 174)

implicite angewandte Satz: „Wenn für jeden speciellen Werth von $x \gtreqless \alpha$ und $\gtreqless \beta$:

$$\operatorname{Lim} f(n, x) = 0, \quad \text{für } n = \infty,$$

wo $f(n, x)$ für jedes specielle n eine stetige Function von x bedeutet, deren absolutes Maximum B_n sei, so ist:

$$\operatorname{Lim} B_n = 0 \text{ für } n = \infty,\text{“}$$

im Allgemeinen falsch ist. Herr Hoppe bemerkt dazu, dass zwar in Bezug auf eine beliebige Function $A_n(x)$, deren Maximum B_n, der von Herrn Appell gemachte Schluss nicht richtig sein würde, dass aber zugleich nur besondere Eigenthümlichkeiten der Function Ausnahmen von der gefolgerten Sache bewirken, während das Resultat des Schlusses im Allgemeinen zutrifft, und beweist die Richtigkeit für die vorliegende Function. M.

P. Appell. Sur les séries divergentes à termes positifs. Grunert Arch. LXIV. 387-392.

Sind $a_1 + a_2 + \cdots$ und $b_1 + b_2 + \cdots$ divergente Reihen mit positiven Gliedern, die sämmtlich unter einer endlichen Zahl liegen, so kann man zwischen n und m eine solche Relation aufstellen, dass der Quotient

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) : (b_1 + b_2 + \cdots b_n)$$

für

$$\lim n = \lim m = +\infty$$

einen gegebenen positiven Grenzwerth hat. Wenn der Quotient $a_n : b_n$ für $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth k besitzt, so ist auch

$$\lim_{n=+\infty} \{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) : (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\} = k.$$

Es wird ferner der im X. Bande 1878 dieses Jahrbuches p. 184 erwähnte Satz verallgemeinert. St.

E. Beltrami. Relazione sulla memoria di G. Ascoli: „Sulle serie trigonometriche a due variabili.“ Acc. R. d. L. (3) IV. 195-196.

Da nach dem vorliegenden sehr kurzen Berichte die Arbeit noch ausführlich erscheinen wird, muss das Referat bis zu diesem Erscheinen verschoben werden. O.

Capitel 2.

Besondere Reihen.

G. Dostor. Somme des carrés et somme des cubes des $n+1$ nombres entiers consécutifs, dont le premier est $n+1$. Grunert Arch. LXIV. 361-362.

Durch Subtraction ergiebt sich:

$$\sum_{k=n+1}^{k=2n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)(7n+6),$$

$$\sum_{k=n+1}^{k=2n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(3n+2)(5n+2).$$

Aus ersterer Relation wird noch die Gleichheit

$$4^3+5^3+7^3 = 3^3+9^3$$

abgeleitet. H.

Moret-Blanc. Solutions de questions proposées par M. Moreau. Nouv. Ann. (2) XIX. 450-454.

Es werden folgende Formeln hergeleitet:

$$(1) \quad 1+\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2+\cdots = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma^2(n+1)};$$

$$(2) \quad 1-\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2-\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2+\cdots = \cos\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)};$$

$$(3) \quad 1-\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n^2-1)}{1^2.2^2}-\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2.2^2.3^2}+\cdots = \frac{\sin n\pi}{n\pi}.$$

No. (1) gilt für $n > -\frac{1}{2}$; No. (2) gilt für gebrochene Werthe von n. O.

F. J. STUDNIČKA. Notiz zur Polynomialformel.
Casopis IX. 49. (Böhmisch.)

Hat man das Polynom

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

zur n^{ten} Potenz zu erheben, also bei ganzzahligem und positivem m, n

$$y = [f(x)]^n = \sum_{k=0}^{mn} A_k x^k$$

zu bestimmen, so erhält man nach Verwendung des Maclaurin'schen Theorems vorerst Relationen zwischen der Function $f(x)$ und ihren Ableitungen, aus welchen durch Elimination zunächst $y^{(k)}$ und dann allgemein

$$y_0^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad A_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!}$$

folgt. Da hier speciell zu gelten hat

$$f_{(0)}^{(k)} = k!\, a_k, \quad y_0 = a_0^n,$$

so erhält man schliesslich

$$A_k = \frac{n a_0^{n-k}}{k!} \begin{vmatrix} 1!a_1, & -a_0 & , & 0, & \cdots \\ 2!a_2, & (n-1)a_1 & , & -a_0 & \cdots \\ 3!a_3, & (2n-2)2!a_2, & & (n-2)a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{vmatrix}.$$

In einer Anmerkung wird zur Trinomialformel übergegangen, wobei für den Fall, dass

$$f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\beta}{2} x^2,$$

obige Determinante den Nenner eines Näherungswerthes q_k in dem eigenthümlichen Kettenbruch

$$\cfrac{1}{n\alpha + \cfrac{n\beta}{(n-1)\alpha + \cfrac{(2n-1)\beta}{(n-2)\alpha + \cfrac{(3n-3)\beta}{(n-3)\alpha + \cdots}}}}$$

bedeutet, wo für

$$u_k = n-k+1, \quad S_k = \sum u_k$$

der Zähler $a_k = \alpha u_k$, der Nenner $b_k = \beta S_k$ wird.

Daraus folgt für die Berechnung von A_k die bequemere Formel

$$A_k = \frac{nq_k}{k!}.$$

Std.

G. Frobenius. Ueber die Leibniz'sche Reihe.

Borchardt J. IXC. 262-264.

Beweis folgenden Satzes, der eine Verallgemeinerung eines Abel'schen Satzes ist.

„Ist

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,$$

und nähert sich

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

bei wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze M, so ist die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

für die Werthe von x zwischen -1 und $+1$ convergent, und die durch sie dargestellte Function nähert sich, wenn x beständig zunehmend gegen 1 convergirt, dem Werthe M als Grenze.“ In dem besonderen Falle der Reihe

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

nähert sich der Werth derselben, wenn x zunehmend gegen 1 convergirt, der Grenze $\frac{1}{2}$. Von diesem Verhalten der Reihe versucht Leibniz eine eigenthümliche Erklärung („etsi metaphysicum magis quam mathematicum tamen firmum“), in welcher Herr Frobenius die allerdings ohne Beweis aufgestellte Behauptung obigen Satzes erkennt. Hr.

V. M. Arnaud. Solution d'une question (1329).

Nouv. Ann. (2) XIX. 467-468.

In der recurrenten Reihe 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... ist

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Dann ist die Summe der n ersten Glieder der Reihe

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3} + \frac{3}{2.5} + \frac{5}{3.8} + \cdots + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}\,u_{n+3}} = 2 - \frac{u_{n+4}}{u_{n+2}\,u_{n+3}}.$$

O.

E. Cesaro. Sur la série harmonique. N. C. M. VI. 312-314.

Elementarer Beweis des folgenden Satzes: Die Summe der n ersten Glieder der harmonischen Reihe liegt zwischen $\log n$ und $\log n + \frac{1}{2}$.

Mn. (O.)

W. J. C. Sharp. Solution of a question (5763). Educ. Times XXXIII. 63-64.

Wenn k eine positive ganze Zahl ist, so ist

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i x^{\frac{1}{2}(i^2+i)}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})\dots(1-x^{k+i})}$$

eine ganze rationale Function $(k^2-k)^{\text{ten}}$ Grades von x.

O.

Stieltjes. Notiz über einen elementaren Algorithmus. Borchardt J. LXXXIX. 343-344.

Es seien $a_1, a_2, \dots a_k$ positive Zahlen, M_1 ihr arithmetisches Mittel, M_2 das arithmetische Mittel aller Producte aus je zweien u. s. w., $M_k = a_1\, a_2 \dots a_k$, $M_0 = 1$. Nun bilde man die Zahlen

$$a'_p = \frac{M_p}{M_{p-1}} \quad (p = 1, 2, \dots k),$$

so ist $a'_p > a'_{p+1}$. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhält man Gruppen von k Zahlen, deren Product unverändert bleibt, während sie sich unbegrenzt einander nähern.

St.

E. Catalan. Remarque sur une série. N. C. M. VI. 253-255.

Der Verfasser stellt in einfacher Weise die Clausen'sche Transformation für die Lambert'sche Reihe auf.

Mn. (O.)

S. Roberts. On certain series whose coefficients are the inverses of binomial coefficients. Messenger (2) IX. 166-170.

Formeln, hergeleitet aus der Identität

$$1-\frac{1}{m}x+\frac{1.2}{m(m-1)}x^2-\frac{1.2.3}{m(m-1)(m-2)}x^3+\cdots$$
$$=(m+1)\left\{\frac{1}{m+1}\cdot\frac{1}{1-x}-\frac{1}{m}\cdot\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{1}{m-1}\cdot\frac{x^2}{(1-x)^3}\cdots\right\}.$$

Glr. (O.)

E. Cesaro. Une démonstration de la formule de Stirling. N. C. M. VI. 354-357.

Vereinfachung des Beweises von Glaisher (s. F. d. M. XI. 1879. p. 184). Mn. (O.)

E. Frisby. On a series for the determination of the number expressing the ratio of the circumference to the diameter. Wash. Bull. I. 57-61.

Es werden acht complementäre Paare von Multiplis von Kreisbogen zur Berechnung von $\frac{\pi}{4}$ zusammengestellt und dem Ausdruck

$$\frac{\pi}{4}=2\operatorname{arcsin}\frac{1}{\sqrt{10}}+\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{\sqrt{50}}$$

der Vorzug ertheilt. Diesen hat indess Gauss noch geeigneter gemacht durch Transformation der Reihen in folgende:

$$\pi=2{,}4\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{2.4\ldots 2k}{1.3\ldots(2k+1)}\left\{0{,}1^k+\frac{7}{30}\cdot 0{,}02^k\right\}.$$

Er wird auf 30 Bruchstellen berechnet, wozu 30 Terme der ersten und 18 Terme der zweiten Reihe erfordert werden.

H.

W. Ligowski. Die Bestimmung der Summe Σx^r.
Grunert Arch. LXV. 329-334.

Die stetige Function S_x^r, wo r positive ganze Zahl, erfüllt für jedes x die Relation

$$S_x^r - S_{x-1}^r = x^r; \quad S_0^r = 0,$$

wodurch sie für ganze positive x vollständig definirt, für andere Werthe nicht bestimmt ist. Differentiirt man die Gleichung, so erhält man nach derselben Bestimmung

$$\frac{d}{dx} S_x^r = r S_x^{r-1} + B,$$

wo B nur von r abhängt, und nach Integration

$$S_x^r = r \int_0 S_x^{r-1} dx + Bx.$$

Zur Bestimmung von B hat man für $x = 1$

$$1 = r \int_0^1 S_x^{r-1} dx + B.$$

Fügt man die Bestimmung $S_x^0 = x$ hinzu, so ergeben sich nach einander die Functionen S_x^1, S_x^2, S_x^3, ...

Die Reihe der B ergiebt die Bernoulli'schen Zahlen. Lässt man dieselben vorläufig unbestimmt, so erhält man leicht den schliesslichen allgemeinen Ausdruck von Σx^r. Hierin $x = 1$ gesetzt, folgt eine der recurrenten Formeln zur Berechnung der B.

H.

P. Appell. Développement en série entière de $(1+ax)^{\frac{1}{x}}$.
Grunert Arch. LXV. 171-176.

Diese Function lässt sich, wie leicht erhellt, für beliebig imaginäre a und x in der Form entwickeln:

$$e^{-a}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^p A_p x^p,$$

und zwar hat A_p die Form

$$a^{p+1}\sum_{k=1}^{k=p} P_k a^{k-1}.$$

Differentiirt man einmal partiell nach a, so gewinnt man die recurrente Coefficientenrelation

$$A_p = aA_{p-1} + \int_0^a (a-1)A_{p-1}\,da.$$

Auf dieselben Coefficienten P_k wird man auch geführt, wenn man die Summe aller Producte zu p ungleichen Factoren aus der Reihe 1, 2, ... n, bezeichnet durch $S_p(n)$, untersucht. Die Induction der successiven Werthe $p = 1, 2, \ldots$ lässt erkennen, dass jene Summe die Form hat

$$S_p(n) = (n+1)n(n-1)\cdots(n-p+1)\sum_{k=1}^{k=p} P'_k(n-p)(n-p-1)\cdots(n-p-k+2),$$

wo die P' unabhängig von n sind. Die allgemeine Geltung wird durch den Schluss von $p-1$ auf p bewiesen. Es zeigt sich nun, dass $P'_k = P_k$. Denn, entwickelt man erst die anfänglich aufgestellte Function, x reell gesetzt, in die binomische Reihe nach Potenzen von a, dann die Coefficienten nach Potenzen von x, so lassen sich deren Coefficienten in den Grössen S darstellen, und man wird zu der Gleichung geführt:

$$\sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{S_p(n)a^{n-p}}{1.2\ldots(n+1)} = e^a \sum_{k=1}^{k=p} P'_k a^{k-1},$$

woraus die behauptete Identität hervorgeht.

Die Ausdrücke von S_1 und S_n lassen bemerken, dass

$$S_3(n) = \frac{1}{6} S_1^2(n) S_1(n-2).$$

Schliesslich wird bewiesen, dass für $p = \infty$

$$\lim(P_1 + P_2 + \cdots P_p) = \frac{1}{e}$$

ist. H.

A. Radicke. Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen. Halle a. S. Louis Nebert.

Die Bernoulli'schen Zahlen, Euler'schen Zahlen (d. i. Secantencoefficienten) und Tangentencoefficienten werden definirt als die Coefficienten der Entwickelung der Functionen

$$\frac{x}{e^x-1}, \quad \frac{2}{e^x+e^{-x}}, \quad \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Die Theorie der letzten ist in der der ersten, auf die sie sich reduciren, enthalten. Die Entwickelung der Recursionsformeln auf dieser Grundlage ist an sich ziemlich einfach, erhält aber eine grosse Uebersichtlichkeit durch den Gebrauch der von E. Lucas angewandten Symbole, durch welche sich die Functionen in der Form e^{bx} darstellen, so zu verstehen, dass die Exponenten von b in Indices zu verwandeln sind. Die Recursionsformeln, welche so gewonnen werden, sind einestheils diejenigen, welche die n^{te} Zahl auf alle vorhergehenden zurückführen, anderntheils die von Seidel und Stern entdeckten, welche zwischen einer bestimmten Anzahl successiver Zahlen stattfinden. Der Verfasser glaubte, dass der so nach beiden Richtungen gemachte methodische Fortschritt der Theorie eine systematische Bearbeitung verdiente; diese ist ihm auch sehr wohl gelungen.

H.

A. Radicke. Zur Theorie der Euler'schen Zahlen. Borchardt J. LXXXIX. 257-261.

Der Inhalt ist im Wesentlichen derselbe wie der des betreffenden Abschnitts der vorhergehenden Separatschrift. Doch kommt noch eine Anwendung auf die Summen $s_p = \sum_{k=1}^{k=x} k^p$ hinzu, durch welche ausser einer Formel von Stern die allgemeineren Relationen

$$(n_1+m_1)s_{m+n-1}+(n_3+m_3)s_{m+n-3}+\cdots=\frac{x^m(x+1)^n+x^n(x+1)^m}{2}$$

$$(n_2+m_2)s_{m+n-2}+(n_4+m_4)s_{m+n-4}+\cdots=\frac{x^m(x+1)^n-x^n(x+1)^m}{2}$$

gewonnen werden, erstere auch speciell für $n=m+1$ neu, w sie lautet:

$$\frac{2m+1}{1}s_{2m}+\frac{2m-1}{3}m_2 s_{2m-2}+\cdots=\frac{x^m(x+1)^m(2x+1)}{2}.$$

Vgl. E. Lucas, Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli e d'Euler.

H.

A. Radicke. Démonstration du théorème de Staudt e de Clausen. N. C. M. VI. 503-507.

A. Radicke. Démonstration d'un théorème de Stern. N. C. M. VI. 507-509.

Mn.

Ed. Lucas. Sur les nouvelles formules de MM. Seide et Stern, concernant les nombres de Bernoulli. Bull. S. M. F. VIII. 169-173.

Die von Herrn Seidel (Prag. Ber. 1877) gegebenen Formel für die Bernoulli'schen Zahlen unterschieden sich von den frühe bekannten dadurch, dass sie nicht alle, sondern nur eine be stimmte Zahl von Coefficienten enthielten. Herr Stern verallge meinerte diese Resultate, indem er Relationen aufstellte, die nu die Zahlen B_{2r}, B_{2r-2}, ... bis B_{r-s} oder B_{r-s+1} enthielten, wo eine positive Zahl oder Null und $<r$. Die Formeln des Herr Seidel entstehen hieraus, wenn man $s=0$ setzt. Einen se einfachen Beweis der Stern'schen Formeln hat Herr Radicke m Hülfe der symbolischen Formeln hergeleitet, die Herr Ed. Luca gegeben hat. Dieser Beweis wird im Vorliegenden von Herr Lucas mitgetheilt. Siehe auch die vorhergehenden Referate.

M.

V. Jung. Bemerkungen über die Bernoulli'schen Zahlen. Časopis IX. 103. (Böhmisch.)

Enthält Bemerkungen über die Ableitung dieser Zahlen, sowie ihr Verhältnis zu anderen Coefficienten und schliesslich einige Formeln zur Berechnung von π. Std.

I. W. L. Glaisher. Algebraical proof of the fractional series for the cotangent and cosecant. Quart. J. XVII. 211-227.

Die Reihenausdrücke

$$\cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} + \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \frac{1}{x+2\pi} + \cdots,$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-\pi} - \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \frac{1}{x+2\pi} - \cdots$$

werden aus den Ausdrücken von $\sin x$ und $\cos x$ als Reihenproducte gewonnen durch Zerlegung der gebrochenen Functionen $\frac{\cos x}{\sin x}$ und $\frac{1}{\sin x}$ in Partialbrüche. Den Weg, auf dem der Verfasser die Zerlegung ausgeführt hat, erklärt er in einem Nachtrag für unnöthig, da die gewöhnliche directe Methode leichter zum Ziele führt. Doch hat insbesondere ein Satz, auf den er die Operation anfänglich stützt, und den er vorgängig beweist, an sich Interesse. Dieser lautet: Setzt man

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{A_k}{x+n},$$

so ist

$$-x\varphi(x)\varphi(-x) = \frac{A_0^2}{x} + \sum_{k=1}^{k=n} kA_k\varphi(k)\left(\frac{1}{x-k} + \frac{1}{x+k}\right).$$

H.

F. Tisserand. Sur le développement d'une fonction quelconque du rayon vecteur dans le mouvement elliptique. C. R. XCI. 897-902.

Sind a, e, ζ, r resp. die grosse Halbaxe, die Excentricität, die mittlere Anomalie und der Radiusvector bei der elliptischen Planetenbewegung, so lässt sich bekanntlich entwickeln:

$$\frac{r}{a} = A_0 + A_1 \cos\zeta + \cdots + A_n \cos n\zeta + \cdots,$$

wo die A Functionen von e sind, welche sich einfach mit Hülfe Bessel'scher Functionen ausdrücken lassen. Im Vorliegenden wird nun eine entsprechende Entwickelung irgend einer Function $f(r)$ des Radiusvector in der Form

$$f(r) = B_0 + B_1 \cos\zeta + \cdots + B_n \cos n\zeta + \cdots$$

versucht, wo die B Functionen von a und e sind. Es wird

$$\frac{1}{2} B_n = (-1)^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^{n+2p}}{p!(p+n)!} u(u-n)^{n+p-1}(u+n)^{p-1}(u+n+2p).$$

Hat man den Ausdruck

$$u(u-n)^{n+p-1}(u+n)^{p-1}(u+n+2p)$$

nach ganzen positiven Potenzen von u entwickelt, so muss man u^i durch $a^i \frac{d^i f(a)}{da^i}$ ersetzen, wo $\frac{d^i f(a)}{da^i}$ den Werth bezeichnet, auf den sich $\frac{d^i f(r)}{dr^i}$ für $r = a$ reducirt. Der Coefficient irgend einer Potenz von e in B_n, als Function von a, lässt sich so in sehr einfacher symbolischer Form ausdrücken. Das Vorige wird auf die Berechnung gewisser einfacher Glieder in der Entwickelung der Störungsfunction angewendet. M.

Fr. Karliński. Berechnungsmethode der Coefficienten in der bei den meteorologischen Untersuchungen gebrauchten Bessel'schen Formel. Krak. Ber. 1880. (Polnisch).

Die Bessel'sche Formel lautet:

$$F(t) = M + a_1 \cos\frac{t}{T}360^\circ + a_2 \cos\frac{2t}{T}360^\circ + a_3 \cos\frac{3t}{T}360^\circ \ldots$$

$$+ b_1 \sin\frac{t}{T}360^\circ + b_2 \sin\frac{2t}{T}360^\circ + b_3 \sin\frac{3t}{T}360^\circ \ldots .$$

T bedeutet hier die Periode, also 12 (Monate) oder 24 (Stunden), $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $F(t)$ den entsprechenden Werth der Function, den man gewöhnlich durch 0, I, II, III, ... bezeichnet. Der Verfasser giebt folgende praktische Methode zur leichteren Berechnung der Coefficienten. Wir betrachten den Fall $T = 12$. Man schreibt die 12 Werthe der Function in der Ordnung

0, I, II, III, IV, V,
VI, XI, X, IX, VIII, VII,

und berechnet folgende Summen und Differenzen:

$$s_0 = 0+\text{VI},\quad s_1 = \text{I}+\text{XI},\quad s_2 = \text{II}+\text{X},\quad s_3 = \text{III}+\text{IX},$$
$$s_4 = \text{IV}+\text{VIII},\quad s_5 = \text{V}+\text{VII},$$
$$r_0 = 0-\text{VI},\quad r_1 = \text{I}-\text{XI},\quad r_2 = \text{II}-\text{X},\quad r_3 = \text{III}-\text{IX},$$
$$r_4 = \text{IV}-\text{VIII},\quad r_5 = \text{V}-\text{VII},$$

dann:

$$S_0 = s_0+s_3 \qquad R_0 = s_0-s_3$$
$$S_1 = s_1+s_5 \qquad R_1 = s_1-s_5$$
$$S_2 = s_2+s_4 \qquad R_2 = s_2-s_4,$$

ferner:

$$\Sigma_0 = r_0+r_3 \qquad \Delta_0 = r_0-r_3$$
$$\Sigma_1 = r_1+r_5 \qquad \Delta_1 = r_1-r_5$$
$$\Sigma_2 = r_2+r_4 \qquad \Delta_2 = r_2-r_4.$$

Dann hat man folgende Formeln für die Coefficienten:

$$12M = S_0+S_1+S_2$$
$$6a_1 = r_0+R_1\cos 30^\circ+R_2\cos 60^\circ$$
$$6b_1 = r_3+\Sigma_1\sin 30^\circ+\Sigma_2\sin 60^\circ$$
$$6a_2 = R_0+(S_1-S_2)\cos 60^\circ$$
$$6b_2 = (\Delta_1+\Delta_2)\sin 60^\circ$$
$$6a_3 = r_0-R_2$$
$$6b_3 = \Sigma_1-r_3$$
$$6a_4 = S_0-(S_1+S_2)\cos 60^\circ$$
$$6b_4 = (\Delta_1-\Delta_2)\sin 60^\circ.$$

Alles dies wird fast ohne Logarithmentafeln berechnet werden können, wenn man nur beachtet, dass

$$\cos 30^\circ = 0{,}8660 = \sin 60^\circ,\quad \cos 60^\circ = 0{,}5000 = \sin 30^\circ.$$

Hat man schon alle a und b, so sind mittels 5-stelliger Logarithmen die Ausdrücke

$$\operatorname{tg} v_m = \frac{a_m}{b_m}, \quad p_m = \frac{b_m}{\cos v_m} \quad (m = 1, 2, 3, 4)$$

leicht zu berechnen, und man hat die Bessel'sche Formel in der zur Berechnung von $F(t)$ bequemsten Gestalt:

$$F(t) = M + \sum_{m=1}^{m=4} p_m \sin(v_m + m.t.360^\circ).$$

Eine ähnliche praktisch brauchbarere Form giebt der Verfasser auch für den Fall $T = 24$. Dn.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

J. Worpitzky. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Berlin. Weidmann.

Der Verfasser übergiebt in dem vorliegenden umfangreichen Werke (784 S.) der Oeffentlichkeit eine streng systematische Entwickelung der wesentlichsten Elemente der Infinitesimalrechnung.

In seiner Arithmetik hat Worpitzky den Begriff der reellen Zahlen durch die Beziehungen, in welche die vier ersten Rechnungsarten Grössen gleicher Qualität setzen, zu einem Continuum einer Dimension entwickelt. Darauf hinweisend setzt er in dem einleitenden Capitel die Bedeutung des Urtheils: „Eine Zahl ist unendlich gross oder klein", in helles Licht, definirt in präciser Fassung den Functionsbegriff und hebt scharf den Unterschied zwischen Substitutionswerthen und Grenzwerthen einer Function hervor. Dieser begriffliche Gegensatz tritt in vielen Lehrbüchern nicht klar heraus, entweder er liegt den Verfassern selbst verhüllt, oder sie weisen nicht gebührend auf ihn hin; hier wird er fest hingestellt und an zweckmässigen Beispielen erläutert. Für die Stetigkeit der Function $f(x)$ an einer Stelle $x = a$ wird als nothwendige Bedingung gefordert, erstens, dass die Function an

dieser Stelle einen bestimmten Substitutionswerth habe und zweitens, dass dieser Substitutionswerth auch der Grenzwerth der Function sei ohne Rücksicht auf die Form der Annäherung. Nachdem hiermit die Grundlage für die Functionsbetrachtung gewonnen ist, wird die Derivirte einer Function $f(x)$ an der Stelle $x = a$ nach der Richtung des Intervalls (ab) begrifflich festgestellt und der Nachweis geführt, dass, wenn diese Derivirte an der Stelle $x = a$ eine stetige Function ist, ihr Werth unabhängig von der Differentiationsrichtung ist, so dass in dem Bereiche, in welchem die Derivirte stetig ist, die Differentiationsrichtung nicht angegeben zu werden braucht. Aus der Natur der Derivirten wird auf den Verlauf der Function geschlossen, die abgeleitete Function selbst in geometrischem und mechanischem Sinne veranschaulicht, und demnächst wird zu einigen generellen Gesetzen über die Bildung der Derivirten übergegangen. Dabei werden stets die begrifflichen Vorbedingungen für die Berechtigungen der formalen Operationen im Auge behalten und scharf zwischen begrifflichem Wesen und formaler Behandlung geschieden. So erfolgt der Hinweis, dass $\frac{dy}{du}$, $\frac{du}{dx}$ bei ihrer Multiplication und Division rein formal so behandelt werden können, als würden durch die Symbole dy, du, dx Grössen bezeichnet, dass aber die Berechtigung zu solcher formalen Behandlung nicht verleiten solle, die Derivirten begrifflich als Brüche zu erachten. Mit Hülfe der allgemeinen Differentiationsgesetze werden nunmehr die Derivirten der algebraisch zusammengesetzten Functionen gebildet, den Transcendenten wird dagegen gar keine Beachtung geschenkt. Ob das wohlgethan ist, erscheint zweifelhaft; denn, wenn jemand sich an den Gedankeninhalt eines solchen Werkes macht, hat er sich mit den niederen Transcendenten schon hinlänglich bekannt gemacht und fühlt lebhaft das Bedürfnis, die Gedankenoperationen auch auf sie anzuwenden. Doch solche praktischen Rücksichten verschwinden dem Verfasser in dem Bestreben nach systematischer Anordnung des Stoffes, und es lässt sich nicht leugnen, dass sich diese Functionen in aller Allgemeinheit und nach allen Richtungen erfolgreich erst behandeln lassen, wenn

die Potenzreihen eine eingehende Bearbeitung erfahren haben. Um zu ihnen zu gelangen, wendet sich der Verfasser sogleich zu dem Begriff des Integrals.

Ausgehend von dem Gedanken, wie aus der Derivirten $f'(x)$ die Function $f(x)$ reconstruirt werden könne, gelangt Worpitzky zu der Identität

$$f(z)-f(a) = \lim_{\Delta x=0} \sum_{x=a}^{x=x_n} f'(x)\Delta x;$$

er verfolgt den symbolischen Ausdruck rechts und stellt an ihm den Begriff des Integrals $\int_a^z f'(x)\,dx$ fest. Nachdem er die Form $\int_a^z f(x)\,dx$ auf ihre generelle Realität hin geprüft und einige Transformationen begründet hat, zeigt er, dass die Derivirte des Integrals $\int_a^z f(x)\,dx$ nach z die Function $f(z)$ sei, unterscheidet zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral und giebt Kriterien für die Endlichkeit von Integralwerthen, falls die zu integrirende Function innerhalb des Integrationsintervalls an einer Stelle unendlich wird oder eine Integrationsgrenze sich in's Unendliche ausdehnt. Die scharfe Umgrenzung der Begriffe, die mit den Symbolen umfasst werden, die Klarlegung des inneren Zusammenhanges und das sorgsame Hervorkehren der Bedingungen, unter denen die Rechnungssymbole bestimmte Zahlenwerthe darstellen, muss auch bei der Behandlung dieser Materie als eine besonders schätzenswerthe Seite des Werkes hervorgehoben werden. Aus der Inversionsbeziehung der Differential- und Integralrechnung wird nunmehr die Integration der einfachsten Functionsformen hergeleitet, es wird die partielle Integration behandelt und demnächst zur mehrfachen Differentiation und Integration übergegangen. Bei der Behandlung dieses Stoffes lässt sich das Bedenken nicht abweisen, ob die höchst generellen Formen nicht dem weniger in derartigen allgemeinen Betrachtungen Geübten schwer übersteigbare Hindernisse schaffen, doch gewinnt der Verfasser hiermit die Grundlage für den Taylor'schen Satz, der in

seinem Wesen und dem Umfang seiner Berechtigung klar in Evidenz tritt. Als Restglied wird bei der Darstellung der Function $f(z)$ nach Potenzen von $(z-a)$ die Form

$$\varphi_r = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^z (z-x)^{r-1} f^{(r)}(x)\,dx$$

gewonnen, und diese Darstellung gilt, wenn die r^{te} Derivirte $f^{(r)}(x)$ von $x = a$ bis $x = z$ einen endlichen Werth bewahrt. Solange man sich auf das Gebiet der reellen Zahlen beschränkt, ist kaum eine Darstellungsform zweckmässiger; denn die Gültigkeit der Taylor'schen Formel knüpft sich hier an die einzige Function $f^{(r)}(x)$. Nachdem die Taylor'sche Reihe noch aus einigen anderen Gesichtspunkten hergeleitet ist, wird das Restglied φ_r in die Form transformirt

$$\varphi_r = \frac{(z-a)^r}{r!}\int_0^1 f^{(r)}\left[z - w^{\frac{1}{r}}(z-a)\right]dw,$$

die den Vortheil bietet, dass das Argument z in den Integrationsgrenzen nicht auftritt. Die Zweckmässigkeit dieser Formel wird an dem Binomialsatz weiter verfolgt. In diesem Falle ist $f(z) = (1+z)^n$ und der Rest

$$\varphi_r = \binom{n}{r} z^r \int_0^1 \left(1 + z - z\sqrt[r]{w}\right)^{n-r} dw.$$

Die Prüfung dieser Restform bei unendlich wachsendem r gestattet, den Binomialsatz wie aus einem Gusse selbst an den Stellen, wo die Convergenz sonst schwierigere kritische Untersuchungen erheischt, durchaus erschöpfend zu behandeln, und gewährt durch Angabe des Restgliedes den Vortheil, die Fehlergrenze bei einer bestimmt angenommenen Gliederzahl der Reihe mit Sicherheit beurtheilen zu können, sogar wenn die Reihe nicht convergirt.

Im Anschluss an die Binomialreihe wird die Exponentialfunction und der Logarithmus stets mit Hinweis auf die Restglieder bei ihrer Darstellung durch Potenzreihen abgehandelt, einmalige und mehrmalige Differentiationen und Integrationen dieser Functionsformen erörtert und endlich das Interesse einer

Functionsform zugewendet, welche im weiteren Verlaufe der Entwickelungen ihre Bedeutung gewinnt. Wenn man die $n$mal hinter einander zu vollziehende Operation des Logarithmirens mit $l^n(x)$ bezeichnet, so hat die betrachtete Function die Form

$$\varphi(x, n, p) = l^0(x).l^1(x).l^2(x)\dots l^{n-1}(x)\,[l^n(x)]^{1+p},$$

und diese wird wirksam gemacht bei der Beurtheilung der Endlichkeit von Integralen bei unendlichem Integrationsintervall oder unendlichem Differential. Desgleichen wird sie in Beziehung gesetzt zu der Prüfung unendlicher Reihen auf ihre Convergenz; denn diese lassen sich, wie der Verfasser zeigt, als Integrale auffassen mit unendlichem Integrationsintervall, so dass die dort aufgestellten Kriterien auch hier Anwendung gestatten. Im weiteren Verlauf der Entwickelungen geht der Verfasser näher auf die Natur convergenter Reihen ein, behandelt bedingte und unbedingte Convergenz derselben, zieht unendliche Producte in den Kreis seiner Untersuchung und schliesst das lehrreiche Capitel mit einer scharfen Umgrenzung der Gültigkeit der Differentiation und Integration derartiger analytischer Formen.

Das folgende Capitel beginnt mit einer kurzen Uebersicht über das Wesen der künstlichen Zahlformen, zu welcher die Entwickelung der Algebra geführt hat, und wendet sich, nachdem die complexen Zahlen ihre Stellung erhalten, zu den Kreisfunctionen. Ihre Natur wird aus den Reihen, welche als Definition dienen, entwickelt, die inversen Functionen und ihr Zusammenhang mit den Logarithmen behandelt, um nach einer reichen Umschau auf diesem Gebiete zu der Differentiation und Integration complexer Variabeln zu schreiten. Bei der Bearbeitung dieser Materie wendet sich das Interesse unwillkürlich der Behandlung der Taylor'schen oder MacLaurin'schen Reihe zu und der Beurtheilung ihrer Natur längs der Convergenzgrenze. Ausgehend von der Cauchy'schen Formel

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int^{w}\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz$$

gelangt der Verfasser, indem er $\frac{1}{z-\zeta}$ in der geschlossenen Form

$$\frac{1}{z}+\frac{\zeta}{z^2}+\frac{\zeta^2}{z^3}+\cdots\frac{\zeta^{r-1}}{z^r}+\frac{\zeta^r}{z^r(z-\zeta)}$$

darstellt, zu dem Restgliede

$$\varphi_r=\frac{1}{2\pi i}\int^{w}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^r\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz,$$

knüpft an dieses seine Analyse bei unendlich wachsendem r für die Werthe des Arguments längs der Convergenzgrenze und gelangt auf diesem Wege zu einer wichtigen Beurtheilung des Wesens der Reihe und ihrer Beziehung zur Function für solche Argumente, welche auf der Convergenzgrenze gelegen sind. Der Werth einer solchen Beurtheilung tritt in helles Licht durch die Anwendung, welche der Verfasser von seiner generellen Untersuchung auf die Binomialreihe und die logarithmische Reihe für den Fall macht, dass die Argumente dieser Reihen auf dem Einheitskreise gelegen sind.

Das folgende Capitel beginnt mit einem durchsichtigen Beweise, dass jede Gleichung n^{ten} Grades eine Wurzel hat, und verbreitet sich alsdann über viele Seiten der algebraischen Gleichungen. Besonders ziehen dabei diejenigen Paragraphen die Aufmerksamkeit auf sich, welche eine eigenthümliche und neue approximative Bestimmung der Wurzeln durch recurrente Substitution herstellen, vor allem diejenige, welche durch den Convergenzkreis der Taylor'schen Reihe gewonnen wird.

Im weiteren Verlaufe behandelt das Lehrbuch die Integration rationaler und derjenigen irrationalen Functionen, welche auf niedere Transcendenten führen, erstreckt sich über Functionen, welche aus solchen Transcendenten gebildet sind, zieht eine grosse Anzahl interessanterer bestimmter Integrale in den Kreis der Betrachtung und beschäftigt sich mit denjenigen Transcendenten und ihren merkwürdigen Relationen, zu denen die Integration gewisser Functionsformen die Veranlassung bietet, wie den Euler'schen Integralen u. a. m. Auch dieser Theil des Werkes ist reich an Stoff und enthält manche scharfe kritische Bemerkung, auf welche von anderen Lehrbüchern die Aufmerksamkeit bei Behandlung dieses Gegenstandes oftmals nicht ausreichend gelenkt wird.

Das folgende Capitel ist der numerischen Berechnung von Werthen bestimmter Integrale gewidmet. Ausgehend von der Entwickelung der MacLaurin-Malmstén'schen Reihe wendet sich der Verfasser zu einer eingehenden Discussion ihres Restgliedes aus der Natur der Bernoulli'schen Zahlen, stellt dadurch die Bedingungen ihrer Convergenz in scharfe Beleuchtung und gewinnt einen Einblick in die Natur ihrer Divergenz. Indem er sie auf die Berechnung von Integralen und Reihensummen anwendet, behält er stets den Grad der Näherung im Auge; er erfüllt also die Forderung, die so oft ausser Acht gelassen wird, die aber für jede approximative Werthbestimmung durchaus festgehalten werden muss, denn ohne die Möglichkeit der Beurtheilung der Fehlergrenze ist jede derartige Näherungsbestimmung werthlos.

Das letzte Capitel giebt eine kritische Untersuchung der Bestimmung der Maxima und Minima von Functionen stetiger Variabeln und beleuchtet diesen Gegenstand nach allen Richtungen durch zweckmässige Beispiele.

Ein Anhang ist den wichtigsten geometrischen Anwendungen der Infinitesimalrechnung gewidmet. Er dehnt sich über ebene und räumliche Formen aus, lässt die Fruchtbarkeit der entwickelten Methoden für die Erforschung geometrischer Gebilde erkennen und enthält im Wesentlichen diejenigen theoretischen Betrachtungen, welche als eine Grundlage für die wissenschaftliche Specialarbeit auf diesem Gebiete zu erachten sind.

Schn.

J. Hoüel. Cours de calcul infinitésimal. Tome troisième. Paris. Gauthier-Villars.

Ueber den I. Band des Gesammtwerkes ist in F. d. M. III. 1871. 113., über den II. Band in IV. 1872. 114, dann über die neue Ausgabe beider Bände in XI. 1879. 192 berichtet. Vom dritten sind in diesem Jahre zwei Lieferungen erschienen. Diese enthalten zuerst die Fortsetzung der Theorie der Differentialgleichungen, welche hier zum Abschluss gelangt, indem noch die simultanen Differentialgleichungen und die Variationsrechnung,

dann die Differentialgleichungen mit mehreren Unabhängigen, und zwar erst die Gleichungen mit vollständigen Differentialen 1ter Ordnung, 1ten Grades, dann mit partiellen Derivationen behandelt werden. Der folgende Abschnitt über die Functionen einer complexen Variabeln ist begonnen; doch schliesst mit dessen 1. Capitel der III. Band. H.

C. v. BRAND. Grundriss der Differentialrechnung. I. Thl. Pyritz. Backe.

Der Verfasser ist durch den Zenonischen Trugschluss, dem er logische Richtigkeit zuschreibt, zu dem Satze gelangt, dass die Theilbarkeit der Zahl eine Grenze haben müsse, erklärt das Differential als den nicht mehr theilbaren Theil und stützt darauf die Principien der Differentialrechnung. (Vergl. Grunert Arch. LXVI. Lit.-Ber. p. 13.) H.

F. TEIXEIRA. Sur les principes du calcul infinitésimal. Mém. de Bord. (3) IV. 41-47.

Die Idee der Differentialrechnung wird durch Betrachtung einer Aufgabe in der Form $f(x, y, z, \dots) = 0$ erklärt, die nur dadurch lösbar sei, dass man vorher die Gleichung

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z, \dots) = 0$$

löse und dann die Incremente stetig verschwinden lasse.

H.

A. CAYLEY. Note on Riemann's paper „Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation." Clebsch Ann. XVI. 81-83.

Die Schrift von Riemann stützt eine Theorie der Differentiation mit gebrochenem Index auf die Entwickelung

$$z_{x+h} = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} k_\nu \partial_x^\nu z h^\nu .$$

Herr Cayley vermisst darin das Eingehen auf die Frage nach

dem Sinn einer complementären Function, die unendlich viele willkürliche Constanten enthält. Hiermit stehe in Beziehung seine eigene Schrift „Ueber eine doppelt unendliche Reihe“ Quart. J. VI. 45-47, worin er eine Reihenentwickelung

$$\Gamma(n).e^x = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} [n-1]^r x^{n-1-r}$$

aufstellt, in der Beziehung nämlich, dass auch hier eine Function e^x in eine doppelt unendliche divergente Reihe entwickelt sei.

H.

R. Hoppe. Ueber einige principielle Punkte der Infinitesimaltheorie. Grunert Arch. LXIV. 444-447.

Unendliche Grössen unterscheiden sich der Definition zufolge von variabeln schlechthin nur durch die ausdrückliche Negation einer obern, resp. untern Grenze, im letztern Falle Grenze des absoluten Werthes. Diese Definition ist ausreichend für den Beweis des Fundamentalsatzes, welcher die Gleichheit zweier Constanten aus ihrer unendlich kleinen Differenz von einer dritten variabeln Grösse folgert. Die Anwendung namentlich auf Functionen und die Handhabung in der Rechnung erfordern jedoch einige nähere Bestimmungen. Da die gewöhnliche Rechnung mit Variabeln voraussetzt, dass sie beliebig specialisirt, ihnen also beliebige Grenzen gesetzt werden können, so ist zunächst die Unterscheidung der Unendlichen durch besondere Zeichen nothwendig. Von der allgemeinen Variabeln kann man zur unendlichen übergehen, wir sagen dann: sie als unendlich „betrachten“. Die Rechnung mit mehreren abhängigen Unendlichen erfordert zur Vermeidung von Verwickelungen die Festsetzung der Unabhängigen. Rücksichtlich schwankender Functionen ist in die Definition der Functionen Unendlicher die Bedingung aufzunehmen, welche die Ueberschreitung der Grenzen zu einer unabänderlichen macht. Ueber alle diese durch die analytische Praxis an die Hand gegebenen Einführungen wollte der Verfasser ausführliche Rechenschaft geben, weil sie bis in die neueste Zeit noch oft misgedeutet worden sind, und infolge

solcher Misdeutungen die Infinitesimalrechnung für Viele einen transcendentalen Anschein behalten hat. H.

Capitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

P. du Bois-Reymond. Ueber den Satz

$$\lim f'(x) = \lim \frac{f(x)}{x}.$$

Clebsch Ann. XVI. 550.

Reclamation der Priorität bezüglich des im Titel genannten Satzes (vergl. d. Jahrb. XI. 1879. p. 199). St.

J. Macnie. Introduction to differentiation. Analyst VII. 152-153.

Beweis, dass

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

ist, mit Hülfe von Brüchen, welche sich der Null nähern.

Glr. (O.)

P. Mansion. Démonstration de la relation $D^2_{xy}u = D^2_{yx}u$. N. C. M. VI. 369-370.

Der Satz ist richtig 1) für $u = x$ und $u = y$, 2) für $u = f(v)$, wenn es für v der Fall ist, 3) für $u = v + w - t$, wenn es für v, w, t so ist, 4) also für jede elementare Function.

Mn. (O.)

P. Mansion. Dérivées des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire. N. C. M. VI. 358-364.

Setzt man, als Definition

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y, \quad e^{x+yi} = e^x + e^{yi},$$

so lässt sich leicht beweisen, dass, wenn x und y gegen 0 convergiren,

$$\text{Lim}\,\frac{e^{x+yi}-1}{x+yi}=1.$$

Daraus lassen sich die Derivirten der elementaren Functionen einer imaginären Variabeln ableiten. Es folgen kritische Bemerkungen von E. Catalan. Mn. (O.)

G. Halphén. Sur une formule d'analyse. Bull. S. M. F. VIII. 62-64.

Es wird die Formel bewiesen

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)\,\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k(n)_k\frac{1}{x^k}\varphi^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[\frac{f(x)}{x^k}\right].$$

Hiervon ist ein einfaches Resultat:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

Dieses wird dann direct auf zwei Arten bewiesen. Ferner wird von letzterer Gleichung das p-fache Integral betrachtet.

H.

J. Hammond. On general differentiation. Am. J. III. 164-174.

Der Verfasser geht bei Bestimmung des Differentialquotienten für einen beliebigen reellen Ordnungsexponenten von der Definition aus

$$D^n x^m=\frac{f(m+1)}{f(m-n+1)}x^{m-n},$$

woraus für $n=1$

$$f(m+1)=mf(m)$$

folgt. Dieser Gleichung entsprechen nun allgemeinere Lösungen als die von Peacock und Liouville angenommenen, wie Kelland bemerkt hat. Es ergiebt sich ein Ergänzungsterm

$$D^n 0=\Sigma Ax^{m-n},$$

wo sich die Summe über alle m erstreckt, für welche $\frac{f(m+1)}{f(m-n+1)}$ unendlich wird. Für positive ganze n giebt es keine solchen

Terme; für negative ganze n erhält man die willkürliche ganz Function der Integrale; für gebrochene n erscheinen ganze un gebrochene Exponenten. Kommt in der Ergänzungsfunction ei Term von gleicher Form mit der differentiirten Function vor, s zeigt sich, dass zur Potenz von x noch der Factor $\log x$ hinzutritt Auch zu den nicht allgemein gültigen Differentialformeln

$$D^n e^{ax} = a^n e^{ax}; \quad D_x^n (x+y)^m = D_y^n (x+y)^m$$

wird die Ergänzungsfunction bestimmt. Schliesslich wird di Leibniz'sche Entwickelung von $D^n(uv)$ unter der allgemeinere Annahme ausgeführt. H.

F. G. Teixeira. Sur les dérivées d'ordre quelconque Battaglini G. XVIII. 301-309.

Der Verfasser gelangt zu einem Ausdruck des n^{ten} Differen tialquotienten einer Function u einer Function y von x, indem e erst die Form feststellt, dann die specielle Einsetzung

$$u = y^k; \quad y = x + x^2 + \cdots x^n$$

macht und dann x verschwinden lässt. Diesen Ausdruck ha Bertrand auf anderm Wege bewiesen. Der Verfasser wende ihn an auf

$$y = (\varphi(x))^m, \quad y = a^{\varphi(x)}, \quad y = \sin\varphi(x).$$

Aus der ersten Formel leitet er die inverse Entwickelung in Form einer Determinante ab. Nach gleicher Methode werden die Diffe rentialquotienten von Functionen mehrerer Functionen dargestellt H.

J. C. Glashan. Change of the independent variable. Am. J. III. 190-191.

Setzt man

$$u = f(y); \quad x = \varphi(y); \quad y = \varphi^{-1}(x),$$

entwickelt

$$f(y+h) = f\varphi^{-1}[x + \{\varphi(y+h) - x\}]$$

in beiden Formen nach der Taylor'schen Reihe, dann wieder $\varphi(y+h)$ und vergleicht die Coefficienten der Potenzen von h, so

erhält man recurrente Gleichungen für die Derivationen von u nach x, durch deren Auflösung folgender Ausdruck gewonnen wird:

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n u}{dx^n} = \begin{vmatrix} S_1^1 & 0 & 0 & \dots 0 & u_1 \\ S_2^1 & S_2^2 & 0 & \dots 0 & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1}^1 & S_{n-1}^2 & S_{n-1}^3 & \dots S_{n-1}^{n-1} & u_{n-1} \\ S_n^1 & S_n^2 & S_n^3 & \dots S_n^{n-1} & u_n \end{vmatrix} : x_1 x_1^2 x_1^3 \dots x_1^n,$$

wo zur Abkürzung

$$x_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n x}{dy^n}; \quad u_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n u}{dy^n}$$

gesetzt wird und die Summe aller Terme der Entwickelung von

$$(0_0 + x_1 + x_2 + \cdots)^n,$$

in denen die Summe der Indices $= m$ ist, durch S_n^m bezeichnet ist.

H.

Capitel 3.

Integralrechnung.

C. Köhler. Ueber die Integration. Leipzig. Textbauer.

P. du Bois-Reymond. Ein allgemeiner Satz der Integrirbarkeitslehre. Clebsch Ann. XVI. 112.

Ohne Beweis wird der Satz mitgetheilt: „Die integrirbaren Functionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_n(x)$ seien im Intervall $a \gtreqless x \gtreqless b$, resp. zwischen den Grenzen $\alpha_1 \gtreqless \varphi_1(x) \gtreqless \beta_1$ etc. eingeschlossen, und die Function $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ sei stetig im Gebiet $\alpha_1 \gtreqless x_1 \gtreqless \beta_1$ etc., dann ist $F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x))$ im Intervall a bis b integrirbar."

H.

A. E. PELLET. Sur les intégrales de fonctions algébriques. C. R. XC. 676-677.

Es sei y in x durch eine algebraische Gleichung m^{ten} Grades bestimmt. Das Integral $\int F(x, y)dx$, wo F eine rationale Function bezeichnet, soll durch eine rationale Substitution in das Integral einer rationalen Function $\int F(t)\,dt$ übergehen. Nach einem Theorem von Abel ist alsdann t rationale Function von x und y, und es sei ganze Function $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades in Bezug auf y. Die allgemeine Bedingung erhält man durch Einführung und Identificirung. Letztere ist, wenn nur die gegebene Gleichung zwischen x, y eine unicursale Curve ausdrückt, nicht nur immer möglich, sondern jedem System der Coefficienten in der Entwickelung von t in y entspricht eine Classe von Functionen F. Dies wird an dem Beispiel $y^2-\varphi(x^2)\psi(x^2) = 0$ (φ, ψ ganze Functionen) gezeigt, wo man

$$t = x\sqrt{\frac{\psi(x^2)}{\varphi(x^2)}}, \quad t = \frac{1}{x}\sqrt{f(x^2)}$$

setzen kann. Formeln, welche Hermite in Résal's J. Jan. 1880 in einer Abhandlung „Sur une formule d'Euler" (s. Abschn. VII. Cap. 2) gegeben hat, sind als specielle Fälle hierin begriffen. H.

W. BRAUN. Zur Integration gewisser gemischt goniometrischer Differentiale. Bair. Bl. XVI. 420-422.

Bei Auflösung der in der Elasticitätslehre vorkommenden Gleichung

$$A\frac{d^2\omega}{dt^2} + B\frac{d\omega}{dt} + C\omega + D\omega^2 = 0$$

sah sich der Verfasser auf das unbestimmte Integral

$$\int e^{\alpha t}\sin^m \varrho t\cos^n \varrho t\,dt$$

geführt, für welches er in den Lehrbüchern kein ihm passendes, d. h. lediglich endliche Processe zu Hülfe nehmendes Auswerthungs-

verfahren angegeben fand. Er setzt nunmehr

$$A_r = e^{ax}\sin^{m+n-r}x\cos^r x, \quad J_k = \int A_k\,dx$$

und bekommt allmälig das nachstehende System trinomischer Recursionsgleichungen:

$$\begin{array}{lr} aJ_0 + (m+n)J_1 & = A_0 \\ \quad -J_0 + aJ_1 + (m+n-1)J_2 & = A_1 \\ \quad\quad -2J_1 + \quad aJ_2 + (m+n-2)J_3 & = A_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ -(m+n-1)J_{m+n-2} + \quad aJ_{m+n-1} + J_{m+n} & = A_{m+n-1} \\ -(m+n)J_{m+n-1} + aJ_{m+n} & = A_{m+n}. \end{array}$$

Somit ist, wie der Verfasser allerdings nicht ausdrücklich bemerkt, J_{m+n} durch einen Kettenbruch oder auch, völlig independent, durch den Quotienten zweier Kettenbruchdeterminanten gegeben. Das allgemeine Integral

$$\int f(x)e^{ax}\sin^m x\cos^n x\,dx$$

lässt eine ähnliche Art der Behandlung zu. Gr.

E. Beltrami. Intorno ad un teorema di Abel e ad alcune sue applicazioni. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII. 327-338.

E. Beltrami. Intorno ad alcune serie trigonometriche. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII. 402-413.

In der Lösung Abel's eines mechanischen Problems, von welchem das der Tautochrone ein besonderer Fall ist (Oeuvres compl. I. p. 27), findet sich ein wichtiges Theorem, vermöge dessen man in vielen Fällen die Form einer Function, die in einem bestimmten Integral enthalten ist, angeben kann, wenn der Werth dieses Integrals als Function eines in demselben befindlichen Parameters gegeben ist. Um die wahre Natur dieses Theorems in's Licht zu setzen, stellt der Verfasser dasselbe in einer neuen Form dar. Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Functionen, die miteinander durch die Relation

$$(1) \qquad \int_0^\pi \varphi(r \sin\vartheta)\, d\vartheta = \psi(r)$$

verbunden sind, so folgt aus dieser, wie bewiesen wird, di zweite Relation

$$(2) \qquad \int_0^r \varphi(r)\, dr = \frac{r}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(r\sin\vartheta)\, d\vartheta;$$

umgekehrt ist die erste Relation eine nothwendige Folge de zweiten. In der Aequivalenz von (1) und (2) besteht de wesentliche Charakter des Abel'schen Satzes. Differentiirt ma (2) nach r, so erhält man

$$(3) \qquad \varphi(r) = \frac{1}{\pi}\left\{\psi(0) + r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi'(r\sin\vartheta)\, d\vartheta\right\}$$

als die Umkehrung von (1), wie es der Abel'schen Aufgabe ent spricht. Indess setzt die Existenz der Gleichung (3) gewiss Eigenschaften der Function ψ voraus, welche für das Bestehe von (2) nicht nothwendig sind. Von den Formeln (1) und (2 macht der Herr Verfasser eine Anwendung auf die Ausdrücke

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(x\sin\vartheta)\, d\vartheta = \pi J_0(x), \\ &\int_0^\pi \sin(x\sin\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \pi J_1(x), \end{aligned}\right.$$

welche die cylindrischen Functionen von den Ordnungen Nul und Eins definiren. Aus ihnen folgt, wenn man in (1)

$$\varphi(x) = \cos x, \quad \psi(x) = \pi J_0(x)$$

setzt und $J_1(x) = -J_0'(x)$ berücksichtigt,

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(x\sin\vartheta)\,\vartheta\, d\vartheta = \frac{\sin x}{x}, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(x\sin\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{1-\cos x}{x}. \end{aligned}\right.$$

Mit Hülfe der Formeln (4) und des Abel'schen Satzes hat Herr Schlömilch eine beliebige Function in eine Reihe entwickelt, die nach cylindrischen Functionen von den Ordnungen 0 und 1 mit den Argumenten x, $2x$, $3x$, ... fortschreitet. In analoger Weise erhält nun der Verfasser vermittels der Formeln (5) und des Abel'schen Satzes in obiger Form die Entwickelung einer Function in eine trigonometrische nach den sinus oder cosinus fortlaufende Reihe mit den Argumenten

$$v_1 x,\ v_2 x,\ v_3 x,\ \ldots,$$

wo v_1 v_2 ... die positiven Wurzeln einer der transcendenten Gleichungen

$$J_0(x) = 0,\quad J_0'(x) = 0,\quad J_0''(x) = 0$$

sind. In der nachfolgenden Arbeit werden die bezüglichen Resultate in vollkommnerer Gestalt, welche die Aehnlichkeit mit der Fourier'schen Reihe besser erkennen lässt, abgeleitet. Eines derselben sei hier mitgetheilt. Bezeichnen $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ die positiven Wurzeln der Gleichung $J_0(x) = 0$, und ist die Function $F(x)$, die für $x = 0$ verschwindet, zwischen den Grenzen 0 und 1 durch die Reihe

$$F(x) = \Sigma\, \alpha_n \sin a_n x$$

darstellbar, dann sind die Coefficienten α_n durch die Formel

$$\alpha_n = \frac{-4}{\pi a_n J_0'(a_n)^2} \int^1 F(x) \varphi_n'(x) dx$$

gegeben, wo

$$\varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{y J_0(a_n y) dy}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

ist. Hr.

J. Tetmajer. Eine neue Formel zur Integration durch Reihen. Krak. Ber. VI. (Polnisch.)

Der Verfasser hat diese neue Formel schon in der im Jahre 1857 in Paris erschienenen Abhandlung „Principes fondamentaux du calcul transcendant“ entwickelt. Sie lautet:

$$\int F'(x)\,dx = C + 2\left[F\left(\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2} + \frac{F'''\left(\frac{x}{2}\right)}{3!}\frac{x^3}{2^3} + \frac{F^{V}\left(\frac{x}{2}\right)}{5!}\frac{x^5}{2^5} + \cdots\right]$$

Er gelangt zu ihr, indem er

$$F(x+\Delta x) = F\left(x + \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$F(x) = F\left(x + \frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta x}{2}\right)$$

nach den Potenzen von $\frac{\Delta x}{2}$ entwickelt und die Differenz

$$F(x+\Delta x) - F(x)$$

bestimmt.

Der Verfasser wendet jene Formel auf einige Integrale und auf die Berechnung von $\frac{d(a^x)}{dx}$ an. Dem Referenten scheint aber, dass seine Formel weder rascher noch einfacher zum Ziele führt als die gewöhnliche Taylor'sche oder Maclaurin'sche Reihe.

Dn.

R. Hoppe. Excentrischer Kugelsector. Grunert Arch. LXV. 178-188.

Es wird der Inhalt des Körpers berechnet, welcher von einer Kugelfläche und drei beliebigen, sich im Innern schneidenden Ebenen begrenzt ist. Er wird zuerst in drei Sectoren zerlegt, welche eine durch den Mittelpunkt gehende gemeinsame Kante haben, dann die drei Ausdrücke addirt; die Summe ergiebt für den ganzen Sector:

$$S = \frac{1}{3}(A+B+C-2R)$$

$$-\frac{1}{3}\Sigma\cos\gamma\left(\frac{3-\cos^2\gamma}{2\sin\gamma}m - e\sin\alpha\sin\gamma\sin\frac{m}{2\sin\gamma}\cos\frac{l}{\sin\gamma}\right),$$

wo A, B, C die inneren Winkel des begrenzenden sphärischen Bogendreiecks, m einen der drei Bogen, e den Abstand der Sectorspitze vom Mittelpunkte, l das Stück des Parallelkreises m zwischen der darauf sphärisch projicirten Centralprojection der Sectorspitze vom Pole des Kreises m bezeichnen, und die Summe

über die drei verschiedenen m zu nehmen ist. Der Ausdruck gilt, so lange die Winkel A, B, C concav sind. Anwendung ist gemacht auf den gleichseitigen und unendlich dünnen Sector zum Zweck der Bestimmung der Vorzeichen der Terme. Derselbe Rechnungsgang führt auch zur Bestimmung der Integrale, von denen die Coordinaten des Schwerpunkts, die Trägheitsmomente und die Hauptträgheitsaxen abhängen. Ihre Werthe sind, der Form nach entwickelt, mit unbestimmten Coefficienten aufgestellt. H.

Br. Abakanowicz. Der Integrator. Krak. Ber. VII. (Polnisch.)

Das vom Verfasser erdachte und verfertigte Instrument dient zur Construction der sogenannten Integralcurve. Es giebt nicht blos die Summe der Elemente ydx, was auch die verschiedenen Planimeter geben, sondern es stellt ausserdem das ganze Summationsverfahren graphisch dar. Die Construction des Integrators hat ihren Grund in einem neuen Princip; es sollen nämlich zwei bewegliche Punkte A, B so verbunden werden, dass, wenn der eine, z. B. A die Differentialcurve beschreibt, der zweite B die Integralcurve zeichnet. Die ganze zu diesem Zwecke dienende Einrichtung besteht aus einem Cylinder, der hier die Stelle einer Schraube mit unendlichen schmalen Gewinden vertritt, und aus zwei geradlinigen in zu den Gewinden parallelen Ebenen liegenden Kanten, die den Cylinder mit gewisser Kraft zusammendrücken. Dn.

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

P. du Bois-Reymond. Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung: $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Clebsch Ann. XVI. 115-128.

Hat die stetige Function $F(x)$ im Intervalle (a, b) überal einen vorderen und einen hinteren Differentialquotienten (d. h existiren die Grenzwerthe

$$\lim_{\varepsilon=+0} \frac{F(x+\varepsilon)-F(x)}{\varepsilon} = f_v(x), \quad \lim_{\varepsilon=+0} \frac{F(x-\varepsilon)-F(x)}{-\varepsilon} = f_h(x))$$

so fallen in jedem Theilintervalle die oberen und die unteren Grenzen der beiden Functionen zusammen. Ist die eine der Functionen $f_v(x)$, $f_h(x)$ integrabel, so ist es auch die andere, und beide liefern dasselbe Integral $F(b)-F(a)$. Der letztere Satz ist bereits von Herrn Dini gezeigt, während der erstere als besonderer Fall eines ebenfalls von ihm herrührenden Satzes aufgefasst werden kann (vgl. d. Jahrb. X. 1878. p. 275). Herr du Bois-Reymond beweis ferner, dass zugleich mit $f_v(x)$ oder $f_h(x)$ auch der mittlere Differentialquotient von $F(x)$, d. i. der Grenzwerth von

$$\{F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon_1)\} : \{\varepsilon+\varepsilon_1\},$$

wenn die durch ein Gesetz $\varphi(\varepsilon, \varepsilon_1) = 0$ verbundenen positiven Zahlen ε, ε_1 zugleich zur Grenze 0 übergehen, integrabel sei und das nämliche Integral liefere. St.

H. Stabenow, T. R. Terry, Tanner, Nash. Solutions of a question (6097). Educ. Times XXXIII. 71-73.

Auswerthung bestimmter Integrale, wie

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^4} dx = -\frac{1}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{1-3x}{(1+x)^5} (\log x)^2 dx = 1.$$

O.

W. Kapteyn. Neuer Beweis. Grunert Arch. LXV. 448.

Der Satz, dass, wenn für alle Werthe von φ

$$a_0 + \sum_{k=1}^{k=n} a_k \sin k\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{k=n} a_k \cos k\varphi = 0,$$

die Coefficienten sämmtlich null sind, folgt sehr einfach aus der dann stattfindenden Gleichung

$$\int_0^\pi \sin p\varphi\, d\varphi \sum_{k=1}^{k=n} a_k \sin k\varphi = 0,$$

beziehungsweise

$$\int_0^\pi \cos p\varphi\, d\varphi \sum_{k=0}^{k=n} a_k \cos k\varphi = 0,$$

wo p eine ganze Zahl $\gtreqless n$ ist. H.

Ch. Hermite. Sur l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)\, dx$.

Teixeira J. II.

Herr Hermite leitet das obige Integral her aus

$$\int_0^\pi \operatorname{cotg}(x-\alpha)\, dx$$

und bestimmt den Werth dieses Integrales, indem er es in seine Elemente zerlegt. Diese addirt er mittels der Formel

$$\operatorname{cotg}(x-\alpha)+\operatorname{cotg}\left(x-\alpha+\frac{\pi}{n}\right)+\cdots+\operatorname{cotg}\left(x-\alpha+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$
$$= n \operatorname{cotg} n(x-\alpha),$$

indem er darin

$$\frac{\pi}{n} = dx \quad \text{und} \quad \alpha = a+ib$$

setzt. Die Grenze der rechten Seite findet er durch Transformation mit Hülfe imaginärer Exponentialgrössen. Tx. (O.)

W. Ligowski. Directe Bestimmung des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$. Grunert Arch. LXV. 110.

Durch die Zerlegung

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

und die Substitution von $2x$ für x ergiebt sich sofort der Werth $-\frac{\pi}{2}\log 2$. H.

Ph. Gilbert. Note sur quelques intégrales définies. Ann. Soc. sc. Brux. IV. B. 141-158.

Eine Reihe von Integralen, die aus

$$\int_0^\infty \frac{a\cos xu}{a^2+u^2}\,du = \int_0^\infty \frac{a\sin xu}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{2}\pi e^{-ax}$$

durch Anwendung bekannter Methoden und specieller Kunstgriffe hergeleitet sind. Mn. (O.)

T. R. Terry. Notes on a class of definite integrals. Proc. L. M. S. XI. 29-35.

Der Verfasser knüpft eine Reihe interessanter Bemerkungen an die beiden Integrale

$$\int_0^\pi \frac{\cos px\,dx}{\varDelta^n}, \quad \int_0^\pi \frac{\sin^{2p} x\,dx}{\varDelta^{n+p}},$$

wo $\varDelta = 1-2a\cos x + a^2$. Der Satz von Poisson

$$\int_0^\pi \frac{\sin^m x\,dx}{\varDelta^n} = (1-a^2)^{1+m-2n}\int_0^\pi \frac{\sin^m x\,dx}{\varDelta^{1+m-n}}$$

wird hier geometrisch bewiesen, indem eine Kreissehne (Radius $=1$) durch einen festen Punkt im Abstand a vom Mittelpunkte um denselben rotirt, wo die beiden $\varDelta$ die Quadrate der Stücke der Sehne darstellen, deren Product $= 1-a^2$.

Ferner wird $\varDelta^{-n}$ in die Reihe

$$\varDelta^{-n} = A_0 + 2A_1\cos x + \cdots + 2A_p\cos px + \cdots$$

entwickelt, wo nach Gauss die A sich in vierfacher Weise durch Werthe der Function F ausdrücken lassen. Dem entsprechend giebt das Jacobi'sche Theorem

$$\int_0^\pi \varPhi^{(p)}(\cos x)\sin^{2p} x\,dx = \frac{(2p)!}{2^p\,p!}\int_0^\pi \varPhi(\cos x)\cos px\,dx,$$

angewandt auf

$$\varPhi(\cos x) = \varDelta^{-n},$$

indem bei Integration zur Rechten alle Terme obiger Reihe ausser dem p^{ten} verschwinden, folgende vier Ausdrücke des zweiten Integrals:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2p} x\,dx}{\Delta^{n+p}} = \frac{\pi(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} F\{n+p,\ n,\ p+1,\ a^2\}$$

$$= \frac{\pi(2p)!}{2^{2p}(p!)^2(1+a^2)^{n+p}} F\left\{\frac{n+p}{2},\ \frac{n+p+1}{2},\ p+1,\ \frac{4a^2}{(1+a^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{\pi(2p)!}{2^{2p}(p!)^2(1\pm a)^{2n+2p}} F\left\{n+p,\ \frac{2p+1}{2},\ 2p+1,\ \frac{\pm 4a}{(1\pm a)^2}\right\}.$$

Die Gleichheit derselben folgt überdies aus Resultaten von Kummer. Ferner wird gezeigt, dass die von Legendre angewandte Methode der Berechnung des zweiten der Integrale

$$\int_0^\pi \frac{\cos px\,dx}{\Delta^n},\quad \int_0^\pi \Delta^n \cos px\,dx$$

durch Reihenentwickelung auch für das erste passt, dessen Werth er durch Induction gefunden hat. Ferner wird die Herleitung des Werthes des zweiten Integrals von Jacobi besprochen, welche für $n = \frac{1}{2}$ ungültig wird, ein Fall, den er voraus behandelt hat. Bei Anwendung der hypergeometrischen Reihe folgt das bezügliche Resultat durch eine Formel von Kummer. Endlich wird noch auf das zweite Integral das folgende

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2p} x \cos x\,dx}{\Delta^{n+p}} = \frac{\pi a(n+p)(2)!}{(p+1)\,2^{2p}(p)!} F\{n+p+1,\ n,\ p+2,\ a^2\}$$

durch partielle Integration zurückgeführt. H.

O. Schlömilch. Ueber den Quotienten zweier Gammafunctionen. Schlömilch Z. XXV. 351-352.

Durch Transformation zweier Integralformeln, Reihenentwickelung von Factoren, Multiplication der Summen und Integration durch Euler'sche Functionen werden die zwei Ausdrücke erhalten:

$$\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p)} = \sqrt{p}\, e^{-\frac{1}{4p}}\left\{1+\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\alpha_k}{(p+\frac{1}{2})(p+\frac{3}{2})\dots(p+k-\frac{1}{2})}\right\}$$

$$= \sqrt{p}\, e^{\frac{1}{4p}}\left\{1-\sum_{k=1}^{k=} \frac{\beta_k}{(p+\frac{1}{2})(p+\frac{3}{2})\dots(p+k-\frac{1}{2})}\right\},$$

wo die Coefficienten

$$\alpha_1 = \frac{1}{8}, \quad \alpha_2 = \frac{9}{128}, \quad \alpha_3 = \frac{193}{3072}, \cdots$$

$$\beta_1 = \frac{3}{8}, \quad \beta_2 = \frac{15}{128}, \quad \beta_3 = \frac{443}{3072}, \cdots$$

successiv zu berechnen sind. H.

O. SCHLÖMILCH. Einige Bemerkungen über den reciproken Werth der Gammafunction. Schlömilch Z. XXV. 103-106.

Der Verfasser hat schon früher (Analyt. Studien I. S. 45) die Gauss'sche Definitionsgleichung transformirt in

$$\Gamma(1+\varrho) = e^{-C\varrho} \frac{e^{\varrho}}{1+\varrho} \frac{e^{\frac{1}{2}\varrho}}{1+\frac{1}{2}\varrho} \frac{e^{\frac{1}{3}\varrho}}{1+\frac{1}{3}\varrho} \cdots,$$

wo C die Constante des Integrallogarithmus. Hieraus folgt die Möglichkeit der Entwickelung

$$\frac{e^{-C\varrho}}{\Gamma(1+\varrho)} = H_0 + H_1\varrho + H_2\varrho^2 + \cdots.$$

Zur Bestimmung der H findet er

$$H_0 = 1; \quad H_1 = 0; \quad H_2 = -\frac{\pi^2}{12};$$

$$mH_m = \sum_{k=2}^{k=m} (-1)^{k-1} \quad H_{m-k} \sum_{h=1}^{h=\infty} h^{-k}$$

und nach Multiplication mit der Reihe für $e^{C\varrho}$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} = K_0 + K_1\varrho + K_2\varrho^2 + \cdots$$

mit der Recursionsformel

$$(m+1)K_{m+1} = CK_m - \sum_{k=2}^{k=m+1} (-1)^k K_{m-k+1} \sum_{h=1}^{h=\infty} h^{-k}.$$

Aus dem Fourier'schen Integrale leitet er dann her

$$\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}\,dz}{(1+iz)^{1+\varrho}},$$

woraus der independente Ausdruck

$$K_n = \frac{(-1)^n e}{2\pi.1.2\ldots n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}\,dz}{1+iz} [\log(1+iz)]^n$$

hervorgeht. H.

O. Schlömilch. Ueber eine Verwandte der Gammafunction. Schlömilch Z. XXV. 337-342.

Die hier untersuchte Function ist

$$P(x) = \prod_{k=1}^{k=\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Es werden mehrere Methoden aufgeführt, um deren Werthe numerisch zu berechnen. $\log P(x)$ lässt sich leicht nach Potenzen von x entwickeln und die Formel auf kleine x anwenden. Das gleiche gilt von der Ausdrucksform

$$\log P(x) = \int_0^x \frac{dx}{x}\int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u}\,du,$$

wo erst nach Potenzen von u entwickelt wird. Ferner werden von der anfänglichen Logarithmenreihensumme die n ersten Glieder abgetrennt und der Rest nach der Bernoulli'schen, hier halbconvergenten Reihe entwickelt. Ferner wird der Ausdruck

$$\log P(x) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-xu}}{u}\log\left(\frac{1}{1-e^{-u}}\right)du$$

in drei Theile $X+Y+Z$ zerlegt. Der erste Theil

$$X = \int_0^\infty\left\{\log\left(\frac{1}{1-e^{-u}}\right)+e^{-u}\log u\right\}\frac{du}{u}$$

ist constant, der zweite

$$Y = \int_0^\infty (e^{-ux}-e^{-u})\frac{\log u}{u}\,du$$

integrabel, der dritte endlich,

$$Z = \int_0^\infty\left\{\log u+\log\left(\frac{1}{1-e^{-u}}\right)\right\}\frac{du}{u}\,e^{-xu},$$

wird in eine halbconvergente Reihe

$$Z = \frac{1}{2x}-\frac{B_1}{2^2x^2}+\frac{B_3}{4^2x^4}-\frac{B_5}{6^2x^6}+\cdots$$

entwickelt. Ferner wird Z durch eine stets convergirende Reihe der Form

$$Z = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{c_k}{(x+1)(x+2)\dots(x+k)}$$

dargestellt. Endlich wird der Schluss gezogen, dass die obige Constante

$$X = \frac{\pi^2}{6} + \lim \left\{\frac{1}{2}(\log n)^2 - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\log k}{k}\right\} \quad (n = \infty)$$

ist. Die Verwandtschaft mit $\Gamma(x)$ wird durch die Relation

$$\log P(x) = \int_0^x \frac{dx}{x} \left\{C + \frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}\right\}$$

begründet. H.

G. de Longchamps. Sur les intégrales eulériennes de seconde espèce. Ann. de l'Ec. N. (2) IX. 419-427.

Das Euler'sche Integral $\Gamma(p)$ ist der Grenzwerth der Function

$$y_p = \int_0^q e^{-x} x^{p-1} dx.$$

Für diese leitet der Verfasser den Ausdruck her

$$y_p = e^{-q} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{q^{p+k}}{p(p+1)\cdots(p+k)},$$

indem er das allgemeine Glied in Partialbrüche zerlegt und die so entstehende Doppelsumme durch Veränderung der Ordnung der Terme als Product der Reihe für e^q und des durch Entwickelung von e^{-x} erhaltenen Reihenausdrucks für das Integral y_p darstellt. Nur bis dahin ist das Verfahren richtig. Nächstdem stellt der Verfasser den Satz auf: „Wenn die unendlichen Reihen

$$u = \Sigma \alpha_n x^n \quad \text{und} \quad v = \Sigma \beta_n x^n$$

unbegrenzt convergiren, so ist

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right),\text{“}$$

ein Satz, der jedenfalls durch Bedingungen beschränkt werden müsste. Der Anwendung zufolge wird die Existenz beider Grenz-

werthe nicht vorausgesetzt, sondern der Grenzwerth 1 für den Quotienten beider Seiten behauptet, was eine Beziehung zwischen z und n erfordert, die der Verfasser unbeachtet lässt. Im Beweise ist der Irrthum von wesentlichem Einfluss, dass der Rest einer unbegrenzt convergenten Reihe unabhängig von x durch hinreichend grosses n beliebig klein gemacht werden könne. Nach diesem Satze verwandelt sich nun beim Uebergang zur Grenze der obige Ausdruck für y_p in einen solchen für $\Gamma(p)$, der sich vom Gauss'schen nur durch den Factor $\left(\frac{q}{n}\right)^p$ unterscheidet, der also keinen Sinn hat, wenn er nicht derselbe sein soll. Obwohl hiernach alles folgende, nämlich die Herleitung der Eigenschaften der Γ-Function, der Begründung entbehrt, so scheint doch das Verfahren einen möglichen neuen und sinnreichen Weg der Herleitung anzudeuten. H.

A. BERGER. Sur quelques applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres. Upsala Afh. 1880. M. L.

E. SCHRÖDER. Bestimmung des infinitären Werthes des Integrals $\int_0^1 (u)_n\, du$. Schlömilch Z. XXV. 106-117.

O. SCHLÖMILCH. Nachschrift zu der Arbeit. Schlömilch Z. XXV. 117-123.

Das bezeichnete Integral geht aus dem Coefficienten einer der drei von Ubbo Meyer (Grunert Arch. IX. 101) untersuchten Reihenentwickelungen

$$\left\{\frac{\log(1+z)}{z}\right\}^x = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n^{(x)} . z^n$$

für $x = -1$ hervor. Transformationen desselben sind

$$(17)\quad \begin{cases} C_n^{(-1)} = \int_0^1 (u)_n\,du \\ = (-1)^n \int_{n-2}^{n-1} (u)^n\,du \\ = (-1)^{n-1} \int_0^1 \dfrac{(1-y)^{n-2}\,dy}{\pi^2+\left(\log\dfrac{y}{1+y}\right)^2} \\ = (-)^{n-1} \int_0^1 \dfrac{1+x^{n-2}}{(1+x)^n}\,\dfrac{dx}{\pi^2+(\log x)^2} \\ = (-1)^{n-1} \int_0^\infty \dfrac{1}{(1+x)^n}\,\dfrac{dx}{\pi^2+(\log x)^2} \\ = (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^\infty \dfrac{e^\vartheta}{(1+e^\vartheta)^n}\,\dfrac{d\vartheta}{\pi^2+\vartheta^2}. \end{cases}$$

Nach Einsetzung in obige Reihe ergeben sich einige Formeln:

$$\frac{1}{\log z} + \frac{1}{1-z}$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{d\vartheta}{\pi^2+\vartheta^2}\,\frac{1+z\cos i\vartheta}{1+2z\cos i\vartheta+z^2} = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\vartheta}{\pi^2+\vartheta^2}\,\frac{1}{1+ze^\vartheta}$$

die Euler(-Mascheroni)'sche Constante des Integrallogarithmus

$$C(-1) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\vartheta}\log(1+e^\vartheta)}{\pi^2+\vartheta^2}\,\frac{d\vartheta}{\pi^2+\vartheta^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{d\vartheta}{\pi^2+\vartheta^2}\left\{(e^\vartheta+e^{-\vartheta})\log\left(e^{\frac{\vartheta}{2}}+e^{-\frac{\vartheta}{2}}\right) - \vartheta\,\frac{e^\vartheta-e^{-\vartheta}}{2}\right\}$$

Aus dem Ausdruck (17) wird nun folgende Bestimmung für $n=\infty$ hergeleitet:

$$(25)\qquad \lim\{(-1)^{n-1}n(\log n)^2 C_n^{(-1)}\} = 1.$$

Dasselbe Resultat lässt sich auch, wie Lüroth entdeckt hat, und der Verfasser hier ausführt, aus dem von Weierstrass aufgestellten Grenzwerthe

$$\lim \frac{n^{-u}Fc(n)}{Fc(u+n)} = 1 \qquad (n=\infty)$$

gewinnen.

In der Nachschrift sucht Herr Schlömilch die Grösse $C_n^{(-1)}$ approximativ für ein endliches n zu bestimmen, um schliesslich

eurtheilen zu können, in wieweit Gleichung (25) eine Approxima-
ion darbiete. Er stellt sie in der Form dar:

$$\int_0^1 (u)_n\,du = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{k=0}^{k=\infty} b_k \int_0^1 u^{k+1} e^{-au}\,du,$$

ro die b recurrent aus der Gleichung

$$\left(\sum_{k=1}^{k=\infty} u^k \sum_{h=1}^{h=n-1} h^{-k-1}\right)\sum_{k=0}^{k=\infty} b_k u^k = \sum_{k=0}^{k=\infty} (k+1)\, b_{k+1}\, u^k$$

efunden werden, und

$$a = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

st. Die endliche Summe nach h wird durch die halbconvergente
ernoulli'sche Reihe auf die unendliche (bis $h=\infty$) zurück-
eführt. Hiernach findet er für $n = 1000000$:

$$n\int_0^1 (u)_n\,du = 0{,}004814;\ \text{nach Gleichung (25)} = 0{,}005239,$$

voraus hervorgeht, wie wenig letztere zur Approximation ge-
ignet ist. H.

J. Cockle. On a certain definite integral. Messenger (2) X. 98-101.

Bezieht sich auf einen Ausdruck für die reelle Wurzel der
Gleichung

$$y^n - xy^{n-1} - 1 = 0$$

in Form eines bestimmten Integrals, welches sich auf 1 reducirt,
wenn $x = 0$. Glr. (O).

P. Wiecke. Einige Bemerkungen über die Fehlergrenze bei Anwendung der Simpson'schen Regel. Z. dtsch. Ing. XXIII. 83-89.

Angenommen, es sei

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots,$$

und es werde der nach der Simpson'schen Regel bestimmte

15*

Näherungswerth von $\int_0^h y dx$, welcher gleich

$$\frac{h}{6}(y_0 + 4y_m + y_h)$$

ist, durch r bezeichnet, so ergiebt sich der in dem Näherungs-werth liegende Fehler

$$\varDelta = r - \int_0^h y dx = \frac{h^5}{120}\{a_4 + 2{,}5\, a_5 h + 4{,}1071\, a_6 h^2 + \cdots\}.$$

Andererseits giebt die vierte Differenzen-Reihe für y, wenn für x gesetzt wird $0, \frac{h}{4}, \frac{h}{2}, h$,

$$\varDelta^4 y_0 = \frac{3h^4}{32}\{a_4 + 2{,}5 a_5 h + 4{,}0625\, a_6 h^2 + \cdots\}.$$

Der Verfasser betrachtet die in den beiden Klammern stehenden Ausdrücke als gleich und setzt

$$\frac{\varDelta}{\varDelta^4 y} = \frac{h^5}{120} : \frac{3h^4}{32}, \quad \text{also} \quad \varDelta = \frac{4}{45} h \varDelta^4 y_0.$$

Dieser Ausdruck wird benutzt, um das gefundene Resultat zu verbessern und auch um den zulässigen Werth von h zu bestimmen, wenn eine gewisse Fehlergrenze $\varDelta$ nicht überschritten werden soll. Ls.

D. Trowbridge. On the quadrature of curves and the cubature of solids by means of infinite series. Analyst VII. 47-51.

Anwendung der Formel

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \cdots,$$

um Flächentheile des Kreises, der Ellipse, der Parabel, der logarithmischen Curve, der Kugel und des Ellipsoides zu bestimmen.

Glr. (O.)

B. Baillaud. Sur le calcul numérique des intégrales définies. C. R. XC. 974-976.

Wenn es sich darum handelt, für $\int_0^1 y\,dt$ die grösste Annäherung durch Substitution eines Polynoms n^{ten} Grades in t für y, welches für $n+1$ Werthe von t dem y gleich ist, zu gewinnen, so geschieht dies, wie Gauss gezeigt hat, indem man $x = 1-2t$ setzt und die $n+1$ Werthe von x durch die Gleichung $X_{n+1} = 0$ bestimmt, wo X_{n+1} das Legendre'sche Polynom bezeichnet. Der Beweis von Gauss ist schwierig. Jacobi hat dasselbe Resultat auf elegantem Wege erreicht. Der Verfasser nimmt jedoch die Ideen von Gauss wieder auf, um daraus eine Deduction in wenigen Zeilen zu bilden. Die Coefficienten des Polynoms in t,

$$T = t^{n+1} + \alpha_1 t^n + \alpha_2 t^{n-1} + \cdots + \alpha_{n+1}$$

befriedigen die Gleichung

$$\mu = \frac{\alpha_{n+1}}{h} + \frac{\alpha_n}{h+1} + \cdots + \frac{\alpha_1}{h+n} + \frac{1}{h+n+1} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots n+1).$$

Man erhält sie durch Zerlegung von

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n+1)}{(-p)(-p+1)\ldots(-p+n+1)}$$

in Partialbrüche, und es ergiebt sich

$$T = F[n+2, -(n+1), 1, t] \quad (F \text{ Gauss'sche Function}).$$

Die Methode wird noch angewandt auf die Aufgabe, eine Function von der Form

$$\sin\frac{x-x_1}{1}\,\sin\frac{x-x_2}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{n+1}}{n+1}$$

zu finden unter den Bedingungen:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) \frac{\cos}{\sin}(px)\,dx = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Es wird nämlich $\varphi(x)$ das obige T für $t = \sin^2\vartheta$, $x = 2\vartheta$.

H.

R. Radau. Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur d'une intégrale définie. Liouville J. (2) VI. 283-336.

Ausführliche Darlegung der Theorie nach dem von Gauss, Tchébychef u. A. erreichten Standpunkt. H.

R. Radau. Sur les formules de quadrature à coefficients égaux. C. R. XC. 520-529.

Der Verfasser betrachtet den besonderen Fall, wo die Coefficienten der Functionswerthe im Voraus gleich gesetzt sind und nur die Intervalltheilung disponibel bleibt, und leitet Formeln von Hermite, Mehler und Tchébychef auf neuem Wege her.

H.

R. Radau. Remarques sur la formule de quadrature de Gauss. C. R. XC. 913-915.

Der Verfasser vergleicht die Abscissen, welche aus der Gauss'schen Gleichung

$$P(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = 0$$

hervorgehen, sowie die Coefficienten und Correctionen mit denjenigen, welche die Gleichung $(x^2-1)\,P'(x) = 0$ liefert, und bemerkt, dass das Mittel zwischen beiden eine weit kleinere Correction ergiebt. Ferner theilt er die von ihm auf acht Bruchstellen berechneten Abscissen und Coefficienten für $n = 8$ und 9 nach Gauss (das ist die Fortsetzung der Tabelle von Gauss) und für $n = 9$ und 10 nach seiner eigenen Formel mit. H.

O. Callandreau. Sur la formule de quadrature de Gauss. C. R. XC. 1067-1069.

Der Verfasser bemerkt, dass man bei einer ausgedehnten Classe von Transformationsformeln analog denen von Gauss den Sinn des begangenen Fehlers a priori erkennen, bisweilen sogar einen angenäherten Ausdruck der complementären Terme erhalten kann. H.

E. CATALAN. Sur la quadrature des courbes paraboliques. N. C. M. VI. 396-402.

E. CATALAN. Note sur la quadrature des courbes paraboliques. Mém. de Belg. in 4°. XLIII.

Sehr einfacher Beweis des Fundamentalsatzes von Gauss über angenäherte Quadraturen. Mn. (O.)

F. AUGUST. Ueber eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Methode der mechanischen Quadratur. Grunert Arch. LXVI. 72-93.

Die Verallgemeinerung besteht darin, dass, während Gauss und Jacobi eine Entwickelung der gegebenen Function unter dem Integralzeichen nach Potenzen mit den Exponenten 0, 1, 2, ... zu Grunde legen, die Exponenten hier eine beliebige steigende arithmetische Reihe mit einem Anfang > -1 bilden. Durch die Substitution

$$x = h\xi^{\frac{1}{\delta}}$$

wird allerdings (zugleich mit der Reduction der Integralgrenzen auf 0 bis 1) die Verallgemeinerung soweit wieder aufgehoben, dass die Exponenten um 1 steigen und nur beliebig anfangen. Der Anfangsexponent $s-1$ bleibt dann zur Verfügung, wenn es sich darum handelt, auf die besondere Natur der gegebenen Function einigermassen Rücksicht zu nehmen. Die Lösung der Aufgabe, in der Darstellung

$$\int_0^h F(x)dx = h\Sigma c_i F(x_i)$$

die c_i (nach Newton) einem genauen Zutreffen auf n Terme der Reihe für $F(x)$ gemäss, dann die Argumente x_i (nach Gauss) so zu bestimmen, dass unabhängig von den n folgenden Coefficienten die Genauigkeit sich auf die $2n$ ersten Terme erstreckt, folgt nun zuerst dem von Jacobi gewählten Gange. Die Argumente ξ_i sind die n Wurzeln der analogen Gleichung

$$\text{(XVIII.)} \qquad \frac{d^n[\xi^{s-1+n}(\xi-1)^n]}{d\xi^n} = 0,$$

und es wird ebenso bewiesen, dass sie reell und zwischen 0 und 1 enthalten sind.

Hierauf löst der Verfasser die Aufgabe direct auf überraschend einfachem Wege und gelangt zur identischen Bestimmung, die jedoch zunächst in anderer Form auftritt. Er macht die resultirende Eigenschaft, dass die Lösung unabhängig von den Coefficienten der gegebenen Function wird, zur anfänglichen Bedingung, welche nach der Substitution von

$$x_i = h\xi_i^{\frac{1}{\delta}}; \quad \frac{\mu}{\delta} = s; \quad c_i x_i^{\mu-1} = \frac{h^{\mu-1}\gamma_i}{\delta}$$

$2n$ Gleichungen

$$\text{(XXIII.)} \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \gamma_k \xi_k^\lambda = \frac{1}{s+\lambda} \quad (\lambda = 0, 1, \ldots 2n-1)$$

ergiebt. Die Resultate der Elimination der γ zwischen je $n+1$ successiven derselben werden verbunden mit der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n & \xi \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots & \xi_n^n & \xi^n \end{vmatrix} = 0,$$

welche ausdrückt, dass die $\xi_1, \xi_2 \ldots$ die n Werthe von ξ sind, und mit welcher jene gemeinsame Unterdeterminanten in Bezug auf die letzte Verticalreihe haben. Eliminirt man die n Unterdeterminanten zwischen den so erhaltenen linearen homogenen Gleichungen, so erhält man die Bestimmung der ξ in der Form:

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi & \ldots & \xi^n \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} & \ldots & \frac{1}{s+n} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} & \ldots & \frac{1}{s+n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{s+n-1} & \frac{1}{s+n} & \ldots & \frac{1}{s+2n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Die γ findet man aus beliebigen n Gleichungen (XXIII.), die c sind durch die γ und ξ bekannt. Zu der gleichen Bestimmungsform gelangt der Verfasser dann mit Benutzung der Theorie der recurrirenden Reihen. Es wird nun bewiesen, dass die Wurzeln ξ reell und zwischen 0 und 1 enthalten sind. Ferner wird der Fehler mit Benutzung der recurrenten Bestimmung von vorher gebrauchten Coefficienten für die fortgesetzte Reihe ausgedrückt. Es folgen dann noch einige Bemerkungen in Betreff der Identität der Function (XVIII.) im besonderen Falle mit der Kugelfunction, ferner der Symmetrie der Gleichung, durch welche die Berechnung der Wurzeln sich auf die Hälfte reducirt, ferner des Vortheils, den die Erweiterung gewährt. H.

P. Barbarin. Note sur le planimètre polaire. Nouv. Ann. (2) XIX. 212-216.

Die Auseinandersetzung des Polarplanimeters ist wegen unrichtiger Behauptungen ganz unverständlich. H.

E. B. Elliott. An expansion for $\int_0^\infty \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x^n}dx$, n being a positive integer. Messenger (2) X. 118-119.

Die Entwickelung ist:

$$\int_b^a da \int_0^\infty \frac{\varphi'(x)}{x^{n-1}}dx + \int_b^a \int_b^a da^2 \int_0^\infty \frac{\varphi''(x)}{x^{n-2}}dx + \cdots$$
$$+ \int_b^a \int_1^a \int_1^a \ldots da^{n-1} \int_0^\infty \frac{\varphi^{n-1}(x)}{x}dx$$
$$+ \int_b^a \int_1^a \int_1^a \ldots \frac{da^n}{a}\{\varphi^{n-1}(\infty)-\varphi^{n-1}(0)\}.$$

Glr. (O.)

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

H. G. Zeuthen. Bevis for, at Ligningen $f(x, y, y') = 0$ har et fuldständigt Integral. Zeuthen Tidsskr. (4) IV. 161-167.

Um die Existenz einer der Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0$$

entsprechenden primitiven Gleichung zu beweisen, schlägt der Verfasser den folgenden Weg ein. Das vollständige Integral lässt sich als Grenzform der Relation

$$y - y_0 = y'_0(x_1 - x_0) + y'_1(x_2 - x_1) + \cdots + y'_{n-1}(x - x_{n-1})$$

auffassen, wenn die Theilung des Intervalles $x - x_0$ in's Unendliche fortgesetzt wird, während die y_r und die y'_r successive durch die Gleichungen

$$f(x_r, y_r, y'_r) = 0 \quad \text{und} \quad y_{r+1} - y_r = y'_r(x_{r+1} - x_r)$$

bestimmt werden. Es kommt hierbei wesentlich darauf an, die Existenz einer Grenze zu beweisen. Setzt man voraus, dass nicht $\frac{df}{dy} = 0$ oder $\frac{dy'}{dx} = 0$, was erlaubt ist, so hat man, wenn X, Y, Y' zusammengehörige Werthe bezeichnen,

$$Y' - y' = a(X - x) + b(Y - y),$$

wo a und b endliche Grössen bedeuten. Ist dann m der grösste der Werthe y'_r, so ist demnächst $y - y_0 = c(x - x_0)$, wo c eine endliche Grösse, kleiner als m, bezeichnet. Theilt man ferner ein kleines Intervall $x - x_0$ in n Theile, so erhält man statt einer Differenz $\eta - y_0 = y'_0(x - x_0)$ eine neue Differenz $y - y_0$, und es wird

$$y - \eta = (y'_1 - y')(x_2 - x_1) + (y'_2 - y'_0)(x_3 - x_2) + \cdots$$
$$\cdots + (y_{n-1} - y'_0)(x - x_{n-1}).$$

Ist $y'_r - y'_0$ die grösste der hier auftretenden Differenzen, so wird

$$y - \eta < (y'_r - y'_0)(x - x_0) < (a + bc)(x - x_0)^2.$$

Eine fortgesetzte Theilung irgend eines Intervalles $x_s - x_{s-1}$ be-

wirkt deshalb, dass y_s den Zuwachs $\Delta y_s = a_s(x_s - x_{s-1})^2$ erhält, wo a_s eine Grösse bedeutet, welche für $x_s - x_{s-1} = 0$ nicht unendlich wird. Mittels ähnlicher Betrachtungen wird bewiesen, dass, wenn man y_0 den Zuwachs Δy_0 giebt, der Endwerth y ebenfalls einen Zuwachs $P.\Delta y_0$ erhält, wo P endlich bleibt. Durch Combination dieser beiden Sätze wird endlich dargelegt, nicht nur, dass ein Grenzwerth von $y - y_0$ existirt, sondern auch, dass dieser Grenzwerth von der Art, auf welche die Theilung vorgenommen wird — wenn dieselbe nur in's Unendliche fortgesetzt wird — ganz unabhängig ist, so dass man auf diese Weise zuletzt y als Function von x_1, x_0 und y_0 dargestellt erhält.

Gm.

H. G. Zeuthen. Sur la détermination d'intégrales algébriques de différentielles algébriques. C. R. XC. 1114-1118.

Es sei die algebraische Gleichung

$$(1) \qquad f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

von den Graden μ, μ' resp. in x und $\frac{dy}{dx}$. Es soll die algebraische Lösung derselben

$$(2) \qquad F(x, y+c) = 0$$

gefunden werden, wenn sie existirt. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass F vom Grade μ' in y sein muss. Die Ordnung n der durch (2) dargestellten Curven wird gegeben durch

$$n = \mu + \mu' - \tau',$$

wo τ' in folgender Weise sich bestimmt: Man suche alle endlichen Werthe $x = a$, für welche $y' = \infty$ wird, und stelle alle möglichen nach ganzen positiven Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{s}}$ fortschreitende Entwickelungen auf von der Form

$$\frac{dx}{dy} = A_1(x-a)^{\frac{t_1}{s}} + A_2(x-a)^{\frac{t_2}{s}} + \cdots,$$

nehme in jeder dieser Reihen die kleinste von den beiden Zahlen s und t_1 und bilde aus ihnen die Summe, so ist τ' gleich dieser

Summe. Ist die Ordnung n bestimmt, so handelt es sich nur noch um die Bestimmung der Coefficienten in (2.), welche einfach durch die Identität der aus (1) und (2) abgeleiteten Werthe für y' erhalten werden; die etwa dabei sich herausstellende Unmöglichkeit erweist, dass das gesuchte Integral transcendent ist. Zuweilen ist es von Vortheil, die Tangentialgleichung der Integralcurven aufzusuchen. Man setzt zu dem Ende $\frac{dy}{dx} = u$, $x = \frac{dv}{du}$, so dass u und $v = x\frac{dy}{dx} - y$ die Coordinaten einer Tangente sind. Die Gleichung (1) behält ihre Form, und man erhält für die Ordnung dieser Curven $n' = \mu + \mu' - \tau$, wo τ durch die obige Regel bestimmt wird. Die Bestimmungen von n und n' werden an einigen Beispielen ausgeführt. Hr.

P. Cazzaniga. Sulla integrazione delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e di 1° grado mediante funzioni algebriche. Battaglini G. XVIII. 72-92.

Die Methode ist dieselbe, welche Herr Casorati in seiner unter dem nämlichen Titel in den Rend. Ist. Lomb. (2) XI. 804 erschienenen Note (Vgl. F. d. M. X. 1878, p. 220) befolgt hat; auch hier beschränkt sich die nähere Untersuchung auf den Fall, dass die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \alpha(xy)dx + \beta(xy)dy = 0,$$

wo α und β ganze Functionen n^{ten} Grades sind, durch das allgemeine Integral

$$\psi_1^{m_1}\psi_2^{m_2}\dots\psi_{n+1}^{m_{n+1}} = \text{Const.},$$

wo $\psi_s = x + p_s y + q_s$, befriedigt wird, also $n+1$ particuläre Integrale $\psi_s = 0$ vom 1ten Grade hat. Die Formeln für die Bedingung der Integrirbarkeit unter dieser Form, sowie für die Werthe der m, p, q werden für $n = 1$ bis 3 ausgerechnet und dann für ein beliebiges n aufgestellt. Für $n = 2$ stimmen sie mit den Resultaten, die Herr Winckler in einer Arbeit in den Wien. Ber. LXIV. p. 247 (s. F. d. M. III. 1871. 146) erhalten hat, überein.

Bemerkenswerth sind noch folgende in der Einleitung enthaltene Sätze die sich auf Lösungen beliebigen Grades beziehen: 1) Damit die Gleichung (1) ein particuläres Integral der Form $\varphi_r = 0$ habe, wo φ_r eine ganze Function vom Grade r ist, sind zwischen den Coefficienten von (1) $r(n-1)$ Bedingungen erforderlich. 2) Die Anzahl solcher particulären Integrale r^{ten} Grades ist höchstens $(n+1)^r$. 3) Sollen unter den Lösungen ϱ_1 vom 1ten, ϱ_2 vom 2ten u. s. f. bis ϱ_r vom r^{ten} Grade vorkommen, so muss sein

$$(n-1)(\varrho_1 + 2\varrho_2 + \cdots + r\varrho_r) \leqq (n+1)(n+2) - 1.$$

Hr.

L. KÖNIGSBERGER. Ueber algebraisch-logarithmische Integrale nicht homogener linearer Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1880. 453-455.

Der Abel'sche Satz, dass, wenn das Integral einer algebraischen Function $\int y dx$ selbst eine algebraische oder algebraisch-logarithmische Function ist, diese oder ihr Logarithmand eine rationale Function von x und y sein muss, erfährt folgende höchst bemerkenswerthe Erweiterung: Es sei die Gleichung in z

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y$$

gegeben, worin sämmtliche Coefficienten algebraische Functionen von x sind; dieselbe besitze ein algebraisches Integral z_1 (resp. ein algebraisch-logarithmisches $\log v$), während die reducirte homogene Differentialgleichung entweder gar kein algebraisches (resp. algebraisch-logarithmisches) Integral enthält, oder nur solche, die (resp. deren Logarithmanden) rational aus $x Y_1 \dots Y_m$ zusammengesetzt sind; dann lässt sich z_1 (resp. v) als rationale Function von $x Y_1 \dots Y_m$, y ausdrücken. Hr.

L. KÖNIGSBERGER. Ueber den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen von Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1880. 625-630.

Mit Hülfe der Resultate der vorhergehenden Arbeit ergiebt sich unter Anderem der Satz: Lässt sich das allgemeine Integral y einer algebraischen irreductiblen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung in der Form $y = F(xy_1\, c_1 \ldots c_m)$ ausdrücken, wo F eine algebraische Function, y_1 ein particuläres Integral, $c_1 \ldots c_m$ Constanten bedeuten, so erhält man wieder das allgemeine Integral, wenn man für y_1 ein beliebiges anderes particuläres Integral substituirt. In Anwendung auf Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form $\frac{dy}{dx} = f(xy)$ findet sich, dass das allgemeine Integral, wenn dasselbe eine rationale Function eines particulären Integrals sein soll, nur eine lineare ganze oder gebrochene Function sein kann. Der erste Fall führt auf lineare Differentialgleichungen, der zweite Fall auf die Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = P(Ay^2 + By + C)$$

und

$$\frac{dx}{dy} = A_1 y^2 + B_1 y + C_1$$

(wo P, A_1, B_1, C_1 algebraische Functionen von x und A, B, C Const.), je nachdem die Coefficienten der linearen Beziehung constant oder algebraische Functionen von x und der Integrationsconstanten sind. Hr.

H. Laurent. Sur la théorie des équations différentielles ordinaires. Nouv. Ann. (2) XIX. 153-161.

In Analogie mit dem Euler'schen Multiplicator einer gewöhnlichen Differentialgleichung wird für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zwischen $x_1 \ldots x_{n+1}$

$$(1.) \qquad P_{i1}\, dx_1 + \cdots + P_{i,n+1}\, dx_{n+1} = \Omega_i = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

die Existenz eines Systemes von n Multiplicatoren $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ von der Beschaffenheit nachgewiesen, dass

$$\lambda_1 \Omega_1 + \cdots + \lambda_n \Omega_n$$

ein vollständiges Differential ist. Solcher Systeme giebt es unendlich viele, aber nur n von einander linear unabhängige. Ist Δ

die Determinante derselben und $\lambda_{n+1,1}\dots\lambda_{n+1,n}$ ein neues System von Multiplicatoren, dann erhält man in den Gleichungen

$$\frac{1}{\varDelta}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial\lambda_{1i}}\lambda_{n+1,1}+\frac{\partial\varDelta}{\partial\lambda_{2i}}\lambda_{n+1,2}+\cdots+\frac{\partial\varDelta}{\partial\lambda_{ni}}\lambda_{n+1,n}\right)=\text{Const.}$$

die n Integrale des vorgelegten Systems (1). Hiervon macht der Verfasser eine Anwendung auf das System linearer Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dx}=X_{i1}x_1+X_{i2}x_2+\cdots+X_{in}x_n+X_{i0}\quad(i=1,2\dots n),\tag{2}$$

in denen die X_{ik} eine Function von x allein bezeichnen. Die Multiplicatoren $\lambda_1\dots\lambda_n$ kann man hier als blosse Functionen von x annehmen, und es ergiebt sich alsdann, dass dieselben dem System linearer Differentialgleichungen ohne zweites Glied

$$\frac{d\lambda_i}{dx}=-(\lambda_1X_{1i}+\cdots+\lambda_nX_{ni})\quad i=1,2\dots n\tag{3}$$

genügen. Ist dieses integrirt, so erhält man durch blosse Quadraturen die Unbekannten $x_1\dots x_n$ als Functionen von x. Zwischen den Systemen (2) und (3) besteht die Reciprocität, dass die Multiplicatoren von (3) die Lösungen der Gleichungen (2) ohne zweites Glied sind. Führt man ein

$$H=\Sigma\lambda_ix_kX_{ik},$$

so kann das aus den Gleichungen (2) und (3) gebildete System in der Form des canonischen Systems geschrieben werden

$$\frac{dx_i}{dx}=\frac{\partial H}{\partial\lambda_i},\quad\frac{d\lambda_i}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\quad(i=1,2\dots n),$$

von welchem eine Lösung, nämlich

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n=\text{const.},$$

bekannt ist.

Schliesslich wird der Zusammenhang gezeigt, welcher zwischen den Multiplicatoren eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und der Bildung der zugehörigen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung besteht. Bringt man ersteres auf die Form

$$\frac{dx_1}{dx}=X_1,\dots\frac{dx_n}{dx}=X_n,$$

so dass die zugehörige partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$$

ist, so sind $\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial u}{\partial x_n}$ die gesuchten Multiplicatoren des gegebenen Systems. Hr.

Adolph Steen. Om Differentialligningers Integration ved bestemte Integraler. Kjbhvn. Forh. 1880. 237-243.

Wenn eine vorgelegte Differentialgleichung sich für besondere Werthe der eingehenden Constanten durch wiederholte Integration integriren lässt, und man dann das gefundene vielfache Integral durch ein einfaches bestimmtes Integral ersetzt, so kann es vorkommen, dass die so erhaltene Form auch noch im allgemeinen Falle der Differentialgleichung genügt. So hat z. B. die Gleichung $y''-axy'+\mu ay=0$ das particuläre Integral

$$y=\int^{(\mu+1)}e^{\frac{1}{2}ax^2}\,dx^{\mu+1},$$

wenn μ eine ganze positive Zahl ist. Der damit äquivalente Ausdruck

$$y=\int_{-\infty\sqrt{-1}}^{x}(x-\alpha)^k e^{\frac{1}{2}a\alpha^2}\,d\alpha,\quad\text{oder}\quad y=\int_{\infty\sqrt{-1}}^{0}e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)^2}\alpha^{\mu}\,d\alpha$$

wird noch für alle $\mu<1$ seine Gültigkeit behalten. Schliesslich giebt der Verfasser particuläre Integrale der beiden Gleichungen

$$y''\mp\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{b}\right)y'+cy=0$$

an. Sie sind respective $(bc>2)$

$$y=\int_{-\infty}^{x^2}(x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc}\,\alpha^{\frac{a-bc-1}{2}}\,e^{\frac{\alpha}{2b}}\,d\alpha$$

und

$$y=x^{1-a}e^{-\frac{x^2}{2b}}\int_{-\infty}^{x^2}(x^2-\alpha)^{\frac{1}{2}bc-1}\,\alpha^{\frac{a-bc-1}{2}}\,e^{\frac{\alpha}{2b}}\,d\alpha.$$

Gm.

L. Fuchs. Ueber eine Classe von Functionen mehrerer Variablen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen. Gött. Nachr. 1880. 170-176, Borchardt J. IXC. 150-169, Darboux Bull. (2) IV. 278-300, C. R. XC. 678-680, 735-736.

L. Fuchs. Ueber die Functionen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen entstehen. Gött. Nachr. 1880. 445-453, Darboux Bull. (2) IV. 328-336.

Die erst citirte Arbeit bezeichnet einen wichtigen Fortschritt, nicht minder in der Functionentheorie als in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Durch Verallgemeinerung des Umkehrungsproblems, welchem die Abel'schen Functionen mehrerer Variablen ihre Entstehung verdanken, wird ein neues weit umfassenderes Gebiet von analytischen Functionen mehrerer Variabeln erschlossen, zu deren Erzeugung die Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten zu Grunde gelegt werden. Der Fall, dass die Lösungen algebraisch sind, führt auf die specielle Classe der Abel'schen Functionen. Bedeuten $f_1(z)\dots f_m(z)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, so ist das neue Umkehrproblem durch folgende m Gleichungen gegeben:

$$\sum_1^m i\int_{\zeta_i}^{z_i} f_\alpha(z)\,dz = u_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots m),$$

wo $\zeta_1\dots\zeta_m$ Constanten sind, und es handelt sich darum, die Beschaffenheit der Lösungen $f(z)$ zu untersuchen, wenn durch die vorstehenden Gleichungen $z_1\dots z_m$ als analytische Functionen von $u_1\dots u_m$ definirt werden sollen. Diese Aufgabe wird für Differentialgleichungen zweiter Ordnung unter folgenden Einschränkungen durchgeführt: 1) Die Differentialgleichung soll nur wesentlich singuläre Punkte besitzen, 2) die Wurzeln der zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen sind rationale Zahlen, 3) die Darstellung der

Lösungen in der Umgebung der singulären Punkte darf kein Logarithmen enthalten, 4) die Functionen z_1, z_2 sollen die sin gulären Stellen für endliche Werthe der Argumente u_1, u_2 erreicher Das Resultat der durch die darin angewandte Methode höchs merkwürdigen Untersuchung ist in folgendem Satze enthalten:

Sind die Wurzeln r_1, r_2 jeder zu den verschiedenen singu lären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung so beschaffen, dass entweder

$$r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \; r_2 = -1 + \frac{2}{n} \quad (n \text{ positive ganze Zahl})$$

oder

$$r_1 = -\frac{1}{2}, \; r_2 = +\frac{1}{2}$$

und die Werthe der zu $z = \infty$ gehörigen Wurzeln $\varrho_1\, \varrho_2$ entwede

$$\varrho_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad \varrho_2 = 1 + \frac{2}{n} \quad \text{oder} \quad \varrho_1 = \frac{3}{2}, \quad \varrho_2 = \frac{5}{2},$$

so sind die durch die Gleichungen

$$\int_{\zeta_1}^{z_1} f_\alpha(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} f_\alpha(z)\,dz = u_\alpha \quad (\alpha = 1, 2)$$

definirten Functionen $z_1 = F_1(u_1, u_2)$, $z_2 = F_2(u_1, u_2)$ Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten eindeutig analytische Functionen von u_1, u_2 sind. Unter den angegebene Bedingungen kann die Zahl der endlichen singulären Punkte de zu Grunde gelegten Differentialgleichung 2ter Ordnung nicht grösse als 6 sein. Dass im Allgemeinen die hier characterisirten Diffe rentialgleichungen nicht algebraische Integrale besitzen, und dem gemäss die Functionen $F_1(u_1\, u_2)$, $F_2(u_1\, u_2)$ nicht etwa mit de Abel'schen Functionen identisch sind, wird an einem specielle Beispiel nachgewiesen. Es ist noch zu bemerken, dass die ein geführten Einschränkungen nicht sämmtlich für die Existenz de fraglichen Functionen nothwendig sind; die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen sind vielmehr in einer neuen Arbeit des Verfassers, die inzwischen erschienen ist, für Differential- gleichungen beliebiger Ordnung entwickelt.

Die folgende Note enthält die Tabelle derjenigen Differential- gleichungen 2ter Ordnung, welche den in der vorhergehenden

Arbeit gemachten Einschränkungen entsprechen, und die Integrale dieser Differentialgleichungen. Hr.

L. Fuchs. Auszug aus einem Schreiben an Herrn Borchardt. Borchardt J. XC. 71-73.

Für den Zweck der vorhergehenden Arbeit ist es von Wichtigkeit nachzuweisen, dass unter den daselbst angegebenen Bedingungen durch die Gleichung $f_1(z):f_2(z)=\zeta$ das Argument z als eindeutige Function von ζ definirt wird. Durch eine Mittheilung des Herrn Poincaré veranlasst, giebt der Verfasser eine nähere Erläuterung zu diesem Satze, die dahin geht, dass den im Allgemeinen unendlich vielen übereinanderliegenden Flächen T, welche auf der z-Ebene für die Darstellung der unendlich vieldeutigen Integrale $f_1(z)$, $f_2(z)$ ausgebreitet zu denken sind, in der ζ-Ebene eine dieselbe nur einfach bedeckende zusammenhängende Fläche S entspricht. Nun kann, wenn z unzählig viele Umläufe vollzieht, der Fall eintreten, dass $f_1(z)$ und $f_2(z)$ identisch, d. h. für jeden Werth von z unendlich werden, und der Quotient ζ einen von z unabhängigen Werth annimmt. Die Flächen T, innerhalb welcher dies stattfindet, werden in der ζ-Ebene durch Punkte abgebildet, die sich an der Begrenzung der Fläche S befinden. Der in Rede stehende Satz ist also in dem Sinne zu verstehen, dass z innerhalb der Fläche S eine überall eindeutige Function von ζ ist.

Hr.

F. Casorati. Sull' equazione fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali lineari. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII. 176-182.

Es handelt sich um zwei neue Ableitungen der Fuchs'schen Fundamentalgleichung (Borchardt J. LXVI. 132). Die Differentialgleichung sei

$$y^{(m)}+p_1y^{(m-1)}+\cdots+p_my=0.$$

Bedeutet θy die Function, in die y nach einem geschlossenen Umlaufe um x_1 übergeht, so genügt

$$\omega = \frac{c_1 \theta y_1 + \cdots + c_m \theta y_m}{c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m},$$

wo $y_1 \cdots y_m$ ein Fundamentalsystem darstellt, wie sich leicht er-giebt, einer Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, in der die eliminirt sind. Jeder Lösung ω derselben entspricht im Allge-meinen ein bestimmtes System der Verhältnisse der c. Diese Differentialgleichung kann auch durch constante Werthe von genügt werden, und indem man in ihr

$$\omega' = \omega'' = \cdots = \omega^{(m)} = 0$$

setzt, erhält man unmittelbar die gesuchte Fundamentalgleichung in der Form

$$\Sigma \pm (\theta y_1 - \omega y_1)(\theta y_2' - \omega y_2') \cdots (\theta y_m^{(m-1)} - \omega y_m^{(m-1)}) = 0.$$

Das Verschwinden dieser Determinante erfordert aber das Statt-finden der linearen Relation mit constanten Coefficienten:

$$h_1(\theta y_1 - \omega y_1) + \cdots + h_m(\theta y_m - \omega y_m) = 0;$$

also entspricht jeder Wurzel ω ein Integral

$$u = h_1 y_1 + \cdots + h_m y_m'$$

von der Eigenschaft, dass

$$\theta u = \omega u.$$

Die andere Ableitung der Fundamentalgleichung geht von der symbolischen Zerlegung der gegebenen Differentialgleichung in das Product

$$(D + \varphi_m)(D + \varphi_{m-1}) \ldots (D + \varphi_1) y = 0$$

aus; $\varphi_1 \ldots \varphi_m$ bedeuten Functionen von x. Hier gilt der Satz dass die fragliche Fundamentalgleichung gleich ist dem Product der Fundamentalgleichungen der einzelnen Factoren:

$$(D + \varphi_m) y = 0 \ldots (D + \varphi_1) y = 0.$$

Bezeichnet man mit $\beta_1 \ldots \beta_m$ die Coefficienten von $(x - x_1)^{-1}$ in den Entwickelungen von $\varphi_1 \ldots \varphi_m$, so lautet die Fundamental-gleichung:

$$(\omega - e^{-2\pi i \beta_1})(\omega - e^{-2\pi i \beta_2}) \ldots (\omega - e^{-2\pi i \beta_m}) = 0.$$

Da

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m = p_1$$

st, so ist

$$\beta_1 + \cdots + \beta_m = b_1,$$

wo b_1 der Coefficient von $(x-x_1)^{-1}$ in der Entwickelung von p_1 ist, und man hat den Satz, dass

$$\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n = e^{-2\pi i b}$$

st. Hr.

G. Mittag-Leffler. Sur la théorie des équations différentielles linéaires. C. R. XC. 218-221.

Eine lineare Differentialgleichung habe zum vollständigen Integrale eine im ganzen Gebiete der unabhängigen Variablen x eindeutige Function mit beliebigen Polen und dem einzigen wesentlich singulären Punkte (im Weierstrass'schen Sinne verstanden) $x = \frac{1}{0}$. Es handelt sich um die Form der n particulären Integrale in diesem Falle. Indem der Verfasser zunächst die Differentialgleichung zweiter Ordnung betrachtet, stellt er zwischen den Coefficienten der Reihenentwickelungen der Integrale in der Umgebung der Pole Bedingungen auf, die darauf hinauskommen, dass die Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen (nach der Fuchs'schen Bezeichnung) ganze Zahlen sind, und in der Entwickelung der Integrale keine Logarithmen vorkommen. Die etwaige negative Wurzel, die zum Pole a gehört, sei $-n$, und $\Pi(x)$ bedeute das Weierstrass'sche Product

$$\Pi(x) = \Pi\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{\frac{x}{a}+\cdots+\frac{1}{\nu}\left(\frac{x}{a}\right)^\nu}\right]^n;$$

dann sind

$$y_1 = \frac{z_1}{\Pi(x)}, \quad y_2 = \frac{z_2}{\Pi(x)},$$

wo z_1 und z_2 beständig convergirende nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihen bedeuten, die Integrale eines Fundamentalsystems der betrachteten Differentialgleichung. Dieses Resultat lässt sich, wie bemerkt wird, auf eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ausdehnen. Hi.

D. André. Intégration sous forme finie de trois e pèces d'équations différentielles linéaires, à coefficient variables. Liouville J. (3) VI. 27-49.

Denkt man sich das Integral y einer linearen homogen Differentialgleichung von der Ordnung ω nach ganzen positiv Potenzen der unabhängigen Variablen x entwickelt:

$$y = y_0 + y'_0 x + \cdots + y_0^{(n)} \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

dann ergiebt die Substitution in die Differentialgleichung zwische den y_0^n lineare Gleichungen. Es wird nun hier die Voraussetzun gemacht, dass dieselben sich auf die Form bringen lassen

(1) $K_0 F(n) y_0^{(n)} + K_1 F(n-1) y_0^{(n-1)} + \cdots + K_k F(n-k) y_0^{(n-k)} =$

gültig für alle Werthe von n, die grösser als eine gewisse Zal ν sind. $F(n)$ bedeutet eine beliebige Function von n, K und di ganze Zahl k sind von n unabhängig. Durch diese Annahm wird eine gewisse Classe von Differentialgleichungen abgegrenz die in eine unendliche Menge von Arten zerfällt, jede charal terisirt durch eine besondere Form der Function $F(n)$. Setzt ma $F(n) y_0^{(n)} = v_n$, so folgt aus (1), dass v_n das allgemeine Glied ein recurrenten Reihe ist, deren erzeugende Gleichung

$$K_0 x^k + K_1 x^{k-1} + \cdots + K_k = 0$$

ist, und man hat $y = \Sigma \frac{v_n x^n}{n!\, F(n)}$. Die verlangte Integration unt endlicher Form fällt also mit der Aufgabe dieser Summatic zusammen. Nun hat der Verfasser in früheren Abhandlunge (vgl. auch die in diesem Bande p. 175 besprochene Arbeit) vo folgenden Reihen die Summe angegeben,

$$\Sigma u_n x^n, \quad \Sigma \frac{u_n}{n!} x^n, \quad \Sigma \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+t-1)} x^n,$$

wo u_n das allgemeine Glied einer recurrenten Reihe im eigen lichen Sinne ist. Mit Rücksicht darauf, dass, wenn $f(n)$ ein ganz Polynom in Beziehung auf n und Exponentialgrössen der For a^n bedeutet, $f_n . v_n$ ebenso wie v_n das allgemeine Glied ein recurrenten Reihe im eigentlichen Sinne ist, wird leicht gezeig

ss für folgende drei Formen der Function $F(n)$

$$\frac{1}{n!f(n)},\quad \frac{(n+s)!}{n!f(n)},\quad \frac{(n+s)(n+s+1)\dots(n+s+t-1)}{n!f(n)}$$

e endliche Integration geleistet werden kann, und zwar sind e Integrale im ersten Falle rationale Functionen, im zweiten s rationalen Functionen und Exponentialgrössen der Form a^x, n letzten Falle aus rationalen Functionen und Logarithmen von er Form $\log(1-ax)$ zusammengesetzt.

Hr.

. Dillner. Sur une classe très étendue d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature d'un produit algébrique irrationnel. C. R. XCI. 616-619, 721-724.

. Dillner. Sur la classe des équations différentielles linéaires de divers ordres à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature d'un produit algébrique, qui ne contient d'autre irrationalité que la racine carrée d'un polynôme entier et rationnel. C. R. XCI. 687.

Die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefcienten

$$(1)\qquad y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\dots+p_ny$$

oll die Lösung

$$(2)\qquad y=Ae^{c\int\frac{dx}{B}}$$

aben, wo c eine Constante, A einen Ausdruck von der Form

$$(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_n)^{\alpha_n}$$

nit beliebigen α bedeutet, und B die n^{te} Wurzel einer rationalen Function ist. Substituirt man (2) in (1), so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$(3)\qquad \left(\frac{c}{B}\right)^n\varphi_0+\left(\frac{c}{B}\right)^{n-1}\varphi_1+\dots+\frac{c}{B}\varphi_{n-1}+\varphi_n=0,$$

wo die φ rationale Functionen von x sind. Ist keine niedrigere

Potenz von B als die n^{te} rational, dann zerfällt (3) in die Identitäten

$$\left(\frac{c}{B}\right)^n \varphi_0 + \varphi_n = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_{n-1} = 0,$$

welche $p_1 \dots p_n$ linear enthalten und daher zur Bestimmung dieser Coefficienten dienen können. Die Gleichung (1) hat alsdann die n particulären Integrale

$$y_r = Ae^{c_r \int \frac{dx}{B}} \qquad (r = 1, \dots n),$$

wo

$$c_r = ce^{\frac{2r\pi i}{n}}.$$

Ist schon die m^{te} Potenz von B, wo $m < n$ ist, rational, dann erhält man nur m Gleichungen zwischen den n Unbekannten p, die daher auf verschiedene Weisen bestimmt werden können, und man erhält in diesem Falle auch nur m particuläre Integrale obiger Form. Der Fall $m = 2$ bildet den Gegenstand der zweiten Note. Die Bedingung, dass die Integrale die allgemeinere Form

$$y_r = Ae^{\int \left(A_1\left(\frac{C_r}{B}\right)^{n-1} + \dots + A_{n-1}\frac{C_{r_1}}{B} + A_n\right)dx}$$

annehmen, wo $A_1 \dots A_n$ rationale Functionen sind, führt ganz in der nämlichen Weise zu einer Bestimmung der p. Die letzterwähnte Form ist, wie gezeigt wird, die allgemeinste, die in dieser Art möglich ist, wenn die Coefficienten p rational sein sollen.

Hr.

P. C. V. Hansen. Bemärkninger om algebraisk Integration af specielle lineäre Differentialligninger. Zeuthen Tidsskr. (4) IV. 148-154.

Eine algebraische Function (im weitesten Sinne) kann immer ein particuläres Integral einer gewissen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten sein. Soll umgekehrt eine solche ($P_0^{(n)}u + P_1^{(n-1)}u + \cdots + P_n u = 0$) ein algebraisches Integral besitzen, dann kann dieses für einen endlichen Werth von z ($z = a$

nicht unendlich werden, falls P_0 nicht gleichzeitig verschwindet; ferner kann $z = a$ auch kein Verzweigungspunkt sein. Ist also P_0 eine Constante, so kann ein algebraisches Integral nur ganz und rational sein. Enthalten aber alle Coefficienten mit Ausnahme von P_n Factoren $z - a$ in verschiedenen Potenzen, deren Exponenten alle grösser als n sind, dann giebt es kein algebraisches Integral. Die Beweise dieser Sätze ergeben sich mittels Betrachtung des Integrals in der Umgebung des Punktes $z = a$.

Gm.

Birger Hansted. Nogle Methoder til at integrere visse lineare Differentialligninger ved bestemte Integraler. Zeuthen Tidsskr. (4) IV. 121-135.

Darstellung der verschiedenen bekannten Methoden zur Integration linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale.

Gm.

P. Appell. Sur les équations différentielles linéaires à une variable indépendante. C. R. XC. 1477-1479.

P. Appell. Sur la transformation des équations différentielles linéaires. C. R. XCI. 211-214.

P. Appell. Sur les équations différentielles linéaires. C. R. XCI. 684-685.

Für die Integrale linearer Differentialgleichungen von der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

gilt folgendes Theorem, welches dem Satze von den symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung analog ist: Jede rationale ganze Function der ein Fundamentalsystem bildenden Integrale $y_1 \dots y_n$ und deren Derivirten, welche durch die Substitution eines andern Fundamentalsystems für $y_1 \dots y_n$ in sich selbst, multiplicirt mit einer Constanten, übergeht, ist gleich einer ganzen rationalen Function der Coefficienten der Diffe-

rentialgleichung und ihrer Derivirten, multiplicirt mit einer Potenz von $e^{-\int a_1 dx}$.

Es ergiebt sich hieraus unmittelbar die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen $y_1 \dots y_n$ eine ganze rationale Relation besteht. Durch wiederholte Differentiirung derselben nach x lassen sich nämlich die Constanten in ihr eliminiren, und das Resultat D der Elimination lässt sich nach dem erwähnten Satze als ganze Function der Coefficienten der Differentialgleichung und ihrer Derivirten ausdrücken; diese gleich Null gesetzt, enthält die gesuchte Bedingung. Ebenso lässt sich nach diesem Satze leicht die lineare Differentialgleichung herstellen, welcher eine ganze Function von $y_1 \dots y_n$ und ihren Derivirten, die zu ihren Coefficienten gegebene Functionen von x hat, als Integral genügt. Hiervon werden einfache Beispiele an der Differentialgleichung zweiter Ordnung ausgeführt. Die Anwendung des Satzes führt zu Ausdrücken, welche Herr Laguerre (C. R. LXXXVIII. 116, 224; s. F. d. M. XI. 1879, p. 235) mit „Invarianten oder Semi-Invarianten der linearen Differentialgleichung" bezeichnet hat.

Hr.

P. Appell. Sur une classe d'équations différentielles linéaires. C. R. XCI. 972-974.

Es sei

$$(1) \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + \varphi_1(xy)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + \varphi_n(xy) z = 0$$

eine lineare Differentialgleichung in z, in der $\varphi_1 \dots \varphi_n$ rationale Functionen von x und y sind, während y durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ von der Ordnung m und dem Geschlechte p als algebraische Function von x definirt ist. Die Punkte (x, y), für welche die φ unendlich werden (die singulären Punkte der Differentialgleichung (1)), sowie der unendlich entfernte Punkt, seien verschieden von den Verzweigungsstellen der algebraischen Function y. Setzt man ferner voraus, dass die Integrale der Gleichung (1) in der Umgebung der singulären Punkte und im Unendlichen

eindeutig und nur von einer endlichen Ordnung unendlich werden, so kann man beweisen, dass es ein Integral $\psi(xy)$ giebt, welches, nach Beschreibung jedes der $2p$ einfachen von einander unabhängigen Cyclen, in sich selbst, multiplicirt mit constanten Factoren, übergeht. Da nun die Function,

$$T(xy) = \frac{\theta[u^{(i)}(xy)-g_i]}{\theta[u^{(i)}(xy)]}\cdot e^{\lambda_1 u^{(1)}(xy)+\dots+\lambda_p u^{(p)}(xy)},$$

wo $u^i(xy)$, $(i=1,\dots p)$, die p Abel'schen Normalintegrale erster Gattung bezeichnen und λ_i, g_i Constanten sind, ebenfalls bei den Umläufen um die erwähnten Cyclen jedesmal in sich selbst, multiplicirt mit Constanten, übergeht, so lassen sich leicht g_i und λ_i so bestimmen, dass $\psi(xy)T(xy)$ bei jenen Umgängen ungeändert bleibt, mithin gemäss den obigen Voraussetzungen eine rationale Function von x und y ist. Man erhält also $\psi(xy)$ mit Hülfe von Abel'schen Transcendenten ausgedrückt. Hr.

B. Hansted. Quelques transformations de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants, par substitution d'une nouvelle variable. Teixeira J. II. 183-187.

Herr Hansted schreibt die Gleichung, die n^{ter} Ordnung ist, in symbolischer Form und reducirt, wenn sie p gleiche Factoren hat, ihre Integration auf die einer Gleichung von der Ordnung $n-p$. Tx. (O.)

F. Brioschi. Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Brioschi Ann. (2) X. 4-9.

F. Brioschi. Sur une classe d'équations différentielles linéaires. C. R. XCI. 317-319.

In der ersten Note wird zunächst die lineare Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher die binäre Form n^{ter} Ordnung $f(y_1y_2)$ zweier particulärer Integrale einer linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung genügt, in eleganter Weise abgeleitet. Der Fall $n=2$ führt auf die bekannte Differentialgleichung 3ter Ordnung für y_1y_2 (Vgl. die in diesem Jahrb. Bd. X. p. 233

besprochene Arbeit des Verfassers. Brioschi Ann. (2) IX.) Der Verfasser betrachtet alsdann folgende Classe von Differentialgleichungen, welche auch der Gegenstand der zweiten Note ist:

$$y'' + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\varrho}{x-e}\right) y' + \frac{\alpha x+\beta}{\varphi} y = 0,$$

wo $\varphi = 4x^3 - g_2 x - g_3$, e eine Wurzel von $\varphi = 0$ sind. Macht man die Voraussetzung $y_1 y_2 =$ const., so führt die erwähnte Differentialgleichung 3ter Ordnung auf die Bedingungen $\varrho = -1$ und

$$\alpha x + \beta = \alpha(x-e);$$

die Gleichungen

$$y_1 y_2 = A, \quad y_2 y_1' - y_1 y_2' = \frac{\sqrt{x-e}}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

wo φ ebenfalls sich noch näher bestimmt, geben dann unmittelbar die Integrale in Form von algebraischen Functionen. Der Differentialgleichung für $y_1 y_2$ kann aber auch genügt werden durch ein Polynom n^{ten} Grades

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Die Substitution liefert die Bedingungen

$$\alpha = -n(n+\varrho+1), \quad \beta = -n\varrho e + (2n+\varrho-1)a_1,$$

und die Coefficienten von $F(x)$ bestimmen sich als Functionen von g_2, g_3, ϱ und e. Die Integrale y_1, y_2 werden für ungrade ϱ algebraisch, für grade ϱ elliptisch. In der betrachteten Classe sind ausser der Lamé'schen Gleichung ($\varrho = 0$) noch die von den Herren Hermite und Gyldén (Borchardt J. IXC. p. 18, und C. R. XCI., s. die folgenden Referate) untersuchten enthalten.

Hr.

F. Brioschi. Sur quelques équations différentielles linéaires. C. R. XCI. 807-809.

Aufstellung einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter, von der Eigenschaft, dass ein particuläres Integral derselben gleich ist dem Product zweier particulärer Integrale zweier Lamé'scher Gleichungen, in denen resp. $n = 0$, $n = 1$ ist.

Hr.

F. Brioschi. Sopra una classe di equazioni differenziali integrabili per funzioni ellittiche. Acc. R. d. L. (3) IV. 241-246.

F. Brioschi. Sulla generazione di una classe di equazioni lineari integrabili per funzioni ellittiche. Brioschi Ann. (2) X. 74-79.

Die linearen Differentialgleichungen höherer als zweiter Ordnung, die sich durch elliptische Functionen integriren lassen, sind in letzter Zeit der Gegenstand interessanter Untersuchungen der Herren Picard, Hermite und Mittag-Leffler gewesen. Herr Brioschi giebt zur Erzeugung dieser Differentialgleichung eine auf wesentlich anderen Principien beruhende Methode. Setzt man $\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$, $e_1\, e_2\, e_3$ gleich den Wurzeln von $\varphi(x) = 0$,

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\varphi(x)} - \sqrt{\varphi(\xi)}}{x-\xi},$$

und bezeichnet mit $A_1 \dots A_r$ die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} A_1 &= \mu + \psi(n) \\ A_2 &= A_1^2 + A_1' \sqrt{\varphi} \\ A_3 &= A_1 A_2 + A_2' \sqrt{\varphi} \\ &\vdots \\ A_r &= A_1 A_{r-1} + A_{r-1}' \sqrt{\varphi} \end{aligned}$$

$\left(A_k' = \frac{dA_k}{dn}\right.$ und μ, ξ unbestimmte Constanten$\left.\right)$, so leitet der Verfasser zwei verschiedene Reihen linearer Beziehungen zwischen den A ab, deren Coefficienten Functionen von x sind. Mit diesen hängen durch elliptische Functionen ausdrückbare Grössen y in der Weise zusammen, dass, wenn

$$x - e_1 = (e_3 - e_1)\, sn^2 u$$

gesetzt wird,

$$\frac{d^r y}{du^r} = \frac{A_r y}{(e_3 - e_1)^{\frac{r}{2}}}$$

ist. Die linearen Relationen zwischen den A führen also zu ebenso vielen linearen Differentialgleichungen höherer als 2ter Ordnung, die durch elliptische Functionen integrirbar sind. Hr.

F. Brioschi. Di una proprietà delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Brioschi Ann. (2) X. 1-3.

Ist das Product zweier particulärer Integrale $y_1 y_2 = z$ einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung bekannt, so kann man die Werthe der Coefficienten derjenigen linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung, welche zu particulären Lösungen die Ausdrücke

$$Y_1 = y_1 u_1, \quad Y_2 = y_2 u_2$$

hat, wo $u_1 u_2$ gegebene Functionen von x sind, als Functionen der Coefficienten der ersten Differentialgleichung von z und deren Derivirten bis zur 2ten Ordnung bestimmen. Dieser Satz bildet die Verallgemeinerung eines von Herrn Hermite in seinen Untersuchungen: „Sur quelques applications des fonctions elliptiques" (C. R. Dec. 1879) bewiesenen Theorems, welches erhalten wird, wenn man $u_1 = e^{cx}$, $u_2 = e^{-cx}$ setzt. Hr.

Ch. Hermite. Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé. Borchardt J. IXC. 9-19.

Für die Lamé'sche Differentialgleichung

$$(1) \quad D_\xi^2 y = [n(n+1)k^2 sn^2 \xi + h] y$$

hat Herr Hermite die Lösung

$$y = CF(\xi) + C'F(-\xi)$$

gegeben, wo $F(\xi)$ eine eindeutige doppeltperiodische Function der zweiten Art mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ bedeutet. Es handelt sich in der vorliegenden Arbeit um die Bestimmung von $F(\xi)$ für den Fall, dass der Modul $k = 1$ ist.

Seien $\alpha_1 \dots \alpha_n$ die Wurzeln von $F(\xi) = 0$ und $\beta_1 \dots \beta_m$ die der Gleichung $\frac{1}{F(\xi)} = 0$ innerhalb des Periodenrechtecks, so muss $m = n$ sein. Ferner lässt sich $F(\xi)$ in der Productform darstellen:

$$(2) \quad F(\xi) = \frac{H(\xi-\alpha_1)H(\xi-\alpha_2)\dots H(\xi-\alpha_n)}{H(\xi-\beta_1)H(\xi-\beta_2)\dots H(\xi-\beta_n)} \; e^{\lambda\xi+\lambda_0},$$

wo λ und λ_0 Constanten sind, und man hat

$$F(\xi+2K) = \mu F(\xi), \quad F(\xi+2iK') = \mu' F(\xi),$$

wo
$$\mu = e^{2\lambda K}, \quad \mu' = e^{-\frac{i\pi}{K}(\Sigma\beta - \Sigma\alpha) + 2\lambda i K'}.$$
Der unmittelbaren Einführung von $k = 1$ in (2) steht die Schwierigkeit entgegen, dass, da in diesem Falle $q = 1$ ist, die Reihen, welche die Functionen θ, H etc. darstellen, divergent sind. Bedient man sich aber der Weierstrass'schen Functionen, so haben diese für $k = 1$ bestimmte Grenzwerthe, nämlich
$$Al(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos ix, \quad Al(x)_1 = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\sin ix}{i},$$
$$Al(x)_2 = Al(x)_3 = e^{\frac{x^2}{2}}.$$
Da ferner $\frac{J}{K} = 1$ wird, und $Al(x) = \frac{e^{-\frac{Jx^2}{2K}} \theta(x)}{\theta(0)}$ etc., so folgt für $k = 1$:
$$\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)} = \cos ix, \quad \frac{H(x)}{H'(0)} = \frac{\sin ix}{i},$$
$$\frac{H_1(x)}{H_1(0)} = \frac{\Theta_1(x)}{\Theta_1(0)} = 1, \quad \operatorname{sn}(\xi) = \frac{\operatorname{tg} i\xi}{i},$$
und der Ausdruck für $F(\xi)$ geht, wenn man noch
$$\operatorname{sn}\xi = x, \ \operatorname{sn}\alpha = a, \ \operatorname{sn}\beta = b$$
setzt, für $k = 1$ über in
$$F(\xi) = C \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\lambda}{2}},$$
wo C eine Constante ist. Das Integral der Differentialgleichung (1), $F(\xi)$, hat zum einzigen Pol den n-fachen Punkt $\xi = iK'$, folglich werden die $b = \infty$, und man erhält
$$F(\xi) = C . \Pi(x) \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\lambda}{2}},$$
wo $\Pi(x)$ ein ganzes Polynom n^{ten} Grades bedeutet, und es erübrigt noch die Bestimmung von λ und Π. Diese führt der Verfasser für eine allgemeinere Gleichung aus, welche die Lamé'sche und ausserdem noch eine von Herrn Picard behandelte Gleichung (C. R. Juli 1879) für $k = 1$ als besondere Fälle enthält. Für die Lamé'sche wird $\lambda = \sqrt{n(n+1)+h}$ und
$$\Pi(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\lambda} D_x^n[(x-1)^{n-\lambda}(x+1)^{n+\lambda}]$$

erhalten, und die vollständige Lösung von (1) für $k=1$ ist also

$$y = C\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \Pi(x) + C'\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \Pi(-x), \quad x = \operatorname{sn}\xi.$$

Schliesslich wird noch erörtert, in welchen Fällen die beiden particulären Lösungen eine constante Beziehung zu einander haben, obige Formel also nicht das allgemeine Integral giebt. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn λ ganz und nicht grösser als n ist. In einem Nachtrage wird auch für diese singulären Fälle die vollständige Lösung der erwähnten allgemeineren Gleichung gegeben. Hr.

E. Picard. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. C. R. XC. 293-296.

Diese Note bezieht sich auf einen vom Verfasser in den C. R. IXC. 140-144 (siehe F. d. M. XI. 1879. p. 241) mitgetheilten Satz, betreffend die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit doppeltperiodischen Coefficienten. Derselbe wird hier in einer präciseren und alle möglichen Fälle umfassenden Form aufgestellt. In der Voraussetzung, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung eindeutig und in den singulären Punkten nur von einer endlichen Ordnung unendlich ist, wird bewiesen, dass es stets ein particuläres Integral $\psi(x)$ giebt, welches eine doppeltperiodische Function der zweiten Art (nach der Hermite'schen Bezeichnung) ist. Wofern alsdann nicht

$$\frac{1}{\psi^2(x)} e^{-\int p\,dx} \quad (p \text{ der Coefficient von } y')$$

eine doppeltperiodische Function erster Art (d. h. im gewöhnlichen Sinne) ist, giebt es stets noch ein zweites particuläres Integral, das eine doppeltperiodische Function zweiter Art ist. Im erwähnten Ausnahmefalle erhält man als zweites particuläres Integral

$$\psi(x)\,\{x+\varphi(x)\},$$

wo $\varphi(x)$ eine doppeltperiodische Function erster Art ist.

Hr.

E. Picard. Sur une classe d'équations différentielles linéaires. C. R. XC. 128-131.

G. Mittag-Leffler. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. C. R. XC. 299-300.

Herr Picard dehnt das Resultat, welches er für die linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung mit doppelt-periodischen Coefficienten erhalten hat (C. R. IXC. 140-144, siehe F. d. M. XI. 1879. p. 241) auf lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit doppelt-periodischen Coefficienten aus. Zunächst wird bewiesen, dass eine eindeutige Function $f(x)$, welche die Relationen erfüllt:

$$f(x+2mK) = A_1 f(x) + A_2 f(x+2K) + \cdots + A_m f(x+2(m-1)K),$$
$$f(x+2miK') = B_1 f(x) + B_2 f(x+2iK') + \cdots + B_m f(x+2(m-1)iK')$$

(A und B Constante, m eine positive ganze Zahl)

als eine Summe von m^2 doppelt-periodischen Functionen der zweiten Art (nach der Hermite'schen Bezeichnung) dargestellt werden kann. Hat nun eine lineare Differentialgleichung $m$ter Ordnung mit doppelt-periodischen Coefficienten ein eindeutiges Integral, so genügt es offenbar den obigen Relationen. Folglich wird $f(x)$ die Summe von m^2 doppelt-periodischen Functionen der zweiten Art sein. Von diesen verschwinden jedoch m^2-m Functionen identisch. Mithin wird $f(x)$ die Summe von m doppelt-periodischen Functionen der zweiten Art. Als Anwendung hiervon wird die Gleichung dritter Ordnung

$$y''' + (h - 6k^2 \operatorname{sn}^2 x)\, y' + h_1\, y = 0,$$

wo k der Modul von $\operatorname{sn} x$ und h, h_1 Constante sind, betrachtet, und es wird gezeigt, dass ihre drei Integrale die Form

$$y = \frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}\, e^{\left(\lambda - \frac{\Theta'\omega}{\Theta\omega}\right)x}$$

haben, worin λ und ω passend gewählte Constante sind.

Herr Mittag-Leffler vervollständigt den Beweis des Picard'schen Satzes. Hr.

G. Mittag-Leffler. Sur les équations différentiell[e]s linéaires du second ordre. C. R. XCI. 978-980.

Sind U und V zwei linear unabhängige Integrale der Diff[e]rentialgleichung

$$(1)\qquad z''+Pz'+Q=0,$$

ebenso u und v Integrale von

$$y''+py'+q=0,$$

und nimmt man an, dass

$$(2)\qquad \frac{V'}{V}=\varphi\left(x,\frac{v'}{v}\right),\quad \frac{U'}{U}=\varphi\left(x,\frac{u'}{u}\right),$$

wo $\varphi(x,\xi)$ eine rationale Function von ξ bedeutet, deren Coe[f]ficienten eindeutige Functionen von x sind, dann sind P und [Q] rationale Functionen von $\frac{v'}{v}+\frac{u'}{u}$ und $\frac{v'}{v}\cdot\frac{u'}{u}$, deren Coeff[i]cienten eindeutige Functionen von x sind. Sind in $\varphi(x,\xi)$ di[e] Coefficienten doppelt-periodische Functionen von x, desgleich[en] p und q, dann sind auch P und Q doppelt-periodische Fun[c]tionen, und aus den Formeln (2) erhält man ein System vo[n] Integralen der Gleichung (1), die im Allgemeinen nicht eindeut[ig] sind. Setzt man $\varphi(x,\xi)=\omega\xi$, so erhält man das Resulta[t], welches Herr Hermite in einem Briefe an Herrn Brioschi i[n] Brioschi's Ann. veröffentlicht hat. Hr.

Escary. Sur quelques remarques relatives à l'équation de Lamé. C. R. XCI. 40-43, 102-105.

Lamé hatte bei der Aufstellung der nach ihm benannten Gleichung, die in der letzten Zeit der Gegenstand vielfacher Untersuchungen gewesen ist, die Verallgemeinerung der Fourier'schen Reihe im Auge, indem er die Sinus und Cosinus der Vielfachen der Variabeln durch ganze Polynome mit wachsenden Graden ersetzte, nach denen eine willkürliche Function entwickelt werden sollte. Die verschiedenen Darstellungen dieser Polynom[e] bilden den Inhalt vorliegender Arbeit. Bedeuten $A_i\,B_i\,C_i$ ($i=0,1,2$) neun Variable, zwischen welchen die sechs Relationen bestehen

$$A_0^2+B_0^2 = A_1^2-B_1^2 = A_2^2-B_2^2 = k^2,$$
$$A_0^2+C_0^2 = A_1^2+C_1^2 = A_2^2-C_2^2 = 1,$$

so können die drei Differentialgleichungen von Lamé (Leçons sur les fonctions inverses p. 47) unter der Form vereinigt werden

$$B_i^2 C_i^2 y'' + \frac{1}{2}(B_i^2 C_i^2)' y' + (n(n+1)B_i^2 - l^2)y = 0 \quad (i=0,1,2),$$

worin A_i die unabhängige Variable ist. Das allgemeine Integral ist

$$y = G\varphi_i^{(n)} + H\varphi_i^{(n)}\int\frac{dA_i}{(\varphi_i^{(n)})^2 B_i C_i},$$

in welcher Form es Herr Liouville zuerst erhalten hat, ohne jedoch die Werthe des Polynoms n^{ten} Grades $\varphi_i^{(n)}$ für $i=0, 1, 2$ anzugeben. Herr Escary stellt jeden dieser Werthe in drei verschiedenen Ausdrücken dar, nämlich vermittelst der A_i, B_i oder C_i. Indem er ferner aus den obigen drei Differentialgleichungen noch sechs andere dadurch herleitet, dass er statt A_i der Reihe nach B_i und C_i zur unabhängigen Variablen nimmt, ergeben sich noch sechs neue Polynome, deren jedes in der angegebenen Weise in drei verschiedenen Ausdrücken dargestellt wird. Die Ausdrücke lassen unmittelbar die Natur der Wurzeln dieser Polynome (gleich Null gesetzt) und, was für die Darstellung einer willkürlichen Function nach diesen Polynomen besonders wichtig ist, die Grenzen erkennen, zwischen welchen alle Wurzeln eingeschlossen sind.

Hr.

G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. C. R. XCI. 880-882.

In einer früheren Note hat der Verfasser gezeigt, dass für die linearen Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten ein Fundamentalsystem von Integralen existire, welches in Gruppen von folgender Form zerfällt

(1) $F_i(x) = e^{rx}\{\varphi_{i1}(x) + x\varphi_{i2}(x) + \cdots + x^{i-1}\varphi_{ii}(x)\} \quad i = 1, 2\ldots\lambda,$

wo die φ die Periode ω besitzen. Diese Gruppe von λ Integralen lässt sich durch folgende einfachere ersetzen

$$\frac{d^{\lambda-1}F_\lambda}{dx^{\lambda-1}},\ \frac{d^{\lambda-2}F_\lambda}{dx^{\lambda-2}},\ \dots\ \frac{dF_\lambda}{dx},\ F_\lambda,$$

wo bei der Differentiation sowohl e^{rx} als $\varphi_{ik}(x)$ als Constante zu betrachten sind. Hat die Differentialgleichung doppelt-periodische Coefficienten mit den Perioden ω und ω', dann haben die φ in den Gruppen (1) noch die Eigenschaft, dass

$$\varphi_{m,m}(x+\omega') = k\varphi_{m,m}(x),$$

$$\varphi_{m,n}(x+\omega') = k\varphi_{m,n}(x)+\sum_{i=n+1}^{i=m} c_{m,i}\varphi_{m,i}(x),$$

wo k und die c Constante bedeuten. Hr.

H. Gyldén. Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. C. R. XC. 208-209.

H. Gyldén. Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre. C. R. XC. 344-345.

Die Gleichung

$$(1)\qquad y''+k^2\frac{\operatorname{sn}x\,.\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}y'+\mu^2\operatorname{dn}^2 x\,y = 0,$$

welche einen speciellen Fall der von Herrn Hermite verallgemeinerten Lamé'schen Gleichung (Borchardt J. IXC. p. 13, siehe p. 254) bildet, hat zum allgemeinen Integral

$$y = a\cos\mu\operatorname{am}x+b\sin\mu\operatorname{am}x,$$

oder durch eine passende Wahl der Constanten

$$y = \alpha e^{i\mu\operatorname{am}x}+\beta e^{-i\mu\operatorname{am}x}.$$

Aus (1) werden durch Aenderung von x in $x+iK'$ und ferner μ in μi zwei ähnliche Differentialgleichungen hergestellt, deren Integrale unter verschiedenen Formen angegeben werden.

Hr.

J. Farkas. Sur l'application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires. C. R. XC. 1542-1545.

Yvon Villarceau. Sur l'intégration des équations linéaires, au moyen des sinus des ordres supérieurs. C. R. XCI. 13-14.

Es wird die Theorie der Sinus höherer Ordnungen, über die man das Referat F. d. M. X. 1878. p. 301 vergleiche, angewendet auf die Lösung linearer Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{d^{mn}y}{dx^{mn}}+a_1\frac{d^{m(n-1)}y}{dx^{m(n-1)}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d^my}{dx^m}+a_ny=X,$$

wo $a_1, a_2, \dots a_n$ Constante und X eine explicite Function von x bedeuten. In der ersten Note behandelt Herr Farkas den speciellen Fall $n=2$. Die Lösungen erscheinen in der Form:

$$z=\frac{1}{\alpha^{m-1}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1}\varphi_\lambda(\alpha x)\int X\varphi_{m-1-\lambda}(-\alpha x)\,dx,$$

$$y=\frac{1}{\beta^{m-1}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1}\varphi_\lambda(\beta x)\int z\,\varphi_{m-1-\lambda}(-\beta x)\,dx,$$

wo

$$\alpha=r_1,\ \beta=r_2\quad\text{oder}\quad\alpha=r_2,\ \beta=r_1$$

und

$$\pm r_1^m=\frac{1}{2}(a_1+\sqrt{a_1^2-4a_2}),\quad \pm r_2^m=\frac{1}{2}(a_1-\sqrt{a_1^2-4a_2}).$$

Herr Yvon Villarceau theilt in der zweiten Note ohne Beweis das Resultat der Lösung der oben angegebenen allgemeinen Differentialgleichung mit. M.

G. Humbert. Sur l'équation hypergéométrique. Bull. S. M. F. VIII. 112-120.

Die betrachtete Differentialgleichung ist

$$(1)\qquad (x^2-1)y''+[(\lambda+\mu+2)x+\lambda-\mu]y'+Fy=0.$$

Damit dieselbe durch ein ganzes Polynom vom Grade n befriedigt werde, ist nothwendig und hinreichend, dass n eine Wurzel der „charakteristischen" Gleichung

$$r(r-1)+(\lambda+\mu+2)r+F=0$$

sei, während die andere Wurzel nicht gleichzeitig ganz und kleiner als $n=1$ ist Für das Polynom hat Jacobi einen Ausdruck ge-

geben, welchen der Verfasser in folgende für die Anwendung vortheilhaftere Form setzt:

$$P_n = \frac{\Delta}{K} D_n K \Delta^{n-1},$$

wo K durch die Relation $K' : K = G : \Delta$ definirt ist, und Δ, G die Coefficienten resp. von y'' und y' in (1) bedeuten. Durch die Einführung der Substitution $y = u\varphi(x)$, worin $\varphi(x)$ so bestimmt wird, dass die Gleichung in u wiederum die Form (1) annimmt, gelangt man zu anderen Ausdrücken der Lösungen von (1). Die Formen von φ, die diesem Zwecke entsprechen, sind

$$(x-1)^{-\lambda}.(x+1)^{-\mu},\ (x-1)^{-\lambda},\ (x+1)^{-\mu},$$

und man erhält auf diese Weise Lösungen von (1) in den Fällen, dass eine Wurzel r der charakteristischen Gleichung eine negative ganze Zahl, oder dass $r+\lambda$ eine ganze Zahl, oder endlich $r+\mu$ eine ganze Zahl ist. Differentiirt man p Mal die Gleichung (1), so erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren charakteristische Gleichung die Wurzeln $r-p$ und $r'-p$ hat, wenn r und r' die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (1) sind. Durch Anwendung obiger Substitutionen auf die abgeleiteten Gleichungen ergeben sich Ausdrücke für die p^{ten} Ableitungen einer Lösung von (1), wobei ein negatives p ein Integral ausdrückt. Den Beschluss bilden Anwendungen auf die Legendre'schen Polynome und auf die Ausdrücke

$$\sin(n \operatorname{arc} \cos x), \quad \cos(n \operatorname{arc} \cos x),$$

welche bekanntlich Lösungen von Differentialgleichungen der Form (1) sind. Hr.

A. Cayley. On the Schwarzian derivative and the polyhedral functions. Trans. of Cambr. XIII. 5-68, Proc. of Cambr. III. 349-351.

Der Quotient s zweier Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

wird durch eine Differentialgleichung 3ter Ordnung

$$\frac{\frac{d^3 s}{dx^3}}{\frac{ds}{dx}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2 s}{dx^2}}{\frac{ds}{dx}}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(p^2 + 2\frac{dp}{dx} - 4q\right)$$

bestimmt. Herr Cayley nennt die linke Seite dieser Gleichung Schwarz's Differential, Schwarzian derivative, und bezeichnet es mit $\{s, x\}$. Bezeichnet man eine quadratische Function

$$(a, b, c, \tfrac{1}{2}(a-b-c), \tfrac{1}{2}(-a+b-c), \tfrac{1}{2}(-a-b+c))(x, y, z)^2$$

mit

$$(a, b, c \therefore)(x, y, z)^2,$$

so erscheint, wenn die Gleichung 2ter Ordnung die der hypergeometrischen Reihe, verallgemeinert durch eine homographische Transformation in Bezug auf die Variable x, ist, die resultirende Differentialgleichung 3ter Ordnung in der Form

$$(s, x) = (a, b, c \therefore)\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{x-b}, \frac{1}{x-c}\right)^2.$$

In Verbindung mit den algebraisch integrablen Fällen dieser Gleichung entspringen daraus gewisse rationale und ganze Functionen von s, die aus dem Polygon, der Doppelpyramide und den fünf regulären Körpern abgeleitet sind, und die Polyederfunctionen genannt werden. Das Schwarz'sche Differential wurde zuerst in zwei Abhandlungen von Schwarz aus den Jahren 1869 und 1873 behandelt; die zweite Abhandlung enthält die fundamentale Theorie dieses Gegenstandes, die dann in mehreren wesentlichen Punkten von Klein und Brioschi vervollständigt ist. Herr Cayley entwickelt im Vorliegenden die ganze Theorie und giebt mehrere neue Entwickelungen für die Polyederfunctionen.

Glr. (M.)

E. Picard. Sur certaines équations différentielles linéaires du second ordre. C. R. XC. 1479-1482.

Für das bekanntlich von Herrn Fuchs zuerst gelöste Problem die Bedingungen zu ermitteln, unter denen eine lineare Differen-

tialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten durch aus algebraische Integrale habe, hat Herr Klein in den Er Ber. 1876 (s. F. d. M. VIII. p. 189) eine ihm eigenthümlich Methode angegeben. Die derselben zu Grunde liegenden Be trachtungen benutzt der Verfasser zur Untersuchung von linearen Differentialgleichungen mit doppelt-periodischen Coefficienten

$$y''+p_1 y'+p_2 = 0,$$

welche die Bedingung erfüllen sollen, dass jedes Integral y ein Gleichung von der Form

$$y^m+A_1 y^{m-1}+\cdots+A_m = 0$$

genügt, wo die A eindeutige Functionen von x sind. Es i hierfür zunächst nothwendig und hinreichend, dass 1) $e^{\int p_1}$ 2) der Quotient η zweier linear unabhängiger particulärer Lösun gen einer algebraischen Gleichung mit eindeutigen Coefficient genügen. Die Anwendung der Methode des Herrn Klein zu Untersuchung der Form der Gleichung für η ergiebt, dass diese Gleichungen sich auf fünf reduciren, die alle einen willkürlichen Parameter R enthalten, für welchen eine passende eindeutige Function von x zu nehmen ist. Es handelt sich nunmehr darum, die Natur dieser eindeutigen Function in dem Falle, dass p_1 und p_2 doppelt-periodisch sind, festzustellen. Der Verfasser zieht nur die beiden ersten Klein'schen Formen

$$\eta^n = R(x) \quad \text{und} \quad \eta^{2n}+\eta^n(2-4R(x))+1 = 0$$

in Betracht, und bei der letzteren nur den Fall $n = 1$. Hierbei ergiebt sich, dass die Function $R(x)$ mit Hülfe der elliptischen Transcendenten ausgedrückt werden kann, und dies findet, wie der Verfasser bemerkt, in allen Fällen statt. Hr.

R. Hoppe. Ueber die zweite Speciallösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Grunert Arch. LXIV 379-386.

In der vorliegenden Arbeit wird die allgemeine Bedingung untersucht, unter welcher die zweite Speciallösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung aus der ersten durch Differen-

tiation gewonnen werden kann. Die Differentialgleichung sei

$$(1) \qquad y'' + (p+iq)y' + re^{iu}y = 0,$$

wo p, q, r, u reelle Functionen von x sind, und wird die Frage gestellt, unter welchen Bedingungen $z = \varrho y'$ die conjugirte Gleichung

$$z'' + (p-iq)z' + re^{-iu}z = 0$$

erfüllt, wenn y eine Lösung der Gleichung (1) ist. Der conjugirte Werth $\varrho_1 y_1'$ von $\varrho y'$ ist dann die gesuchte zweite Lösung von (1). Die Rechnung ergiebt eine Relation zwischen p, r, u und ihren Ableitungen bis zur 2ten Ordnung; nach Erfüllung derselben bestimmt sich der Werth von q eindeutig, so dass zwei der Functionen p, r, u willkürlich bleiben. Die fragliche Differentialgleichung wird dann wirklich dargestellt, indem zwischen p und r die Beziehung

$$p = \sqrt{nr} - \frac{r'}{2r} \quad (n \text{ willkürliche Function})$$

angenommen wird, durch welche die vorerwähnte Relation integrabel wird; es geht dann hervor

$$r = \frac{1}{4}\frac{u'^2}{2\cos u + c - n}, \quad q = -\frac{n'}{u'}\sqrt{\frac{r}{n}} - \frac{u'}{2},$$

wodurch alle Coefficienten durch zwei willkürliche Functionen n und u dargestellt sind. Für ϱ ergiebt sich

$$\varrho = \frac{A}{\sqrt{r}}e^{-iu - \frac{i}{2}\int \frac{du}{\sqrt{n(2\cos u + c - n)}}} \quad (A \text{ willkürliche Constante})$$

und damit, wie erwähnt, $\varrho_1 y_1'$ als die zweite Lösung von (1). Zwei Fälle erheischen eine Modification: 1) wenn r und u, also der Coefficient von y, constant sind; die Differentialgleichung wird dann

$$y'' + iqy' + ry = 0$$

mit einer willkürlichen Function, und

$$\varrho = Ae^{i\int q\,dx};$$

2) wenn q einen vorgeschriebenen Werth, z. B. den Werth 0 hat. Nimmt man in diesem Falle noch u constant an, so wird

auch n constant, und die Differentialgleichung lautet dann

$$y'' + \left(\sqrt{nr} - \frac{r'}{2r}\right)y' + r e^{i\alpha} y = 0$$

mit der einen willkürlichen Function r. Hier wird

$$\varrho = \frac{A}{\sqrt{r}}.$$

Die vorstehende Differentialgleichung umfasst den Fall der reellen Form

$$y'' + \left(\sqrt{nr} - \frac{r'}{2r}\right)y' + ry = 0,$$

und da hier $\varrho_1 y'_1 = \varrho y'$, so ist die zweite Lösung unmittelbar

$$\frac{A}{\sqrt{r}} y'.$$

Zum Schluss werden noch einige Specialfälle discutirt.

Hr.

Laguerre. Remarques sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Bull. S. M. F. VIII. 35-36.

Bezeichnen P, Q, R gegebene, z und u willkürliche Functionen von x, und setzt man

$$Pz'' + Qz' + Rz = Z, \quad Pu'' + Qu' + Ru = U, \qquad S = e^{\int \frac{Q}{P} dx},$$

dann gilt die Identität

$$\int \frac{S(Zu - Uz)}{P} dx = S(uz' - zu'),$$

aus der durch Particularisirung von u und v speciellere Formeln abgeleitet werden.

Hr.

S. Spitzer. Note über lineare Differentialgleichungen. Grunert Arch. LXV. 306-321.

I. Der homogene lineare Differentialausdruck n^{ter} Ordnung P soll auf die Form $\frac{dQ}{dx} + MQ$ gebracht werden, wo Q einen

linearen Differentialausdruck $(n-1)^{ter}$ Ordnung bezeichnet. Setzt man $M = z' : z$, so erhält man $P = d(zQ) : z$, somit ist z der integrirende Factor und $zQ =$ const. das erste Integral von $P = 0$. Dies wird nicht etwa, wie hier, allgemein, sondern für $n = 2$ und $n = 3$ durch umständliche Rechnungen erwiesen und für diese Fälle die bekannte Multiplicatorgleichung für z abgeleitet.

II. Angabe eines particulären Integrals der Gleichung

$$x^2 y''' = xy' + \mu y.$$

III. Verification der von Herrn Schwarz (Borchardt J. LXXV. 326, s. F. d. M. V. 1873. p. 249) gegebenen vollständigen Lösung der Differentialgleichung

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6}x\right)y' + \frac{1}{48}y = 0.$$

Auf einem anderen Wege ist ihre Richtigkeit bereits von Herrn Cayley (Quart. J. XVI. p. 268, s. F. d. M. XI. 1879. p. 247) nachgewiesen worden. Hr.

S. Spitzer. Construction einiger linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung. Grunert Arch. LXV. 321-328.

Es werden einige bestimmte Integrale aufgestellt und die linearen Differentialgleichungen construirt, denen sie genügen.

Hr.

S. Spitzer. Integration einiger linearer Differentialgleichungen. Borchardt J. LXXXVIII. 343-347.

Für die Differentialgleichung $y'' = x^m y$ hat in dem Falle, dass $m > 0$ und < -4 ist, Herr Kummer die Lösung $\varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2$ gegeben, worin y_1 und y_2 in Form von bestimmten Integralen zwischen den Grenzen -1 und $+1$ ausgedrückt sind (Crelle J. XII.) Herr Spitzer theilt jedes dieser Integrale in zwei, deren Grenzen beziehungsweise 0, $+1$ und 0, -1 sind, und multiplicirt jedes der vier Theilintegrale mit einer besonderen Constante. Von diesem Ausdrucke wird dann gezeigt, dass er das allge-

meine Integral der Differentialgleichung 4ter Ordnung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y''-x^m y}{x^{\frac{m}{2}-1}}\right)=0$$

ist. Weiterhin wird für die Fälle $m=-1$ und $m=-3$, für welche die Kummer'sche Lösung nicht gilt, die allgemeine Lösung obiger Gleichung durch bestimmte Integrale angegeben und aus diesen nach demselben Verfahren das allgemeine Integral einer gewissen Differentialgleichung 4ter Ordnung abgeleitet.

Hr.

S. Spitzer. Integration zweier Differentialgleichungen. Grunert Arch. LXIV. 393-398.

Die erste Gleichung ist

$$(a_1x+b_1y+c_1)^n dx+(a_2x+b_2y+c_2)^n dy=0.$$

Durch die Substitutionen

$$a_1x+b_1y+c_1=\xi,\quad a_2x+b_2y+c_2=\eta$$

wird sie homogen gemacht und dann in bekannter Weise auf eine Quadratur zurückgeführt. Die zweite Gleichung lautet

$$xy'''=A(xy'-\mu y),$$

wo μ eine positive ganze Zahl bezeichnet. Durch μ-maliges Differentiiren findet man

$$xy^{(\mu+3)}+\mu y^{(\mu+2)}=Axy^{(\mu+1)},$$

welche Gleichung offenbar eine ganze Function μ^{ten} Grades von x mit beliebigen Coefficienten zum Integrale hat. Dieses repräsentirt $\mu+1$ verschiedene particuläre Integrale, und da unter diesen nur μ Integrale sein können, die der ursprünglichen Gleichung nicht angehören, so muss diese wenigstens eine ganze Function zum Integrale haben. Die Coefficienten derselben werden durch unmittelbares Einsetzen in die zu integrirende Gleichung bestimmt.

Hr.

J. Cockle. On the relations of certain symbols. Quart. J. XVII. 20-37, 208-211.

Ist eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0$$

gegeben, so nennt der Verfasser

$$y = \int \xi_1 dx \int \xi_2 dx \ldots \int \xi_n y dx$$

die synthetische Lösung von (1), und es handelt sich um die Auffindung der Beziehungen zwischen den ξ und a. Es werden zunächst folgende drei Sätze bewiesen:

1. $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n = a_n$.
2. ξ_1 genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_1 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} y = 0 \quad (\text{„erste coesura" von (1)}).$$

3. $\xi_1^{n-1} \xi_2^{n-2} \ldots \xi_{n-1}$ ist ein Integral von

$$\frac{dy}{dx} + a_1 y = 0 \quad (\text{„vorletzte coesura" von (1)}).$$

Für $n = 4$ wird zu den drei vorstehenden Relationen noch die folgende Gleichung, der $\xi_1^2 \xi_2$ genügt, hinzugefügt:

$$y''' + 2a_1 y'' + (a_2 + a_1^2 + a_1') y' + (a_1 a_2 - a_3 + a_2') y = 0,$$

so dass in diesem Falle ebensoviele Relationen aufgestellt werden, als die Anzahl der ξ beträgt. Die angeführten Sätze werden zu einer Methode benutzt, eine Differentialgleichung 3ter Ordnung vermittels einer andern Gleichung 3ter Ordnung mit geeigneten Coefficienten zu erniedrigen. Das unmittelbar zu verificirende Resultat dieser Untersuchung ist, dass die Gleichung

$$(2) \qquad \chi y''' + \frac{1}{2} \chi' y'' - 2mxy' + my = 0,$$

wo χ beliebige Function von x, m constant ist, zu ihrem ersten Integral hat

$$xy''^2 - 2mxy'^2 + 2myy' = \text{const.},$$

und somit y'' ein integrirender Factor von (2) ist. Hr.

J. Cockle. On a binomial biordinal and the constants of its complete solution. Proc. L. M. S. XI. 123-131.

Um die lineare Differentialgleichung

(1) $z''+b_1z'+b_2z=0$ (b_1, b_2 Functionen von x)

zu integriren, bildet der Verfasser die allgemeinere Form

(2) $z''+b_1z'+b_2z=c\dfrac{e^{-2\int b_1dx}}{z^3}$ (c willkürliche Constante).

Durch die Substitution $z=\sqrt{2y}$ und Differentiation geht dieselbe nach einigen Umformungen über in die Gleichung 3ter Ordnung

$$y'''+3b_1y''+(b_1'+2b_1^2+4b_2)y'+2(b_2'+2b_1b_2)y=0.$$

Aus der vollständigen Lösung derselben ergiebt sich die der Gleichung (2), und indem man $c=0$ setzt, die der Gleichung (1). Nach dieser Methode wird zunächst die Gleichung

$$(1-x^2)z''-\frac{3}{2}x^2z'+mxz=0,$$

welche von Boole unter der Bedingung

$$m=\frac{1}{4}i(i+1) \quad (i \text{ eine ganze Zahl})$$

gelöst war, für die Fälle

$$m=\left(\frac{3}{2}i+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{2}i+\frac{3}{4}\right) \quad \text{und} \quad m=\frac{5}{64}$$

integrirt. Der erste Fall führt für $i=0$ auf die von Herrn Schwarz aufgestellte Differentialgleichung (Borchardt J. LXXV. 326, s. F. d. M. V. 1873. p. 249). Die Hülfsgleichung 3ter Ordnung wird vermittels des Boole'schen Algorithmus gelöst. Für den Fall $m=\frac{5}{64}$ werden die Resultate des Herrn Harley (Quart. J. V. 1862 und Mem. of the Manchester Society 3. Ser. XI. 1865) zu Hülfe genommen. Zum Schluss wird die allgemeinere Gleichung

$$z''-\left(n-1+\frac{\frac{3}{2}}{1-x^3}\right)\frac{1}{x}z'-\frac{m}{x^2}z=0$$

betrachtet und ihre Lösbarkeit für die Fälle

$$n = (k-i)(3k+3i\pm 2) - \frac{3}{4},$$

$$m = \frac{1}{4}\{(3i\pm 1)^2 - n^2\}$$

(i und k ganze Zahlen) nachgewiesen. Hr.

J. Cockle. Supplement to „Exercises.“ Messenger (2) X. 15-18.

Bemerkungen zu Arbeiten des Verfassers, die in früheren Bänden des Messenger erschienen sind. Sie beziehen sich hauptsächlich auf gewisse lineare Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2P\frac{du}{dx} + Qu = 0.$$

Glr. (O.)

J. Cockle. Supplementary paper on primary forms. Phil. Mag. 1880.

P. Mansion. Intégration d'une équation différentielle d'Abel. N. C. M. VI. 457-458.

Die Gleichung

$$D^2y + Dy + 2(y-y^3) = 0$$

lässt sich leicht integriren, indem man setzt:

$$Dy + y = z, \quad y = ue^{-x}, \quad z = ve^{-2x}.$$

Man findet

$$u^4 - c = v^2.$$

Ebenso lässt sich integriren

$$D^2y + (k+l)Dy + kly + Ay^m = 0,$$

wenn

$$(m+1)k = 2l \quad \text{oder} \quad (m+1)l = 2k.$$

Mn. (O.)

G. Darboux. Sur les systèmes formés d'équations linéaires à une seule variable indépendante. C. R. XC. 524-526, 596-598.

Es sei das System linearer Differentialgleichungen gegeben

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

wo $a_{in} \ldots a_{nn}$ beliebige Functionen von t bezeichnen. Es hat im Allgemeinen n lineare Integrale von der Form

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \cdots + \alpha_{in}x_n = C_i \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

aber es kann auch Integrale von höherem als dem ersten Grade haben, und wenn die Coefficienten a_{ik} rationale Functionen von t sind, so werden die vorerwähnten linearen Integrale im Allgemeinen irrational oder transcendent sein, während die Integrale von höherem Grade rational sein werden. Für diese letzteren gilt nun folgender Satz:

„Wenn die homogene Function $f(x_1 \ldots x_n)$, gleich Const. gesetzt, ein Integral des Systems (1) ist, dann ist jede Covariante dieser Form, multiplicirt mit einer passenden Potenz einer bekannten Function von t (nämlich der Function $e^{\int (a_{11}+\cdots+a_{nn})\,dt}$) ebenfalls ein Integral des nämlichen Systems." Hierbei ist zu bemerken, dass, wenn $f(x_1 \ldots x_n)$ nicht homogen ist, jede der homogenen Functionen, in welche es zerlegt werden kann, für sich einer Constanten gleich gesetzt, ein Integral des Systems (1) liefert, so dass es genügt, die homogenen Integrale allein zu betrachten.

Bringt man mit dem System (1) das folgende (das reciproke des ersteren)

$$(2) \qquad \frac{du_i}{dt} = -a_{1i}u_1 - a_{2i}u_2 \ldots - a_{ni}u_n \quad (i = 1, \ldots n)$$

in Verbindung, so wird ebenso, wie in der p. 238 besprochenen Arbeit des Herrn Laurent gezeigt, dass vermöge der Beziehung

$$u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n = \text{const.}$$

die Integration des Systems (1) die des reciproken nach sich zieht, und dass ferner mittels der Function

$$H = \Sigma a_{ik} x_i x_k$$

das System der $2n$ Gleichungen (1) und (2) auf die canonische Form

$$(3) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

gebracht werden kann. Man könnte nun hier den Poisson'schen Satz anwenden, der aus zwei gegebenen Integralen ein neues finden lehrt. Diese Anwendung wird jedoch unnöthig durch einen Satz, der eine Ausdehnung des oben angeführten Satzes auf das System (3) bildet und folgendermassen lautet:

„Sind

$$f_1(x_1 \dots x_n;\ u_1 \dots u_n) = C_1,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_p(x_1 \dots x_n;\ u_1 \dots u_n) = C_p,$$

wo die f homogen in Bezug auf die x und auf die u sind, Integrale des Systems (3), so ist jede invariante Form dieses Systems von Integralen, multiplicirt mit einer bekannten Function von t (s. oben), wiederum ein Integral des Systems.“ Hr.

E. Picard. Sur les équations linéaires simultanées et sur une classe de courbes gauches. C. R. XC. 1065-1067, 1118-1119.

Es sei das System gegeben

$$(1)\quad \frac{du}{dt} = -Av + Bw,\quad \frac{dv}{dt} = Au - Cw,\quad \frac{dw}{dt} = -Bu + Cv.$$

Dieses System hat die Eigenschaft, mit seinem reciproken System (vgl. die oben besprochene Arbeit des Herrn Darboux) zusammenzufallen. A, B, C sind doppelt-periodische Functionen mit den Perioden $2K$ und $2iK'$, und es wird ferner angenommen, dass die Integrale eindeutig sind. Alsdann wird bewiesen, dass es immer ein System von Integralen giebt, welches aus doppeltperiodischen Functionen mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ oder $4K$ und $4iK'$ besteht. Hiervon wird folgende geometrische Anwendung gemacht. Ein besonderer Fall des Systems (1) ist:

$$(2)\quad \frac{du}{ds} = \frac{v}{R},\quad \frac{dv}{ds} = -\frac{u}{R} - \frac{w}{r},\quad \frac{dw}{ds} = \frac{v}{r}.$$

Bezeichnen R und r die Radien der ersten und zweiten Krümmung einer doppelt-gekrümmten Curve, so genügen obigem System als Integralsystem, die neun Cosinus $u_1 v_1 w_1$; $u_2 v_2 w_2$; $u_3 v_3 w_3$ der

Winkel, welche die Tangente, die Hauptnormale und die A[x] der Schmiegungsebene mit den drei Coordinatenaxen bilde[n]. Sind nun R und r doppelt-periodische Functionen von s, so leh[rt] der obige Satz, dass es für diese Curven eine Richtung von so[l]cher Beschaffenheit giebt, dass die Tangente, die Hauptnorma[le] und die Axe der Schmiegungsebene für alle Punkte der Curv[e], die von einander um eine Bogenlänge gleich der Periode a[b]stehen, mit jener Richtung gleiche Winkel bilden.

Der specielle Fall

$$\frac{1}{R} = \frac{2n}{a} dn\left(\frac{s}{a}\right), \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{b},$$

wo a und b zwei Constante, n eine positive ganze Zahl u[nd] $dn(x)$ die Function $\Delta \operatorname{am}(x)$ bedeutet, wird alsdann näher b[e]trachtet und das System von doppelt-periodischen Integralen d[er] Gleichungen (2) für diesen Fall angegeben. Für $n = 1$ ist d[ie] Curve dieselbe, welche von Herrn Hermite (C. R. XC. p. 64[)] als besonderer Fall der elastischen Curve behandelt ist.

Hr.

J. N. Hazzidakis. Ueber eine Eigenschaft der System[e] von linearen homogenen Differentialgleichungen.
Borchardt J. XC. 80-82.

Hat das System

$$\frac{dy_\varrho}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} A_\lambda^{(\varrho)} y_\lambda \quad (\varrho = 1, 2, \dots n)$$

das System von n Lösungen

$$y_1^i, \; y_2^i, \; \dots \; y_n^i \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

deren Determinante $|y_\lambda^\varrho|$ nicht verschwindet, und setzt man

$$B_\lambda^{(\varrho)} = -A_\varrho^{(\lambda)} + \omega \delta_{\lambda\varrho},$$

wo $\omega = \sum_\lambda A_\lambda^{(\lambda)}$ und $\delta_{\lambda\varrho} = 0$, wenn $\lambda \gtrless \varrho$, aber $= 1$, wenn $\lambda =$ [ϱ] ist, so werden die n Differentialgleichungen

$$\frac{dz_\varrho}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} B_\lambda^{(\varrho)} z_\lambda \quad (\varrho = 1, 2, \dots n)$$

urch das zu dem Systeme der y^e_λ adjungirte System

$$z^i_1 \dots z^i_i \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

ro $z^i_k = \dfrac{\partial \Delta}{\partial y^i_k}$ ist, befriedigt. (Vgl. die Arbeit von Herrn Laurent uf p. 238.) Hr.

KRANKENHAGEN. Ueber die Transformation zweier Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Pr. Malchin.

Für die Hamilton'schen Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots n)$$

at Jacobi in seiner Nova methodus (Crelle J. LX. § 57) das Problem in der allgemeinsten Weise gelöst, ein solches System urch Einführung neuer Variabeln in ein System derselben Art u verwandeln. Dem System (1) ist bekanntlich äquivalent die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(2) \qquad \frac{\partial w}{\partial t} + H(tq_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) = 0 \quad \left(p_k = \frac{\partial w}{\partial q_k}\right),$$

us deren vollständiger Lösung sich die Integration von (1) ergiebt. Die allgemeinste partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist jedoch nicht (2), sondern

$$(3) \qquad \frac{\partial w}{dt} + F(wtq_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) = 0,$$

und dieser äquivalent ist das System

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq_k}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \dfrac{dp_k}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial q_k} - p_k \dfrac{\partial F}{\partial w}, \\ \dfrac{dw}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{k=n} p_k \dfrac{\partial F}{\partial p_k} - F. \end{cases}$$

Für dieses System (4) ist die Jacobi'sche Transformation noch nicht ausgeführt worden. Die Ausfüllung dieser Lücke ist der Zweck vorliegender Arbeit. Hr.

E. MEISSEL. Eine merkwürdige Eigenschaft des Integrals der Gleichung $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - \cos 2x}$. Grunert Arch. LXV. 111.

Der Verfasser theilt vorläufig ohne Beweis den merkwürdige Satz mit, dass die Werthe des Integrals y der citirten Gleichun für die Werthe

$$x = \frac{\pi}{4}, \ \frac{3\pi}{4}, \cdots (2n-1)\frac{\pi}{4},$$

welches auch immer die in y eintretende Constante sei, durc algebraische Beziehungen mit einander verbunden sind, und zwi ist, wenn

$$y = f(x, a) \quad \text{und} \quad A = f\left(\frac{\pi}{4}, a\right)$$

gesetzt wird,

$$f\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}, a\right) =$$

$$A\left(\frac{e^{\frac{n\pi}{2}} + \cos n\pi . e^{-\frac{n\pi}{2}}}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{2} + A^2}\left(\frac{e^{\frac{n\pi}{2}} - \cos n\pi . e^{-\frac{n\pi}{2}}}{2}\right)$$

Hr.

Haag. Note sur une classe d'équations différentielles. Bull. S. M. F. VIII. 80-81.

Die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^2 + A\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)^2 + \cdots + L\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + M\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Ny^2 + P = 0$$

wo $A, B, \ldots P$ Constante sind, hat zum Integral

$y = \lambda \sin(\alpha x + C)$ (mit der willkürlichen Constante C),

wo α durch die Gleichung

$$\alpha^{2m} - A\alpha^{2(m-1)} + \cdots + L\alpha^4 - M\alpha^2 + N = 0$$

bestimmt ist, und

$$\lambda = \frac{-P}{A\alpha^{2(m-1)} + \cdots + M\alpha^2}.$$

Im obigen Integral sind demnach $2m$ Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung enthalten. Hr.

J. N. HAZZIDAKIS. Ueber eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Borchardt J. XC. 74-79.

Sind u, v, w durch ein System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen definirt, und setzt man $y = v:u$, so findet man, dass y einer Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$Ay^3 + By^2 + Cy + D + Q(yy'' - 2y'^2) + Ry'' + Syy' + Ty' = 0$$

genügt, deren Coefficienten Functionen von x sind. Es werden nun umgekehrt die Bedingungen gesucht, welche die Coefficienten vorstehender Gleichung erfüllen müssen, damit ihr allgemeines Integral sich als Quotient von der Form $v:u$ darstellen lasse, wo u und v einem System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen genügen. Die fraglichen Bedingungen werden in vorliegender Arbeit vollständig aufgestellt und für den Fall ihrer Erfüllung auch die Werthe der Coefficienten des linearen Systems, durch welches u und v definirt sind, angegeben. Hr.

W. H. L. RUSSELL. On the integration of differential equations. Messenger (2) X. 38-44.

Der Verfasser bestimmt die Bedingungen, die erfüllt werden müssen, damit gewisse lineare und nicht-lineare Differentialgleichungen Integrale zulassen von der Form

1) $y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n$;

2) $y = \frac{P}{Q}$,

wo P und Q rationale und ganze Functionen von x sind;

3) $y = Pe^{\int Q\,dx}$.

Glr. (O.)

W. J. C. SHARP. Solution of two questions (5762 and 6077). Educ. Times XXXIII. 34-35, 92.

Die erste von Herrn Prof. Sylvester gegebene Aufgabe lautet:

„Ist $f(x, y)$ eine Grösse von n Dimensionen in Bezug auf x, y, zu zeigen, dass

$$(n-1)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - nf\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

gleich dem Product aus einer negativen Zahl und $y^2.H_1$ ist, wo H die Hesse'sche Determinante von f ist." Die andere, von Herrn Sharp gestellte Aufgabe fordert den Nachweis folgenden Satzes: „Hat irgend eine Gleichung drei gleiche Wurzeln, so hat die Hesse'sche Determinante diese Wurzel als Doppelwurzel; und allgemein, wenn die Gleichung eine p-fache Wurzel hat, so ist diese Wurzel eine $2(p-1)$-fache Wurzel der Hesse'schen Determinante." Für die zweite Aufgabe werden zwei verschiedene Lösungen gegeben. M.

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

A. Voss. Geometrische Interpretation der Differentialgleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Clebsch Ann. XVI. 556-560.

Durch die in Rede stehende Gleichung wird jedem Punkte $M(x, y, z)$ die durch denselben gehende Ebene

$$(X-x)P + (Y-y)Q + (Z-z)R = 0$$

zugeordnet und dadurch ein Nullsystem bestimmt. Schreitet man von M aus in der Ebene nach einer Richtung δ_1 fort, so dreht sich die zugehörige benachbarte Ebene um eine projectivisch entsprechende Richtung δ_2, bestimmt durch die Gleichungen

$$(1)\quad \delta_2 x : \delta_2 y : \delta_2 z = Q\delta_1 R - R\delta_1 Q : R\delta_1 P - P\delta_1 R : P\delta_1 Q - Q\delta_1 P.$$

Die Aufsuchung der Doppelelemente, die durch die Gleichungen

$$\delta_2 x = \mu\delta x,\quad \delta_2 y = \mu\delta y,\quad \delta_2 z = \mu\delta z$$

bestimmt sind, führt auf die quadratische Gleichung für μ:

$$\mu^2 - \mu G - H = 0.$$

Unter den Betrachtungen, die daran geknüpft werden, heben wir hervor, dass die projectivische Beziehung (1) nur dann involutorisch ist, wenn $G = 0$ ist, dann ordnen sich die dem Punkte M benachbarten Ebenen genau so, wie die einem Flächenpunkte benachbarten Tangentialebenen, sie bilden also ein Flächenelement. Ist nun $G = 0$ identisch erfüllt, so gruppiren sich die Flächenelemente zu Flächen eines Flächensystems, dem Integrale der erwähnten Differentialgleichung; und in der That ist

$$G = P\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = 0$$

die Bedingungsgleichung für die Integrabilität derselben. Ist dagegen $G = 0$ nicht identisch erfüllt, so erscheint die Fläche $G = 0$ mit einer Schaar von Curven überdeckt, längs deren sich Flächenelemente aneinander schliessen. Wenn insbesondere diese mit $G = 0$ nicht blos in einzelnen Punkten, sondern in einem ganzen Theile von $G = 0$ eine Berührung eingehen, so bildet dieser Theil ein singuläres Integral der Differentialgleichung. Ein Beispiel für diese Annahme ist

$$P : Q : R = \left(\mu\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi\varphi_1\right) : \left(\mu\frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi\varphi_2\right) : \left(\mu\frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi\varphi_3\right),$$

wo μ, ψ, φ_1, φ_2, φ_3 beliebige Functionen von x, y, z sind.

Hr.

A. Mayer. Zur Pfaff'schen Lösung des Pfaff'schen Problems. Clebsch Ann. XVII. 523-530.

Die Aufgabe: $x_1, x_2, \dots x_m$ als unabhängige Functionen von m neuen Variabeln $t, \alpha_2, \dots \alpha_m$ so zu bestimmen, dass identisch wird

$$\sum_{k=1}^{k=m} X_k dx_k = \frac{1}{N}\sum_{i=2}^{i=m} A_i d\alpha_i,$$

worin N eine Function von $t, \alpha_2, \dots \alpha_m$, die Coefficienten $A_2, \dots A_m$ dagegen blosse Functionen von $\alpha_2, \dots \alpha_m$ sind, wird gewöhnlich ausschliesslich auf das sogenannte erste Pfaff'sche System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt, in der Art,

dass man annimmt, die Aufgabe sei lösbar, so oft diesem Systeme genügt werden kann. Die vorliegende Note zeigt, dass diese Zurückführung nur so lange zulässig ist, als die aus den Elementen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildete schiefe Determinante nicht verschwindet. Sobald aber diese Determinante Null ist, so muss man dem ersten Pfaff'schen Systeme noch eine weitere Bedingungsgleichung hinzufügen. Dagegen ergiebt sich, dass in der That, wie es zur Anwendbarkeit der Pfaff'schen Methode auf die Integration der gegebenen Gleichung

$$\sum_{h=1}^{h=m} X_h dx_h = 0$$

erforderlich ist, die obige Aufgabe dann und nur dann stets lösbar ist, wenn m eine grade Zahl. Mr.

W. Zajaczkowski. Ueber eine gewisse Eigenschaft der Pfaff'schen Function. Krak. Ber. 1880. (Polnisch).

Versteht man unter (i, j), wo $i, j = 1, 2, \dots 2n$, solche Grössen, dass $(i, j) = -(j, i)$, $(i, i) = 0$, und definirt man den Ausdruck $P = (1, 2, \dots 2n)$ durch folgende Gleichung:

$$P = (1, 2, \dots 2n) =$$
$$(1, 2)(3, 4, \dots 2n) + (1, 3)(4, 5, \dots 2n, 2) + \dots + (1, 2n)(2, 3, \dots 2n-1),$$

oder kürzer

$$P = (1, 2, \dots 2n) = \sum_{i=2}^{i=2n} (1, i)(i+1, \dots 2n, 2, \dots i-1),$$

so heisst P Pfaff'sche Function der Indices $1, 2, \dots 2n$.

Bedeutet ferner $P_{i,j}$ den Coefficienten von (i, j) in der Entwickelung von P, $P_{i,j,k,l}$ den Coefficienten von (i, j, k, l) in derselben Entwickelung u. s. w., so besteht folgender Satz:

$$P_{1,2}\, P_{3,4,\dots 2m} + P_{1,3}\, P_{4,\dots 2m,2} + P_{1,4}\, P_{5,\dots 2m,2,3} + \dots + P_{1,2m\dots}\, P_{2,3,\dots 2m-1}$$
$$= P\, P_{1,2,\dots 2m},$$

oder kürzer:

$$\sum_{i=2}^{i=2m} P_{1,i} P_{i+1,\dots 2m,2,\dots i-1} = PP_{1,2,\dots 2m}.$$

Diesen Satz hat zuerst Herr Tanner im VIII. Bd. des „Messenger of mathematics" bewiesen; der Verfasser giebt hier einen sehr einfachen und eleganten Beweis desselben. Dn.

W. Zajaczkowski. A theorem relating to Pfaffians. Messenger (2) X. 36-37.

Beweis des Satzes, den Herr Tanner in seiner Arbeit: „A theorem relating to Pfaffians" (Messenger (2) VIII. 56–60) bewiesen hat. (Siehe das obige Referat). Glr. (O.)

H. W. L. Tanner. Note on a generalization of Pfaff's problem. Proc. L. M. S. XI. 131-139.

Das Pfaff'sche Problem besteht bekanntlich in der Transformation eines Ausdruckes

$$y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \dots + y_n dx_n$$

in einen andern Ausdruck von ähnlicher Form

$$v_1 du_1 + \dots + v_r du_r,$$

wo die y, v, u Functionen der x sind, und in der Bestimmung des kleinst-möglichen Werthes von r, wenn die y gegeben sind. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nun mit dem allgemeineren Problem, das System von m Ausdrücken

$$y_{i1} dx_1 + \dots + y_{in} dx_n \qquad (i = 1, \dots m)$$

in ein System ähnlicher Form

$$v_{i1} du_1 + \dots + v_{ir} du_r \qquad (i = 1, \dots m)$$

zu transformiren. Die Möglichkeit dieser Transformation erfordert, wie sich leicht ergiebt, das Bestehen der Gleichungen, die man aus dem System

$$\begin{vmatrix} y_{i1} & y_{i2} & \cdots & y_{in} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_r}{\partial x_1} & \frac{\partial u_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_r}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

erhält, wenn man alle darin befindlichen Determinanten mit $r+1$ Columnen gleich Null setzt. Mit diesem Gleichungssystem (A) bringt der Herr Verfasser ein zweites (B) in Verbindung, welches aus dem Schema

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & & \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \\ \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dx_2} & \cdots & \frac{d}{dx_n} \\ y_{i1} & y_{i2} & \cdots & y_{in} \\ \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dx_2} & \cdots & \frac{d}{dx_n} \\ y_{j1} & y_{j2} & \cdots & y_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, \ldots m)$$

hervorgeht. Dasselbe besteht aus m Reihen der y und k Reihenpaaren, von denen immer die obere Reihe die operativen Symbole $\frac{d}{dx_1} \cdots \frac{d}{dx_n}$, die untere eine Reihe der y enthält. Das Gleichungssystem (B) wird nun erhalten, wenn man alle Determinanten mit $m+2k$ Columnen, die man aus dem Schema bilden kann, gleich Null setzt. Man erkennt leicht, dass das System (B) eine Folge von (A) ist. Das Bestehen des Systems (B) ist demnach die nothwendige Bedingung für die Möglichkeit der fraglichen Transformation. Der Verfasser behauptet nun auch die Umkehrung dieses Satzes, dass nämlich (A) eine Folge von (B) sei, das Bestehen von (B) also zur Existenz der Transformation hinreiche, bekennt jedoch, hierfür noch keinen genügenden Beweis gefunden zu haben. Die Arbeit enthält ausserdem eine Reihe von Bemerkungen über die Eigenschaften der Gleichungen (B), die sich der Wiedergabe an dieser Stelle entziehen. Hr.

N. Schaposchnikoff. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1ter Ordnung.
Mosk. Math. Samml. X. (Russisch.)

Diese Arbeit enthält die Darstellung der meisten bekannten Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen 1ter Ordnung bis auf die neuesten Untersuchungen von Lie und Mayer.

P.

Ch. Méray. Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles.
Liouville J. (3) VI. 235-266.

Das Referat erfolgt im nächsten Bande. T.

E. Beltrami. Relazione sulla memoria di G. B. Favero „De aequationum differentialium partialium natura disquisitiones quaedam analyticae.“ Acc. R. d. L. (3) IV. 195.

Da nach dem vorliegenden sehr kurzen Bericht die Arbeit noch in extenso erscheinen wird, muss das Referat bis zu diesem Erscheinen verschoben werden. O.

Ph. Gilbert. Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Ann. Soc. scient. Brux. IV. B. 273-276.

P. Mansion. Rapport sur ce mémoire. Ann. Soc. scient. de Brux. IV. A. 58-59.

Die meisten Arbeiten über Integralrechnung enthalten den folgenden Satz: „Wenn $F(x, y, z) = 0$ eine Lösung von

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z$$

ist, so kann man F in die Form $f(u, v) = 0$ bringen, wo $u = \alpha$, $v = \beta$ die Integrale des Hülfssystems

$$dx : X = dy : Y = dz : Z$$

sind.“ Man gründet den Beweis auf die Bemerkung, dass die Functionaldeterminante

$$D = \frac{\partial(u, v, F)}{\partial(x, y, z)}$$

gleich Null ist, und folglich F eine Function von u, v allein. Herr Gilbert zeigt an einem sehr einfachen Beispiel, dass diese Bemerkung ungenau ist. Damit sie richtig, muss D identisch Null sein. Im Gegentheil, D ist im Allgemeinen Null, wegen der Relation $F = 0$. Herr Mansion bemerkt dazu, dass sich die Gleichung $F = 0$ trotzdem durch die Cauchy'sche Methode in die Form

$$\psi(x, y) f(u, v) = 0$$

bringen lässt. Herr A. Mayer hat ausserdem Herrn Mansion in einer brieflichen Mittheilung darauf aufmerksam gemacht, dass die von Jacobi in seiner Délucidation (Crelle J. XXIII.), wo alle Fälle auf den zurückgeführt sind, dass $Z = 0$, nicht in die Kritik des Herrn Gilbert fällt. Mn. (O.)

H. W. L. Tanner. Notes on a general method of solving partial differential equations of the first order with several dependent variables. Proc. L. M. S. XI. 72-83.

Das Referat erfolgt im nächsten Bande. T.

J. Collet. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. C. R. XCI. 974-978.

Sind $p_1, \dots p_n$ in dem Ausdruck

$$\delta = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n$$

durch n Gleichungen $f_1 = 0, \dots f_n = 0$ definirt, die ausser den unabhängigen Variabeln $x_1, \dots x_n$ auch die abhängige Veränderliche z enthalten, so ist δ zwar kein exactes Differential, wenn auch die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Bedingungen

$$(f_h, f_k) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f_h}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f_k}{\partial z}\right) - \frac{\partial f_k}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f_h}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f_h}{\partial z}\right)\right] = 0$$

erfüllt sind; dagegen sind diese Bedingungen, wie gezeigt wird, nothwendig und hinreichend dafür, dass die Gleichung $\delta = 0$ einen Multiplicator besitze. In Folge dessen lässt sich die sonst nöthige Transformation, welche die abhängige Veränderliche selbst fortschafft, ersparen. Als Beispiel dient die Aufgabe, die Gleichung

$$\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]y-\frac{\partial z}{\partial y}z = 0$$

zu integriren. T.

J. Cockle. Solution of a question (6153). Educ. Times XXXIII. 19-20.

Die Werthe $v = y+z = 0$ und $w = x+v = 0$ befriedigen beide die Gleichung

$$(1) \qquad (x+y)(1+p+q)+zp = 0,$$

wo die Bezeichnungen nach Boole, Differential Equations, 1865, gewählt sind. Es wird ohne Zuhülfenahme des allgemeinen primitiven Integrals von (1) die verschiedene Natur der beiden Lösungen und mit Hülfe des allgemeinen Integrals die verschiedene Entstehung beider Lösungen gezeigt. Ferner wird bewiesen, dass, wenn man $u = a$ und $v = b$ als unabhängige particuläre Integrale von (1) nimmt, die Jacobi'sche Determinante von u, v, w nicht identisch verschwindet. M.

F. Siacci. Un teorema di meccanica analitica. Atti di Torino XV. 809.

Mittheilung des Satzes: „Kennt man das Integral $F = h$ des canonischen Systems

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots n),$$

und enthält F von den $2n$ Variabeln $q_1, \dots q_n\, p_1, \dots p_n$ nur n solche, welche verschiedene Indices haben, so lässt sich das vorliegende System auf ein anderes canonisches System von $2n-2$ Gleichungen und eine Quadratur reduciren.“ T.

Krankenhagen. Zur Theorie der partiellen linearen Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1880. 197-203.

Herr Schering hat in seiner Abhandlung „Hamilton-Jacobi'sche Theorie etc." (Gött. Abhandl. XVIII. cf. F. d. M. V. 1873. p. 444) diejenigen Substitutionen behandelt, bei deren Einführung an Stelle der ursprünglichen Variabeln die Hamilton'sche Form der dynamischen Differentialgleichungen

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k};$$
$$k = 1, \dots n, \; H = H(tq_1 \dots q_n \, p_1 \dots p_n)$$

sich nicht ändert; auch hat er gezeigt, dass das Bestehen der verallgemeinerten Jacobi'schen Gleichungen zwischen Substitutionen und Variabeln nothwendig und hinreichend ist, damit bei Einführung der ersteren das Gleichungssystem in ein anderes von derselben Gestalt transformirt wird. Der Herr Verfasser theilt die entsprechenden Resultate mit, welche er für das allgemeinere System:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k} - p_k \frac{\partial F}{\partial w}, \quad \frac{dw}{dt} = \sum_k p_k \frac{\partial F}{\partial p_k} - F,$$

wo $k = 1, \dots n$; $F = F(twq_1 \dots q_n \, p_1 \dots p_n)$ ist, erhalten hat.

T.

F. Siacci. Sopra una proposizione di Jacobi. Acc. R. d. L. (3) IV. 236-240.

Die ohne weitere Ausführung gegebene Bemerkung Jacobi's in der ersten der nachgelassenen Abhandlungen, welche der „Dynamik" beigefügt sind, (cf. p. 453) dass die Theoreme X-XII derselben alle möglichen Systeme von Elementen umfassen, deren Differentialquotienten die canonische Form haben, und welche aus einem derselben abgeleitet werden können, ist von Mathieu in seiner „Dynamique analytique" sogar für unrichtig erklärt worden. Herr Siacci beweist zunächst folgenden Hilfssatz:

„Wenn zwischen den Variabeln $x_1 \dots x_n \, y_1 \dots y_n$ n derartige Beziehungen bestehen, dass

$$\sum_{r=1}^{n} \delta y_r dx_r = \sum_{r=1}^{n} dy_r \delta x_r$$

ist, so kann diesen Beziehungen stets die Form gegeben werden:

$$y_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_r} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_r},$$

wo $\varphi, \psi_1, \ldots \psi_k$ willkürliche Functionen der x und $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ Functionen der x und y sind, die aus den Gleichungen

$$\psi_1 = 0 \ldots \psi_k = 0 \quad (k < n)$$

zu bestimmen sind."

Aus diesem Satze ergiebt sich sofort in sehr einfacher Weise nicht nur ein Beweis für die erwähnten Theoreme X—XII, sondern auch die Richtigkeit der oben angeführten Bemerkung Jacobi's; allerdings muss in dem Theorem XII, falls es alle möglichen Transformationen der in demselben bezeichneten Art umfassen soll, den daselbst auftretenden Ausdrücken

$$\beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_i'} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha_i'}$$

noch die Derivirte einer willkürlichen Function der α nach α_i' hinzugefügt werden.

Aus derselben Quelle ergiebt sich dem Herrn Verfasser ein Satz, der das Jacobi'sche „Fundamentaltheorem" (l. c. p. 397) derselben Abhandlung in der Weise verallgemeinert, dass es umkehrbar wird; zu diesem Zwecke hat man a. a. O. den Grössen $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ und $\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$ Ausdrücke von der Form

$$\lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i} \quad \text{resp.} \quad \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_i} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_i}$$

und dem ganzen System noch die Bedingungen $\psi_1 = 0 \ldots \psi_k = 0$ hinzuzufügen. T.

A. Winckler. Ueber den letzten Multiplicator eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung.
Wien. Ber. LXXXII. 628-652.

Wie in einem früheren Aufsatze (Wien. Ber. 1879, cf. F. d. M. XI. 1879. 244 ff.) für eine Differentialgleichung höherer Ordnung, verfolgt der Herr Verfasser in der gegenwärtigen Arbeit den Zweck, für ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen $n+1$ Variabeln die Theorie des Jacobi'schen Multiplicators ebenfalls zu vereinfachen, was in ganz analoger Weise geschehen kann. So ergiebt sich eine Form für den letzten Multiplicator, vermittelst deren der Verfasser im Stande ist, denselben für viele Systeme von Differentialgleichungen anzugeben, die in ihrer Art sehr allgemein sind und namentlich die bis jetzt allein in Betracht gezogenen linearen Gleichungen an Allgemeinheit weit übertreffen. Ausserdem wird bemerkt und näher ausgeführt, dass ein Weg zur Auffindung von besonderen Fällen, auf welche die Jacobi'sche Theorie anwendbar ist, auch in der umgekehrten Methode des Multiplicators sich darbietet. Da sich der Multiplicator für jedes gegebene System von Differentialgleichungen ebensowenig, als umgekehrt das einem gegebenen Multiplicator entsprechende System in unbeschränkter Allgemeinheit bestimmen lässt, so ist die Anwendung der Multiplicatortheorie, wie bemerkt wird, allerdings durch die Kenntnis besonderer Fälle oder durch die Art, wie man zu solchen gelangt, bedingt; die vom Verfasser angegebenen Fälle, in welchen diese Anwendung möglich ist, gehen aber über den fast überall sonst nur hervorgehobenen Fall, wo der Ausdruck

$$\frac{dx}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right),$$

(das gegebene System in der Form

$$dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$$

vorausgesetzt), identisch verschwindet oder eine blosse Function von x ist, hinaus.

Schliesslich wird noch der Uebergang zu einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung gemacht. T.

L. V. Turquan. Intégration d'un nombre quelconque d'équations simultanées entre un même nombre de fonctions de deux variables indépendantes et leurs dérivées partielles du premier ordre. C. R. XCI. 43-45.

Es wird der Gang angegeben, den der Verfasser in dem ersten Theile einer Abhandlung einschlägt, um das simultane System zweier partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Functionen zweier unabhängiger Variabeln zu integriren.

T.

L. V. Turquan. Intégration d'un système particulier de deux équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. Ann. Soc. scient. Brux. IV. B. 303-316.

P. Mansion. Rapport sur ce mémoire. Ann. Soc. scient. Brux. IV. A. 65-75.

Die Arbeit des Herrn Turquan enthält eine Integrationsmethode für zwei Gleichungen mit partiellen Derivirten erster Ordnung zwischen zwei abhängigen Variablen z, u, zwei unabhängigen Variabeln x, y und den drei Derivirten $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Der Bericht enthält ein Résumé über eine Methode, die allgemeiner als die des Herrn Turquan ist, für den Fall, dass in die Gleichungen die vier Derivirten $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ eintreten, dann einen Versuch des Berichterstatters, diese Methode mit Hülfe Cauchy'scher Ideen auseinanderzusetzen. Nach dem Druck hat der Berichterstatter Fehler in seiner Arbeit gefunden, die die Tragweite der Resultate beeinträchtigen. Auch findet sich wahrscheinlich ein Fehler in der Abhandlung des Herrn Turquan.

Mn. (O.)

Ph. Gilbert. Sur une propriété de la fonction de Poisso et sur l'intégration des équations aux dérivées partielle du premier ordre. C. R. XCI. 541-544, 613-616.

Bestehen zwischen den $2n$ Variabeln $x_1, \dots x_n$, $p_1, \dots p_n$ di m Gleichungen

$$F_1 = 0, \dots, \quad F_m = 0,$$

die nach den Grössen $p_1, \dots p_m$ aufgelöst,

$$p_1 = \lambda_1(x_1, \dots x_n, \; p_{m+1}, \dots p_n), \; p_2 = \lambda_2, \dots, \; p_m = \lambda_m$$

geben; wird ferner die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial p_m}$$

durch Δ bezeichnet, und ist endlich Δ_{ik}^{rs} diejenige Unterdetermi nante, die man erhält, wenn man in Δ die r^{te} und die s^{te} Colonn und die i^{te} und die k^{te} Reihe unterdrückt, so lautet die vom Ve fasser abgeleitete Eigenschaft:

$$(p_i - \lambda_i, \; p_k - \lambda_k) = \frac{(-1)^{i+k}}{\Delta} S_{r,s}(-1)^{r+s} \Delta_{ik}^{rs}(F_r, \; F_s).$$

Hieran anknüpfend wird auf einige Schwierigkeiten i der Jacobi'schen Integrationstheorie der partiellen Differentia gleichungen erster Ordnung aufmerksam gemacht, die man be seitigen kann, wenn man diese Identität zu Grunde legt.

T.

A. V. Bäcklund. Zur Theorie der partiellen Differential gleichungen erster Ordnung. Clebsch Ann. XVII. 285-329.

Sind z, x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines Punktes in einem Raum von vier Dimensionen, und ist die Tangentenebene in diesen Punkte an einer zweifachen Punktmannigfaltigkeit M_2 diese Raumes dargestellt durch

$$\zeta - z = p_1(\xi_1 - x_1) + p_2(\xi_2 - x_2) + p_3(\xi_3 - x_3),$$

so genügen die dreifach unendlich vielen durch die Gleichunge

$$(1) \qquad z = f(x_2 x_3 \lambda \mu \nu), \quad x_1 = \varphi(x_2 x_3 \lambda \mu \nu)$$

mit den variablen Parametern λ, μ, ν dargestellten M_2 einer partiellen Differentialgleichung 1[ter] Ordnung:

$$(2) \qquad F(z x_1 x_2 x_3 p_1 p_2 p_3) = 0,$$

die man aus den Gleichungen (1) und

$$p_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad p_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3} - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$$

durch Elimination von λ, μ, ν erhält. Eine Bedingung, damit umgekehrt die (nicht lineare) Differentialgleichung (2) eine vollständige Lösung besitze, die aus zwei Gleichungen, wie (1) besteht, kann man in der Form angeben, dass die Gleichung (2), falls z, x_1, x_2, x_3 als beliebige Constanten, dagegen p_1, p_2, p_3 als Coordinaten der Punkte eines gewöhnlichen Raumes interpretirt werden, eine Linienfläche in diesem Raume darstellen muss. Die Bemerkung überhaupt, dass eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer beliebigen Anzahl von unabhängigen Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ und einer unbekannten Function z unter Umständen eine vollständige Lösung besitzen kann, die durch mehrere Gleichungen zwischen $z, x_1, \dots x_n$ und n willkürlichen Constanten definirt ist, rührt von Lie her (Gött. Nachr. 1872. No. 25, cf. F. d. M. IV. 1872. p. 164), der auch einen Weg zur Ermittelung einer solchen Lösung derartiger partieller Differentialgleichungen (l. c.) angegeben hat. Diese Art von Differentialgleichungen wird in gegenwärtiger Abhandlung einer eingehenden Behandlung unterworfen unter Beschränkung auf eine ausführliche Darstellung für die Fälle von drei und vier Variabeln, namentlich aber für den Anfangs näher angegebenen Fall. Es gestatten aber, wie nur angeführt wird, die auf die Charakterisirung dieser Art von Differentialgleichungen hinauslaufenden Betrachtungen unmittelbar die Ausdehnung auf den Fall einer beliebigen Anzahl von unabhängigen Veränderlichen.

T.

A. V. Bäcklund. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Clebsch Ann. XV. 39-86. 1879.

In einer früheren Abhandlung (Clebsch Ann. XIII. 69-108,

cf. F. d. M. IX. 1877. 275f.) hat der Verfasser Systeme zwei partieller Differentialgleichungen 2ter Ordnung mit zwei unabhän gigen Variabeln, von denen jedes eine unendlichfach unendlich Schaar von Integralflächen besitzt, untersucht. Das allgemeine System zweier partieller Differentialgleichungen 2ter Ordnung m zwei unabhängigen Variabeln und mit gemeinsamen Integra flächen, deren Elemente ($zxypqrst$) alle gemeinsamen Element ($z\,x\,y\,p\,q\,r\,s\,t$) der Gleichungen umfassen, hat nur ∞^4 Integra flächen. Es sind dies zwei verschiedene Arten von Paaren vo Gleichungen 2ter Ordnung, die Integralflächen zu einer „grös möglichen“ Zahl (d. h. die Elemente der Integrale umfasse sämmtliche Elemente des Gleichungspaares) gemein haben. D man zu diesen allgemeineren Gleichungspaaren auch durch eine Satz in der schon citirten Abhandlung kommt, so wird zunächst dieser ausführlich erörtert. Dann folgt eine Untersuchung de jenigen Vereinfachung des Integrationsproblems einer Gleichun 2ter Ordnung, welche sich (analog den Untersuchungen Lie's fü Gleichungen 1ter Ordnung) darbietet, wenn die Gleichung eine in finitesimale Berührungstransformation in sich selbst gestattet, un diese Transformation von vornherein bekannt ist. Gestattet di Gleichung zwei bekannte permutable Transformationen diese Art, so findet das Problem ihrer Lösung seine Erledigun durch eine lineare partielle Differentialgleichung 2ter Ordnung mi ebenfalls nur zwei unabhängigen Variabeln (cf. Clebsch Ann. IX 318-320).

Der übrige Theil der Arbeit behandelt dann den Fall drei unabhängiger Variabeln und zwar solche Gleichungspaare, di Integral M_3 zu einer grösstmöglichen Zahl gemein haben und schliesslich wird auf die Erweiterung der Resultate für de Fall einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variabeln eingegangen

T.

S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen I.
Clebsch Ann. XVI. 441-529.

Dieser erste Theil enthält eine ausführliche Darlegung der

enigen Untersuchungen des Herrn Verfassers, deren Resultate r bereits im Jahre 1874 in den Gött. Nachr. (No. 22) resumirt hat, und über die in diesem Jahrbuch VI. 93 ff. berichtet worden ist.

Vgl. auch Arch. f. Math. og Nat. I. 19-58, 152-202; III. 13-165, 375-460 und IV. 232-261 und F. d. M. VIII. 1876. 212, X. 1878. 258 und 260, XI. 1879. 258. T.

S. Lie. Resumé einer Integrationstheorie. Christ. Verh. 1880. 1-4.

Es existirt ein allgemeiner Zusammenhang zwischen der Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichung 1ter Ordnung mit einer unbekannten Function und der Theorie der simultanen partiellen Differentialgleichungen, die Darboux betrachtet hat, welche ein gemeinsames Integral mit einer oder mehreren willkürlichen Functionen besitzen.

Beispiel I. Vorgelegt seien zwei Gleichungen 2ter Ordnung

$$F(xyzpqrst) = 0, \quad \Phi = 0,$$

die ein gemeinsames Integral mit einer willkürlichen Function besitzen. Wir setzen

$$\frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial U}{\partial z} + r\frac{\partial U}{\partial p} + s\frac{\partial U}{\partial q} = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} + q\frac{\partial U}{\partial z} + s\frac{\partial U}{\partial p} + t\frac{\partial U}{\partial q} = 0,$$

eliminiren r, s, t zwischen diesen beiden Gleichungen zusammen mit $F = 0$, $\Phi = 0$ und bilden so die partielle Differentialgleichung 1ter Ordnung

$$\Omega\left(x\,y\,z\,p\,q\,\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{\partial U}{\partial p}\,\frac{\partial U}{\partial q}\right) = 0.$$

Die Integration des simultanen Systems $F = 0$, $\Phi = 0$ reducirt sich auf diejenige von $\Omega = 0$. Der Umstand, dass $\Omega = 0$ Charakteristiken besitzt, zeigt, dass das simultane System ebenfalls solche besitzt, was bekanntlich mit Levy's Untersuchungen übereinstimmt.

Beispiel 2. Gegeben seien drei Gleichungen

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

zwischen

$$x, y, z, z_1, p, p_1, q, q_1$$

und die Existenz eines gemeinsamen Integrals mit einer willkürlichen Function vorausgesetzt.. Wir setzen

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} p + \frac{\partial U}{\partial z_1} p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} q + \frac{\partial U}{\partial z_1} q_1 = 0$$

und bilden durch Elimination von p, p_1, q, q_1 die Gleichung 1ter Ordnung

$$\Omega\left(x y z z_1 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z_1}\right) = 0,$$

deren Integration mit derjenigen des simultanen Systems äquivalent ist.

In entsprechender Weise reducirt sich die Integration eines simultanen Systems von hinlänglich vielen partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung auf die Integration eines Systems von Gleichungen 1ter Ordnung mit einer unbekannten Function. Dieser merkwürdige Zusammenhang tritt am schärfsten hervor, wenn man die vom Verfasser herrührende Verallgemeinerung des Begriffs der vollständigen Lösung von Gleichungen 1ter Ordnung zu Grunde legt. L.

W. Ermakoff. Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Bedingungen der Integrabilität in endlicher Form. Kiew. Nachr. 1880. (Russisch.)

W. Ermakoff. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei Variabeln. Kiew. Nachr. 1880. (Russisch.)

Beide Aufsätze sind den Universitätsvorlesungen des Verfassers entnommen. Im ersten werden einige specielle Formen der linearen Differentialgleichungen betrachtet, welche unter gewissen Voraussetzungen sich in endlicher Form integriren lassen.

Die zweite Arbeit enthält einige Aufgaben für die Bestimmung der willkürlichen Functionen in den allgemeinen Integralen partieller Differentialgleichungen unter der Bedingung, dass die durch das Integral repräsentirte Fläche durch gegebene Curven gehe. P.

Worms de Romilly. Note sur certaines équations différentielles obtenues par l'élimination de deux fonctions arbitraires. Bull. S. M. F. VIII. 64-73.

Damit man für eine Function z zweier willkürlicher Functionen F_1 und F_2 von φ_1 und φ_2, die wiederum von x und y abhängen (wobei man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, F_1 und F_2 nur von φ_1 resp. φ_2 abhängen zu lassen braucht), eine von den willkürlichen Functionen F_1 und F_2 freie partielle Differentialgleichung (2ter Ordnung) aufstellen kann, muss diese Function z so beschaffen sein, dass man im Stande ist, zwei Functionen, die eine von F_1, die andere von F_2 allein abhängig, anzugeben, deren Summe sich als Function von z allein darstellen lässt. Ausserdem wird gezeigt, wie man in diesem Falle von der Differentialgleichung zum Integral zurückkehren kann. T.

F. G. Teixeira. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires du deuxième ordre. Teixeira J. II. (Portugiesisch.)

Der Verfasser will in dieser Arbeit eine Methode zur Integration der Gleichung

$$(1) \qquad Ar+Bs+Ct+D=0$$

geben, wenn sie ein intermediäres Integral mit einer willkürlichen Function von x und y hat, und zugleich die Bedingungen für die Existenz eines solchen Integrales aufstellen. Dies Integral sei

$$(2) \qquad u=\varphi(x,y)=f(x,y,z,p,q).$$

Eliminirt man drei der sechs Grössen z, p, q, r, s, t aus den Glei-

chungen (1) und (2) und denen, die sich durch Derivation von (2) nach x und y ergeben, so verschwinden die andern drei, wenn gewisse drei Gleichungen erfüllt werden, die in der Arbeit aufgestellt werden. Die erste von ihnen giebt

$$\frac{\partial t}{\partial p} = \Omega \frac{\partial t}{\partial q}, \quad C\Omega^2 - B\Omega + A = 0.$$

Die beiden anderen geben die Bedingungen für die Existenz des intermediären Integrals. Die vorstehende Gleichung bestimmt die Function f von (2), während die Gleichung, die sich aus der Elimination von z, p, q, r, s, t ergiebt und die von der Form

$$\Psi\left(x, y, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0$$

ist, die linke Seite von (2) bestimmt. Es werden dann noch die Fälle untersucht, in denen an Stelle zweier Bedingungsgleichungen nur eine zu betrachten ist. Tx. (O.)

P. Appell. Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles. C. R. XC. 296-299, 731-735.

P. Appell. Sur la série $F_3(\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma x y)$. C. R. XC. 977-980.

Es werden vier Reihen F_1, F_2, F_3, F_4 aufgestellt, welche eine Verallgemeinerung der hypergeometrischen Reihen auf zwei Variable darstellen, und von denen eine jede zwei simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen 2ter Ordnung genügt. Die Form dieser Gleichungen ist

$$(1) \qquad r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z, \quad t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z,$$

wo die a und b gewisse Functionen von x und y und p, q, r, s, t die Derivirten erster und zweiter Ordnung von z sind. Das System (1) bildet nun für sich den Gegenstand einer allgemeinen Untersuchung. In der Voraussetzung, dass $1 - a_1 b_1$ nicht identisch Null ist und die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, im Uebrigen aber die a und b beliebige Functionen von x, y sind, wird für die Lösungen von (1) eine Reihe von Sätzen entwickelt, die den

Sätzen des Herrn Fuchs über gewöhnliche Differentialgleichungen analog sind. Als singuläres Werthepaar (ξ, η) erscheint hier ein solches, für welches $1-a_1 b_1$ verschwindet, oder die Coefficienten a, b nicht in convergente Reihen von der Form

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_{m,n}(x-\xi)^m (y-\eta)^n$$

entwickelbar sind. Vier Integrale z_1, z_2, z_3, z_4 von (1), für welche die Determinante

$$D = \Sigma \pm z_1 p_2 q_3 s_4$$

von Null verschieden ist, bilden ein Fundamentalsystem, und jede beliebige Lösung ist eine lineare Function mit constanten Coefficienten der Elemente eines Fundamentalsystems. D genügt einer Relation von der Form

$$d \log D = A dx + B dy,$$

wo A und B in einfacher Weise aus den Coefficienten a, b zusammengesetzt sind. Für die besonderen Differentialgleichungen, denen die F genügen, werden die Fundamentalsysteme aufgestellt. Die F lassen sich ferner durch bestimmte Doppelintegrale ausdrücken, ähnlich den bestimmten einfachen Integralen, durch welche die hypergeometrischen Reihen dargestellt werden. (Vgl. die Arbeit des Herrn Picard, „Sur une extension etc.“ auf p. 328.). Daran schliesst sich die Behandlung mehrerer Fragen analog denen, die in der Theorie der hypergeometrischen Reihen auftreten, deren wichtigste Eigenschaften auch für die verallgemeinerten Functionen Geltung haben. Hr.

P. Appell. Sur quelques formules relatives aux fonctions hypergéométriques de deux variables. C. R. XCI. 364-366.

Während die früher (C. R. XC. 296, 731, 977, siehe das vorstehende Referat) gegebenen Formeln die hypergeometrischen Functionen zweier Variabeln nur für diejenigen Werthe von x und y definiren, für welche die Reihe convergirt, werden hier, ähnlich wie für die Gauss'sche Reihe, mit Hülfe von Differentialgleichungen Formeln abgeleitet, welche diese Functionen für alle Werthe der Variabeln definiren. M.

Wolstenholme. A form of the equations determining the foci and directrices of a conic whose equation in Cartesian coordinates is given. Proc. L. M. S. XI. 102-104.

Ist $u = 0$ die auf ein Coordinatensystem mit dem Axenwinkel ω bezogene rationale Gleichung eines Kegelschnittes, so dient zur Bestimmung ihrer (reellen, wie imaginären) Brennpunkte das System einfacher Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \sqrt{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sqrt{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sqrt{u}}{\partial x \partial y} \sec \omega;$$

die dem Brennpunkte x, y entsprechende Directrix hat dann die Gleichung:

$$(X-x)\frac{\partial \sqrt{u}}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial \sqrt{u}}{\partial y} + \sqrt{u} = 0.$$

T.

S. Earnshaw. On the integral of Laplace's equation in finite terms. Rep. Brit. Ass. 1880.

Die Gleichung, um die es sich handelt, heisst:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Herr Earnshaw stellt folgende Sätze auf:

1) Wenn von O, dem Coordinatenanfangspunkt, zwei Linien OA und OB unter rechten Winkeln zu einander gezogen werden und wenn die Projectionen von OP (die Coordinaten von P sind x, y, z) auf OA und OB mit ξ und η bezeichnet werden, so ist das allgemeine Glied der Laplace'schen Gleichung:

$$u = e^{a\xi}(A \cos a\eta + B \sin a\eta).$$

2) Wenn OC rechtwinklig zu OA und OB gezogen wird, und ζ die Länge der Projection von OP auf OC ist, so gilt, welches auch die Lage von OA, OB, OC ist, stets die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0.$$

3) Transformirt man die Laplace'sche Gleichung durch die Substitution

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta,$$

so ist unter diesen Voraussetzungen die transformirte Gleichung

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \operatorname{tang}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} + \sec^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

und diese hat das allgemeine Integral

$$u = F(r\cos\theta\, e^{i\varphi}) + \frac{1}{r}f(r\sec\theta\, e^{-i\varphi}),$$

wo $i = \sqrt{-1}$, F und f willkürliche Functionen sind.

Csy. (O.)

Capitel 7.

Variationsrechnung.

P. du Bois-Reymond. Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung. Clebsch Ann. XV. 282-315, 564-576. 1879.

In diesen beiden Abhandlungen versucht der Verfasser eine Kritik der unter dem Namen Variationsrechnung bekannten Methode vom Standpunkte der strengen Functionentheorie aus und die durch diese Kritik als nothwendig sich erweisende ausreichende Begründung der Schlüsse, welche die Methode anwendet.

Um mit der Angabe der Probleme, welche die Variationsrechnung im günstigsten Falle lösen kann, zu beginnen, so ist (II. Abh. Art. 2) zu betonen, dass sie zunächst nur Extrema (Maxima vel Minima) inter propinquas (functiones) und nicht inter omnes liefert. Es verlangt eine besondere Untersuchung, welcher Art im angegebenen Sinne das Extremum sei. Hiermit sind nicht sowohl Fälle gemeint, wie das mehrfache Minimum kürzester Linien auf Oberflächen, z. B. das mindestens zweifache auf geschlossenen Oberflächen, als vielmehr die Fälle, bei denen

die Functionsclasse eines Extremum inter omnes oder eines Extremum Extremorum nicht fähig ist, wie die Function e^{x^3-x} zwar ein Maximum und ein Minimum, aber keinen grössten und (im Endlichen) keinen kleinsten Werth besitzt. Daher fragt sich, wie allgemein die Lösungen der Variationsprobleme sind. Dies musste besprochen werden, weil die Variationsprobleme im Allgemeinen auf Extrema inter omnes gerichtet sind. Der Verfasser knüpft seine Untersuchung an das Problem der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten, das er unter so allgemeinen Voraussetzungen zu lösen trachtet, als es die Methode nur immer zulässt.

Zuerst musste festgestellt werden, was unter Länge einer Linie zu verstehen sei, und welche Functionen als analytische Vertreterinnen von solchen Linien oder genauer geometrischen Oertern anzusehen seien, die mit dem Begriff Länge in Beziehung gesetzt werden können. Diese Untersuchung des Rectificationsbegriffs findet sich Abh. I. Art. 2 und 3. Nunmehr wird die eigentliche Methode der Variationsrechnung verfolgt. Voran ist die Erklärung der Variation selbst zu schicken. Sie ist eine Function, deren Allgemeinheit der zu variirenden Functionsclasse entsprechen muss (Abh. I. Art. 1 und Abh. II. Art. 3). Sodann sind die Operationen der Lagrange'schen Methode Schritt für Schritt auf ihre Zulässigkeit zu prüfen. Es zeigt sich, dass jeder Schritt eine Beschränkung der Functionsclasse verlangt, in der das Minimum zu suchen ist. Doch gelingt es, durch Betrachtungen, die auch auf andere Variationsprobleme anwendbar sind, diese Beschränkungen zu beseitigen, bis man zu den durch die partielle Integration auferlegten Beschränkungen gelangt (I. Abh. Art. 7). Von hier ab kann die Allgemeinheit nicht mehr gewahrt werden, sondern die Methode beschränkt die Voraussetzungen des Problems sehr bedeutend, wenn auch für das Problem der kürzesten Linie die Beschränkungen durch ein der Methode jedoch nicht angehöriges Verfahren sich aufheben lassen (I. Abh. Art. 14 etc.). Falls aber ein Integral

$$\int V(x, y, y', \dots y^{(n)})\, dx$$

zu variiren ist, so zeigt sich, dass die Extremalfunction y und

die Functionen der Classe, aus der sie ausgesucht werden soll, sammt ihren $2n$ ersten Differentialquotienten stetig sein müssen.

Das Problem der kürzesten Linie wird in den letzten Artikeln der I. Abhandlung zu Ende geführt, bei welcher Gelegenheit neue Beweise für die isoperimetrische Regel mitgetheilt werden.

Vorher jedoch lag dem Verfasser die Aufgabe vor, den wichtigsten, weil zu den Differentialgleichungen des Problems führenden Schluss der Methode zu untersuchen, der aus $\int \delta y\, U dx$ folgert $U = 0$. Diese Untersuchung ergiebt neue Sätze der Functionentheorie. Es sind diese:

„Wenn das Integral $\int_a^b dx\, \lambda(x) f(x)$ Null ist für eine nicht durchaus beliebige, sondern dahin beschränkte Function $\lambda(x)$, dass ihr Differentialquotient stetig sei, so folgt hieraus in Betreff der Function $f(x)$ nur, dass ihr Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx, \qquad a \leqq \alpha < \beta \leqq b,$$

Null ist. Denn umgekehrt wird gezeigt, dass $\int_a^b dx\, \lambda(x) f(x)$ stets Null ist, falls $\lambda(x)$ integrirbar und jenes $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$ Null ist.“

Wird also aus

$$\int_a^b dx\, \lambda(x) f(x) = 0$$

geschlossen $f(x) = 0$, so liegt hierin eine Beschränkung, welche der Methode zu Liebe eingeführt wird.

Das Ziel der II. Abhandlung ist, an die Stelle der partiellen Integration der Lagrange'schen Methode eine für die Wahrung der allgemeinen Voraussetzungen minder vorgreifliche Transformation zu setzen. Schon in der I. Abhandlung wurde (Art. 14) die Frage erörtert, weshalb der Differentialquotient der Variation nicht die Rolle einer vollkommen willkürlichen Variation spielen

dürfe. Wenn die Variation an den Grenzen verschwindet, ist er eben der Bedingung

$$\int_a^b \frac{d\delta y}{dx}\,dx = 0$$

unterworfen. Dies führt darauf, die Beschränkungen der Differentialquotienten der Variation durch deren Werthe an den Grenzen als isoperimetrische Beschränkungen einzuführen. Dies ermöglicht, die Variation $\delta\int V dx$ statt in die Form $\int \delta y\, U dx$ in diese: $\int \delta y^{(n)} W dx$ zu bringen, eben unter Einführung jener isoperimetrischen Beschränkungen der Variation $\delta y^{(n)}$. Es setzt diese neue Transformation indessen den in der I. Abh. Art. 17 und in der II. Abh. Art. 9 gegebenen Beweis für die isoperimetrische Regel voraus, der vor den Uebrigen den Vorzug hat, dass er keine Beschränkungen den Variationen und ihren Coefficienten unter den Integralen vorschreibt.

Auf diese Weise gelang es dem Verfasser, die Beschränkungen, welche die Lagrange'sche Methode der Function y auferlegt, somit auch die der Functionenclasse, in der das Extremum zu suchen ist, fast auf das nothwendige Mass zurückzuführen, indem nicht $y^{(2n)}$, sondern nur $y^{(n)}$ stetig zu sein braucht. Die Voraussetzungen des Problems würden im Allgemeinen nur die Integrirbarkeit von $y^{(n)}$ verlangen. B. R.

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

R. Lipschitz. Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires. C. R. XCI. 619-621, 660-664.

Grassmann hat gezeigt, wie man durch Einführung der ursprünglichen Einheiten und der zwischen ihnen geltenden Multiplicationsgesetze Transformationsaufgaben an Gleichungen in besonders einfacher Weise lösen kann. Die Ausrechnung des symbolischen Resultats unter Anwendung jener Multiplicationsgesetze bestätigt dann die Richtigkeit der Rechnung. Herr Lipschitz schlägt den entgegengesetzten Weg ein, indem er in eine Transformationsaufgabe solche Einheiten einführt, ohne über ihre Eigenschaften und Multiplicationsgesetze Voraussetzungen zu machen. Durch Lösung der Aufgabe auf gewöhnlichem analytischen Wege ergeben sich dann als Resultate jene Beziehungen zwischen den Einheiten, welche beim ersten Verfahren schon vorausgesetzt wurden. Herr Lipschitz macht dabei einen Umweg, indem er zuerst gewisse Symbole i einführt, welche theils Einheitsproducte theils Summen von solchen sind. So ist in Grassmann'scher Bezeichnungsweise

$$i_{1234} = (e_1 e_2)(e_3 e_4) + (e_1 e_3)(e_4 e_2) + (e_1 e_4)(e_2 e_3); \quad i_{12} = (e_1 e_2).$$

Später stellt Herr Lipschitz diese Symbole i als Producte von neuen Symbolen k dar, welche jedoch mit den Grassmann'schen Einheiten e identisch sind. Diesen Zusammenhang hat Herr Lipschitz übersehen. Dass seine „Primitivzeichen" nur in binären Verbindungen erscheinen, liegt in der Natur der den Ausgangspunkt bildenden speciellen algebraischen Aufgabe, welche diese Zeichen gar nicht anders als in solchen Verbindungen liefern kann. Die Identität der Grössen k und e wird weiter durch ihren Zusammenhang mit den Quaternionen erwiesen. Die Grassmann-schen allgemeinen Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad e_r e_s = -e_s e_r; \quad e_1 e_1 = e_2 e_2 = \cdots = e_n e_n$$

bedürfen der Ergänzung durch die Systeme

$$\text{(b)} \qquad e_1 e_2 = e_3; \quad e_2 e_3 = e_1; \quad e_3 e_1 = e_2;$$

$$\text{(c)} \qquad e_1^2 = -1,$$

um zu den Quaternionen zu führen. Mit den Gleichungen (a) und (c) decken sich nun offenbar die Gleichungen des Herrn Lipschitz:

$$\text{(d)} \qquad k_a k_b = -k_b k_a \quad \text{und} \quad k_a k_a = -1.$$

Die Gleichungen (b) sind, wenn es sich um Rechnungsregeln für Symbole mit beliebig vielen Indices $i_{abc\ldots}$ handelt, allerdings entbehrlich, aber beim Uebergang zu den auf drei Indices sich beschränkenden Quaternionen bilden sie die nothwendige Ergänzung der Gleichungen (d). Zu bemerken ist noch, dass in den ersten Gleichungssystemen der Abhandlung jedes r^{te} Glied der r^{ten} Gleichung einer Ergänzung durch den Factor λ_{rr} bedarf.

Schg.

Duport. Sur un mode particulier de représentation des imaginaires. Ann. de l'Éc. N. (2) IX. 301-362.

Die eigenthümliche Darstellungsweise des imaginären Punktes durch eine Gerade ist folgende: Durch den imaginären Punkt werden die beiden Geraden gelegt, deren Winkelcoefficienten gleich $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ sind; die reellen Punkte dieser Geraden seien A und A'; im Punkte A wird eine Senkrechte errichtet,

welche die Ebene $z = -1$ im Punkte B trifft; alsdann wird die Gerade BB' als Repräsentant des imaginären Punktes angesehen. Der Herr Verfasser beschäftigt sich nun im ersten Theile seiner Arbeit mit der Darstellung der geraden Linie und der verschiedenen geometrischen Elemente, wie dem Abstand zweier Punkte, dem Winkel zwischen zwei Geraden, u. ä.; hierauf wendet er diese Elemente auf die Darstellung einer Curve an. Der zweite Theil enthält das Studium der Darstellung der Kegelschnitte und einiger anderen Curven. M.

F. Casorati. Il calcolo delle differenze finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi a sussidio principalmente delle odierne ricerche basate sulla variabilità complessa. Brioschi Ann. (2) X. 10-43.

Die Stelle der endlichen Differenzen nehmen hier die Incremente ein, welche die Functionen einer complexen Variabeln nach je einem Umlauf des durch sie dargestellten Punktes x um einen festen Punkt x, innerhalb eines festen concentrischen Kreisrings (corona), also für endliche Grenzen des Moduls, gewinnen. Bei dieser Betrachtung gehen die bekannten Sätze über endliche Differenzen in Sätze über die stetige Variation von Functionen von Complexen über. Es werden zuerst die Elemente der endlichen Differentiation und Integration entwickelt, wo die monotropen Functionen die Stelle der Constanten einnehmen. So stellt sich z. B. das vollständige Integral einer Differenzengleichung n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten als die Summe der mit willkürlichen monotropen Functionen multiplicirten, die Gleichung speciell erfüllenden n Exponentialgrössen (im symbolischen Sinne) dar. Das Kriterium der Existenz einer linearen Relation zwischen n Functionen, welches bekannter Weise darin besteht, dass die Determinante der Functionen und ihrer Differenzen bis zur $(n-1)^{ten}$ Ordnung identisch $= 0$ ist, verwandelt sich hier in das analoge, wo nur die Differenzen durch die veränderten Werthe vertreten werden. Anwendung wird gemacht auf die algebraischen Gleichungen mit monotropen Coefficienten,

auf die durch lineare Differentialgleichungen mit monotropen Coefficienten bestimmten Functionen, desgleichen für polytrope Coefficienten, auf periodische Functionen, auf lineare Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten und auf simultane Periodicität bezüglich auf mehrere unabhängige Variabeln.

H.

J. Thomae. Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. Halle. Nebert.

Die Functionentheorie wird in den meisten Fällen nach Cauchy mit Hülfe einiger wenigen, sehr allgemein gehaltenen Definitionen aufgebaut auf der Darstellung der Function durch ein über die Begrenzung des Functionsbereiches ausgedehntes Integral. Hieraus entnimmt man die Eigenschaften und analytischen Darstellungen der Function. Die weitere Consequenz dieser Behandlung bildet das von Riemann aufgestellte Dirichlet'sche Princip, welches allgemein die nothwendigen und hinreichenden Elemente zur Bestimmung einer Function angiebt. Herr Weierstrass ist wohl der Erste, welcher dieser Behandlung schon seit längerer Zeit in seinen Abhandlungen (zuerst „Ueber die Theorie der analytischen Facultäten.“ Crelle J. LI. p. 1). und Vorlesungen die consequente Durchführung einer elementaren Theorie der Functionen gegenübergestellt hat, die von dem „Functionselement“ d. h. der für ein bestimmtes Bereich aufgestellten Potenzreihe ausgehend, das Gebiet der Function analytisch erweitert und so zu den Eigenschaften und verschiedenen Ausdrücken der Function gelangt. Da indess keine zusammenhängende Darstellung dieser Theorie existirt, so wird man es dem Verfasser nur Dank wissen, dass er auf eigene Hand eine derartige Bearbeitung der Elemente der Functionentheorie unternommen hat. Dieselbe beginnt mit der Entwickelung des Begriffs der Zahl und der Darstellung der Rechnungsoperationen mit reellen und complexen Zahlen. Hieran schliesst sich die Untersuchung unendlicher Zahlenfolgen, aus welcher die Theorie der Convergenz von Reihen und Producten folgt. Alsdann wird der

Begriff der allgemeinen Function als einer Zuordnung und die Bedingungen der Stetigkeit für reelle und complexe Veränderliche entwickelt. Es folgt die Betrachtung der ganzen Function, der binomische Lehrsatz für ganze Potenzen und eine Untersuchung über die Potenzreihen und den Charakter der durch sie dargestellten Functionen. Diesem ersten allgemeineren Theil folgt eine eingehende Behandlung der einzelnen elementaren Functionen, deren Functionselement aus einer Functionalgleichung entnommen, und deren Verlauf durch die Riemann'sche Fläche veranschaulicht wird. Zur Behandlung kommen die Exponentialfunction und die trigonometrischen Reihen, der Logarithmus und die logarithmische Reihe, die allgemeine Potenz und das allgemeine Binomialtheorem. Die Darstellung des letzteren gestaltet sich in dieser Zusammenstellung besonders einfach gegenüber der ursprünglichen, auch von Herrn Lipschitz in seinem „Lehrbuch der Analysis" reproducirten Behandlung von Abel. Alsdann folgen die rationalen Functionen, die Partialbrüche, die Facultät und die Darstellung ganzer transcendenter Functionen mit unendlich vielen Nullstellen (das letztere nach Weierstrass), endlich die algebraischen Functionen und die Umkehrung der Reihen. Hieran schliessen sich schärfere Convergenzkriterien und einige allgemeine, functionentheoretische Sätze, und als letzter Abschnitt eine kurze Theorie der Thetafunctionen und der elliptischen Functionen.

H. St.

S. Pincherle. Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. C. Weierstrass. Battaglini G. XVIII. 178-254, 317-357.

Die Principien, auf denen Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen die Theorie der analytischen Functionen aufbaut, sind in Deutschland durch verschiedene Arbeiten seiner Schüler bekannt geworden; die vorliegende Abhandlung soll ihnen auch in Italien Verbreitung verschaffen. Derselben wurden eine Vorlesung des Wintersemesters 1877-78, die der Herr Verfasser in Berlin

gehört, und mehrere Hefte, die von Anderen nach früheren Vorlesungen ausgearbeitet waren, zu Grunde gelegt. Es wird der Leser soweit in die neuen Begriffe eingeführt, dass er die wichtige Abhandlung von Weierstrass: „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen“, Berl. Abh. 1876, 11-60, zu studiren im Stande ist. Der erste Abschnitt: „Die Grundbegriffe der Arithmetik“, beginnt mit den Zahlen, die nur aus einer fundamentalen Einheit gebildet werden, führt dann in die Grundbegriffe der complexen Zahlen ein, die aus zwei fundamentalen Einheiten zusammengesetzt sind, und schliesst mit den unendlichen Summen und Producten. Im zweiten Abschnitt werden einige Theoreme über Grössen im Allgemeinen, über einfach und mehrfach unendliche Mannigfaltigkeiten gegeben. Der dritte bringt den Begriff der Function und deren Ableitung, Sätze über obere und untere Grenzen einer Function und einige historische Notizen über das Wort Function. Abschnitt IV.: „Die rationalen Functionen und die Potenzreihen“ beginnt mit dem Begriff einer rationalen Function; darauf folgen die Summen von rationalen Functionen, dann die Ableitungen von Potenzreihen; der allgemeine Begriff einer analytischen Function macht den Schluss der Abhandlung. M.

S. Pincherle. Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome. Battaglini G. XVIII. 92-136.

Das Problem, welches in dem ersten Abschnitte der vorliegenden Abhandlung untersucht wird, ist folgendes: „Existiren eindeutige analytische Functionen $\varphi(x)$, die den Charakter einer rationalen Function haben für alle Werthe der Veränderlichen, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl singulärer Stellen, und welche der Gleichung

$$\varphi(x) = \varphi(\omega x)$$

genügen, wo ω eine Constante ist?“ Es ergiebt sich für derartige Functionen, dass sie zu singulären Werthen nur die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ haben können, dass ferner ihr Multiplicator ω nicht von der Form $e^{2\pi i r}$ sein kann, wo r eine reelle in-

commensurable Grösse ist, dass diese Functionen unendlich viele Multiplicatoren haben, die alle ganze positive oder negative Potenzen eines einzigen Multiplicators sind, dessen Modul >1 ist. Nach der Anzahl der Nullwerthe und Unendlichs innerhalb eines Elementarbereiches, der um $x=0$ mit ϱ^{h}, wo $\omega=\varrho e^{i\vartheta}$ $(\varrho>1)$, geschlagen ist, wird die Ordnung unserer Function bestimmt. Von derselben Natur, wie die Function $\varphi(x)$ ist die Function

$$\varphi_1(x) = x\frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Es lassen sich nun alle Functionen $\varphi(x)$ von irgend einer Ordnung p rational durch eine Function von der Ordnung 2 und der entsprechenden Function $\varphi_1(x)$ ausdrücken. Jede Function $\varphi(x)$ von der zweiten Ordnung genügt einer Differentialgleichung von der Form

$$x\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{R(\varphi)},$$

wo $R(\varphi)$ eine ganze rationale Function dritten oder vierten Grades von x bedeutet. Wir sehen, dass der Herr Verfasser auf diese Weise zu einer neuen Einführung in die Theorie der elliptischen Functionen gelangt. Die Bedeutung der hier betrachteten Classe von eindeutigen Functionen, zu denen die elliptischen gehören, wird nun durch die Theoreme des zweiten Abschnittes der vorliegenden Arbeit gezeigt. Ist $y=f(x)$ eine eindeutige Function, und legt man den Variabeln x drei Werthe x_1, x_2, x_3 bei, welche durch eine Gleichung von der Form

$$(1)\qquad a_0x_1x_2x_3+a_1x_2x_3+a_2x_1x_3+a'_1x_1+a'_2x_2+a'_3x_3+a'_0 = 0$$

erfüllt werden, und genügen die entsprechenden Werthe y_1, y_2, y_3 der Function einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades in Bezug auf y_1, y_2, y_3

$$F(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

so heisst diese Gleichung die „charakteristische“ Gleichung der Function $y=f(x)$ in Bezug auf die Gleichung (1). (Vergl. die frühere Arbeit des Herrn Verfassers: Sulle funzioni monodrome aventi un'equazione caratteristica, Rend. Ist. Lomb. (2) XII. 536-542; F. d. M. XI. 1879. 271.) Es ergiebt sich das Resultat,

dass alle eindeutigen Functionen, welche eine charakteristische Gleichung haben, sich durch eine lineare Transformation zurückführen lassen auf rationale Functionen $R(x)$, auf Functionen $\varphi(x)$, auf rationale Functionen einer Exponentialfunction $R(e^{ax})$ oder auf elliptische Functionen $\varphi(e^{ax})$, und dass die allgemeinsten Formen solcher Functionen die folgenden sind:

$$R(x),\quad \varphi\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right),\quad R\left(e^{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right),\quad \varphi\left(e^{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right),$$

wo R das Symbol einer rationalen Function und φ das der oben definirten elliptischen Function bedeutet. M.

C. Weierstrass. Zur Functionenlehre. Berl. Monatsber. 1880. 719-743.

Die hier mitgetheilten Untersuchungen betreffen einige bisher nicht beachtete, aber für die Functionenlehre wichtige Eigenthümlichkeiten solcher unendlicher Reihen, deren Glieder rationale Functionen einer Veränderlichen sind. Was den Convergenzbereich einer solchen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$ betrifft, so wird zunächst gezeigt, dass die Gesammtheit der Stellen a, in deren Nähe die Reihe gleichmässig convergirt, aus mehreren von einander getrennten Stücken $A_1, A_2, \ldots$ bestehen kann, deren Begrenzungen theilweise oder ganz zusammenfallen, und dass jedes derartige zusammenhängende Stück $A_1, A_2, \ldots$ der x-Ebene dadurch entstanden gedacht werden kann, dass man von einer Stelle a, in deren Nähe die Reihe für alle x mit der Bedingung $[x-a] \leqq \varrho$ gleichmässig convergirt, ausgehend, in ihrer Umgebung eine beliebige zweite, in deren Umgebung wieder eine dritte etc. willkürlich wählt. Setzt man dann voraus, dass die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$ in der Nähe jeder im Innern ihres Convergenzbereiches liegenden Stelle gleichmässig convergirt, so stellt die Reihe in jedem der oben definirten Stücke $A_1, \ldots$ im Allgemeinen einen eindeutigen Zweig einer monogenen analytischen Function von x und in besonderen Fällen eine solche Function vollständig dar.

Hieran knüpft der Herr Verfasser eine für die Functionenlehre insofern wichtige Frage, als ihre Beantwortung beweist, dass der Begriff einer monogenen Function einer complexen Veränderlichen mit dem Begriff einer durch arithmetische Grössenoperationen ausdrückbaren Abhängigkeit sich nicht vollständig deckt, wie Riemann (Diss. § 19, Schluss) behauptet hatte. Es ergiebt sich nämlich das Resultat: „Wenn der Convergenzbereich einer Reihe, deren Glieder rationale Functionen einer Veränderlichen x sind, in der Art in mehrere Stücke zerlegt werden kann, dass in der Nähe jeder im Innern eines solchen Stückes gelegenen Stelle die Reihe gleichmässig convergirt, so stellt dieselbe in jedem einzelnen Stücke einen einwerthigen Zweig einer monogenen Function von x dar, in verschiedenen Stücken aber nicht nothwendig Zweige einer und derselben Function.“ Am Schlusse giebt der Herr Verfasser ein Beispiel für monogene Functionen einer Veränderlichen, welche die Eigenthümlichkeit besitzen, dass in der Ebene der Veränderlichen diejenigen Stellen, für welche die Function nicht definirbar ist, nicht bloss einzelne Punkte sind, sondern auch Linien und Flächen bilden.

M.

C. Weierstrass. Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler. Berl. Monatsber. 1880. 707-711.

Für die Resultate, die Herr Weierstrass in seiner Abhandlung: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, Berl. Abh. 1876 (F. d. M. X. 1878. 282) veröffentlicht hat, ist der folgende von Herrn Mittag-Leffler (Svensk. Akad. Ofv. 1877) entwickelte Satz bedeutungsvoll: „Es seien gegeben 1) eine unendliche Reihe bestimmter Grössen: $a_1, a_2, a_3, \ldots$, unter denen keine zwei gleiche sich finden, und die der Bedingung $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ genügen; und 2) eine unendliche Reihe rationaler Functionen einer Veränderlichen (x) : $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., von denen $f_\nu(x)$ nur an der Stelle $(x = a_\nu)$ unendlich gross wird, und für $x = \infty$ verschwindet. Dann lässt sich stets eine ein-

deutige analytische Function $F(x)$ mit der einen wesentlichen singulären Stelle ∞ bilden, welche nur an den Stellen $a_1, a_2, a_3, \dots$ unendlich gross wird, und zwar so, dass für jeden bestimmten Werth von ν die Differenz $F(x) - f_\nu(x)$ an der Stelle $(x = a_\nu)$ einen endlichen Werth hat, und daher innerhalb einer gewissen Umgebung dieser Stelle $F(x)$ in der Form $f_\nu(x) + \mathfrak{P}(x - a_\nu)$ dargestellt werden kann." Nachdem Herr Weierstrass einen erheblich einfacheren Beweis für diesen Satz gegeben hat, gewinnt er aus ihm folgendes Resultat: „Es lässt sich also jede eindeutige analytische Function $F(x)$, für die im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle existirt, als eine Summe von rationalen Functionen der Veränderlichen x, $= \sum\limits_\nu F_\nu(x)$ dergestalt ausdrücken, dass jede dieser Functionen im Endlichen nur eine ∞-Stelle hat." Eine solche Darstellung war bisher nur für die rationalen und für einzelne transcendente Functionen einer Veränderlichen bekannt. Ferner ergeben sich aus den angeführten Sätzen wesentliche Resultate für den Ausdruck, den eine eindeutige analytische Function einer Veränderlichen x mit n wesentlich singulären Stellen $(c_1, \dots c_n)$ annimmt. Der in § 5 der genannten Abhandlung gegebene Ausdruck $\sum\limits_{\lambda=1}^{n} F_\lambda(x, c)$, der nur für den Fall bewiesen worden war, wo die Function $F(x)$ ausser wesentlich singuläre Stellen entweder gar nicht oder nur in endlicher Anzahl besitzt, wird nun als für jede solche Function gültig erwiesen. M.

G. Mittag-Leffler. Funktions teoretiska studier. En ny serieutwikling för funktioner af rationel karakter. Act. Soc. Fenn. XI.

Ein Referat dieser Arbeit in französischer Sprache befindet sich im Darboux Bull. (2) III. 275 in „Lettre à M. Hermite de M. Mittag-Leffler" (s. F. d. M. XI. 1879. p. 264). M. L.

C. Weierstrass. Untersuchungen über die $2r$-fach periodischen Functionen mit r Veränderlichen.
Borchardt J. IXC. 1-8.

Herr Weierstrass hat bereits im Jahre 1869 (Berl. Monatsber. s. F. d. M. II. 1870. p. 207) eine Reihe von Sätzen veröffentlicht, welche die Liouville'sche Theorie der eindeutigen doppeltperiodischen Functionen einer Veränderlichen auf die eindeutigen $2r$-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen ausdehnen. Diese Sätze werden hier nochmals in schärferer Fassung zusammengestellt und sollen in weiteren Mittheilungen bewiesen werden. Nachdem die von Herrn Weierstrass schon früher festgestellten Begriffe einer regulären, einer ausserwesentlich und einer wesentlich singulären Stelle einer Function für das Gebiet von mehreren Veränderlichen erweitert sind, wobei eine Unterscheidung von zwei verschiedenen Arten von ausserwesentlich singulären Stellen auftritt, werden die Fundamentalsätze der Theorie der vielfach periodischen Functionen folgendermassen ausgesprochen:

1) Es werden $2r$-fach periodische Functionen von r Veränderlichen $u_1, u_2, \dots u_r$ betrachtet, unter der Voraussetzung, dass dieselben eindeutige Functionen und im Endlichen an keiner Stelle wesentlich singulär sind. Zu einer Classe gehörig heissen alle derartige Functionen, welche dieselben Periodensysteme besitzen. Für jede Classe theilen sich die Werthsysteme der u_i in Gruppen, derart dass zwei Stellen u_i' und u_i'' zu derselben oder zu verschiedenen Gruppen gehören, je nachdem die Differenzen $u_i''-u_i'$ ein Periodensystem der Functionen der Classe bilden oder nicht.

2) Zu jeder beliebigen $2r$-fach periodischen Function $f_1(u_i)$ der obigen Art lassen sich in mannigfacher Weise $r-1$ andere Functionen $f_2, \dots f_r$ bestimmen, derart, dass die Functionen $f_1, f_2, \dots f_r$ alle dieselben Periodensysteme besitzen und von einander unabhängig sind (d. h. dass ihre Functionaldeterminante nicht für beliebige Werthsysteme der u_i verschwindet); ein solches Functionensystem ist z. B.

$$f_1(u_i+c_i^{(1)}),\ f_1(u_i+c_i^{(2)}),\ \dots\ f_1(u_i+c_i^{(r)}).$$

3) Ist $f_1, f_2, \ldots f_r$ irgend ein System von r zu derselben Classe gehörigen, unabhängigen $2r$-fach periodischen Functionen, und setzt man

$$f_1(u_1 \ldots u_r) = s_1, \ldots f_r(u_1 \ldots u_r) = s_r,$$

so entsprechen jedem Werthsystem der Grössen $s_1, \ldots s_r$ im Allgemeinen (d. h. abgesehen von gewissen, particulären Werthsystemen $s_1, \ldots s_r$, die nur eine $(2r-2)$-fache Mannigfaltigkeit bilden) unendlich viele Stellen $(u_1, \ldots u_r)$, die weder zu den singulären Stellen der Functionen $f_1, \ldots f_r$ gehören, noch zu denen, für welche die Functionaldeterminante verschwindet. Dagegen ist die Zahl der zu einem Werthsystem $(s_1, \ldots s_r)$ gehörigen Gruppen endlich und hat für jedes Werthsystem der s denselben Werth m. Diese Zahl m heisst der Grad des Functionensystems $f_1, \ldots f_r$.

4) Ist $f(u_1, \ldots u_r)$ irgend eine $2r$-fach periodische Function, unter deren Periodensystemen sich auch alle Periodensysteme der Functionen $f_1, \ldots f_r$ finden, so besteht zwischen f und $f_1, \ldots f_r$ eine irreductibele Gleichung, deren Grad in Beziehung auf f gleich m oder ein Theiler von m ist.

5) Unter den $2r$-fach periodischen Functionen der Classe, zu welcher $f_1, \ldots f_r$ gehören, giebt es unzählige, die mit $f_1, \ldots f_r$ durch eine irreductibele Gleichung m^{ten} Grades zusammenhängen; ist f_{r+1} irgend eine derselben, so lässt sich jede Function $f(u_1, \ldots u_r)$ von der in No. 4 angegebenen Beschaffenheit rational durch die $r+1$ Functionen $f_1, f_2, \ldots f_{r+1}$ ausdrücken.

6) Zu der Classe der Functionen $f_1, \ldots f_{r+1}$ gehören auch alle Ableitungen derselben. Setzt man also $f = R(f_1, \ldots f_{r+1})$, so hat man auch

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = R_1(f_1, \ldots f_{r+1}), \cdots \frac{\partial f}{\partial u_r} = R_r(f_1, \ldots f_{r+1}),$$

wo $R, R_1, \ldots R_r$ rationale Functionen der f_i bedeuten. Durch Elimination der $f_1, \ldots f_{r+1}$ erhält man eine algebraische Gleichung zwischen f und seinen r Ableitungen und zugleich jede der Functionen $f_1, \ldots f_{r+1}$ als rationale Function derselben Grössen.

H. St.

E. SCHERING. Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen. Gött. Abh. XXVII.

Herr Weierstrass hat in seiner Abhandlung „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen“ (Berl. Abh. 1876. 11-60) die Aufgabe gelöst, alle eindeutigen Functionen einer Veränderlichen mit einer endlichen Anzahl von wesentlich singulären Stellen analytisch darzustellen. Die Grundlage der Lösung bildet ein Satz, der angiebt, wie man eine für alle complexen Werthe der Veränderlichen x eindeutige analytische Function bilden kann, welche in einer unbegrenzten Anzahl von Stellen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit zunehmendem Modul, die der Bedingung $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ genügen, unendlich gross von beliebig gegebenem endlichem Grade (also ausserwesentlich singulär) und nur für $x = \infty$ unendlich gross von unbegrenztem Grade (also wesentlich singulär) ist. Diesen Satz hat Herr Mittag-Leffler (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1877) benutzt, um eine solche Function $F(x)$ noch weiter dahin zu bestimmen, dass sie in der Umgebung jeder der gegebenen ausserwesentlich singulären Stellen a_ν sich von einer daselbst beliebig gegebenen rationalen Function $f_\nu(x)$, die nur an der Stelle $x = a_\nu$ unendlich gross wird (und für $x = \infty$ verschwindet), nur um eine Function unterscheidet, die innerhalb einer gewissen Umgebung der Stelle $x = a_\nu$ endlich bleibt, also durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a_\nu)$ mit ganzen positiven Potenzen dargestellt werden kann. Der Verfasser, dem Herr Mittag-Leffler seine Untersuchungen mitgetheilt hatte, giebt zu der hiermit gelösten Aufgabe noch neue andere Lösungen und für die Mittag-Leffler'schen Lösungen neue Beweise. Die complicirte Form der aufgestellten Ausdrücke erlaubt indess keinen Auszug des Inhalts. H. St.

W. DYCK. Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen. Clebsch Ann. XVII. 473-510.

Die Riemann'sche Fläche tritt unter zwei verschiedenen Gesichtspunkten in functionentheoretischen Betrachtungen auf. Sie dient entweder zur anschauungsmässigen Deutung gewisser Untersuchungen, die sich auf die Functionen einer complexen Veränderlichen beziehen, und erscheint dann von vorn herein definirt durch eine Gleichung $f(\eta, z) = 0$ [in der η die abhängige, z die unabhängige Variable bedeuten möge] oder sie ist durch geometrische Annahmen fertig gegeben und bildet nun umgekehrt den Ausgangspunkt functionentheoretischer Fragestellungen.

Die letztere Beziehung ist es, nach welcher die Riemann'sche Fläche in den Arbeiten von F. Klein vorzugsweise eingeführt ist (man sehe die Arbeiten von Klein in Clebsch Ann. IX. bis XV. und namentlich eine binnen Kurzem erscheinende Schrift „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale.“ Leipzig, Teubner 1882), und in welcher sie auch der hier zu besprechenden Abhandlung zu Grunde liegt.

Die Riemann'sche Fläche ist zunächst in der Form der „frei im Raume gelegenen Riemann'schen Fläche“ (vergl. Ann. XIV. 134) verwendet, d. h. sie erscheint als Gebietseintheilung einer geschlossenen Fläche vom Geschlechte p. Die einzelnen Gebiete entsprechen den Blättern einer über der z-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche in der gewöhnlichen Vorstellungsweise. Dabei ist in dieser letzteren der besseren Uebersicht wegen noch eine Trennung in Halbblätter vorgenommen durch einen Absonderungsschnitt, der in der z-Ebene durch alle Verzweigungsstellen gelegt ist und der jedes der darüber ausgebreiteten Blätter in einen „schraffirten“ und einen „nichtschraffirten“ Theil spaltet. Diese Spaltung überträgt sich auf die frei im Raume gelegene Fläche der Art, dass diese jetzt in abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Polygone getheilt erscheint. Den Verzweigungspunkten der über der z-Ebene ausgebreiteten Fläche entsprechen die Eckpunkte der Gebietseintheilung, in welchen die einzelnen Polygone nach Art und Multiplicität der betreffenden Verzweigung zusammenstossen.

Es handelt sich nun um die specielle von Klein (Clebsch

Ann. XIV. 460 ff.) eingeführte Classe der regulären Riemann'schen **Flächen**, welche den Galois'schen Resolventen $f(\eta, z) = 0$ (mit einem Parameter) entsprechen. Dem Umstande gemäss, dass jede Wurzel η_i einer solchen Resolvente sich rational durch jede andere η_k und (dazu auch) den Parameter z darstellt, ist die zugehörige Riemann'sche Fläche dadurch characterisirt, dass jedes der N Blätter dieser Fläche (N der Grad der Gleichung in η) genau so verzweigt ist, wie jedes andere Blatt, mit anderen Worten, dass die zugehörige Gebietseintheilung der frei im Raume gelegenen Fläche für jedes schraffirte (nichtschraffirte) Polygon dieselbe ist, wie für jedes andere schraffirte (nichtschraffirte) Polygon.

Die Gruppe der N Transformationen, durch welche eine Galois'sche Resolvente in sich übergeht (indem wir eine Wurzel η_i der Gleichung jeder anderen Wurzel η_k zuweisen) spricht sich geometrisch in einer Gruppe von Transformationen der Fläche in sich aus, vermöge deren ein schraffirtes Polygon in jedes andere schraffirte Polygon der Gebietseintheilung übergeführt wird. Ist nun eine reguläre Riemann'sche Fläche in geometrischer Definition durch Angabe der Verzweigung und Art der Zusammenschliessung der einzelnen Blätter vollständig gegeben [die Construction regulärer Riemann'scher Flächen aus den Daten der Blätterzahl und Verzweigung hat der Verfasser im ersten Theile seiner Inaugural-Dissertation („Ueber regulär verzweigte Riemann'sche Flächen etc.“ München 1879) behandelt, für welche die vorliegende Arbeit eine Weiterführung bildet], so fragt es sich: Wie lässt sich aus der geometrischen Definition der Fläche heraus die Gruppe G ihrer Transformationen in sich und weiter die Irrationalität J, welche der Fläche zukommt, erkennen? Es ist also die Zerlegung der Gruppe G in eine Reihenfolge von Untergruppen $G_1, G_2 \ldots G_n$, deren jede mit den Substitutionen der unmittelbar vorhergehenden Untergruppe vertauschbar ist, aus der geometrischen Definition der Gruppe zu erschliessen, und weiter die Reihe von „einfachen“ Gruppen $H_1, H_2 \ldots H_n$, durch deren successive Adjunction grade die Zerlegung der Gruppe G erreicht wird. Diese Zerlegung wird geometrisch durch eine Reihenfolge von Deformationen der ursprünglichen Fläche geleistet, in

welcher jeweils die Gruppen G_i und H_i wieder in Gestalt regulärer Riemann'scher Flächen erscheinen, und in welcher auch die gegenseitige Stellung dieser Gruppen, wie man sie nach allgemeinen gruppentheoretischen Gesichtspunkten unterscheidet, sich ausspricht. Setzt man nun die „einfachen" Irrationalitäten, welche den Flächen H_i entsprechen, als bekannt voraus (und diese sind für die behandelten Beispiele blosse Wurzelirrationalitäten), so liegt in der geometrischen Deformation der Fläche der bestimmt vorgezeichnete Weg, wie wir jene einfachen Irrationalitäten zur Irrationalität der Gesammtfläche zu verbinden haben, so dass unter dieser Voraussetzung eine Gleichung $f(\eta, z) = 0$, welche jener Fläche zukommt, in fertiger Form sich aufstellen lässt.

Eine 96-blättrige Fläche vom Geschlechte 3 dient als Beispiel der allgemeinen Formulirungen. Daran schliesst sich die Behandlung der regulären Flächen vom Geschlechte 1, welche sich durch das Transformationsproblem der elliptischen Functionen erledigt. Die Aufzählung der hierher gehörigen Flächen ist jedoch unvollständig. Die geometrische Definition der regulären Riemann'schen Flächen (wie sie in dieser Arbeit p. 477-478, und auch in der schon erwähnten Inauguraldissertation Theil I. p. 17 zu Grunde gelegt ist), geht von der beschränkenden Voraussetzung aus, dass die Flächen regulär-symmetrische sind, d. h. dass die oben angeführte Polygoneintheilung für die schraffirten und für die nicht schraffirten Polygone eine (im Sinne der analysis situs) symmetrische ist. Dies ist indess, wenn man von der Definition der regulären Riemann'schen Fläche als Galois'scher Resolvente $f(\eta, z) = 0$ ausgeht, durchaus nicht nothwendig. Der Verfasser hat diese Beschränkung in ihrer gruppentheoretischen Bedeutung in einer demnächst erscheinenden Arbeit (Gruppentheoretische Studien. Clebsch Ann. XX.) ausführlich erörtert. Die algebraische Bedeutung ist von Herrn Klein in der schon erwähnten Schrift („Ueber Riemann's Theorie etc." § 21) durch die Bemerkung gekennzeichnet, dass sich überhaupt alle Flächen, welche Symmetrie besitzen, als Gleichungen $f(\eta, z) = 0$ mit reellen Coefficienten darstellen lassen. Während

diese beschränkte Auffassung der regulären Riemann'schen Flächen auf die allgemeinen Erörterungen ohne Einfluss geblieben ist (weil hier keinerlei Gebrauch von Eigenschaften der Symmetrie gemacht ist), erscheinen in der Tabelle der Flächen $p = 1$ nur die regulär-symmetrischen Flächen; auf reguläre Flächen $p = 1$, die nicht symmetrisch sind, ist der Verfasser in der erwähnten Arbeit in Clebsch Ann. XX. eingegangen. Dk.

W. Dyck. Notiz über eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige „Normalcurve" vierter Ordnung. Clebsch Ann. XVII. 510-517.

Das Princip, dessen sich Herr Klein bei Aufstellung der Irrationalität einer 168-blättrigen regulären Riemann'schen Fläche vom Geschlechte 3 („Ueber die Transformation 7ter Ordnung der elliptischen Functionen." Clebsch Ann. XIV.) bedient hat, wird im vorstehenden Aufsatz auf den Fall der 96-blättrigen Fläche angewendet, welche in der soeben besprochenen Arbeit von anderen Gesichtspunkten und mit anderen Hülfsmitteln betrachtet worden ist. Es spielt dabei die Curve

$$\lambda^4 + \mu^4 + \nu^4 = 0,$$

welche durch 96 Collineationen in sich übergeht, die Rolle der „Normalcurve niedrigster Ordnung", auf welche sich die gesuchte Gleichung 96ten Grades eindeutig beziehen lässt.

Dk.

L. Königsberger. Ueber die Erweiterung des Abel'schen Theorems auf Integrale beliebiger Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1880. 288-293.

Es wird aus einer grösseren Arbeit, die der Herr Verfasser demnächst zu veröffentlichen beabsichtigt, eine Reihe von Sätzen zusammengestellt, welche die Grundlage bilden für die Untersuchung der algebraischen Relationen, die zwischen den Werthen eines particulären Integrals einer Differentialgleichung für alge-

braisch mit einander verbundene Werthe der Variablen stattfinden. Als Ausgangspunkt dient der folgende Satz: „Ist die Differentialgleichung

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx} \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

worin y eine algebraische Function von x bedeutet, irreductibel, sowohl dem Grade nach, als Gleichung in $\frac{d^m z}{dx^m}$ aufgefasst, als auch der Ordnung nach, und hat dieselbe mit einer Differentialgleichung

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx} \cdots \frac{d^\nu z}{dx^\nu}\right) = 0$$

irgend ein Integral gemein, so muss sie alle Integrale mit derselben gemein haben.“ Aus den allgemeinen Theoremen, die mit Hülfe dieses Satzes gewonnen werden, heben wir das folgende hervor: „Besteht zwischen den Werthen, welche $\varkappa+\lambda$ particuläre Integrale $z_1, z_2, \ldots z_{\varkappa+\lambda}$ einer irreductiblen Differentialgleichung

$$f\left(x, y, z, \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0 \quad (y \text{ algebraische Function von } x)$$

beziehungsweise für die Werthepaare $x_1 y_1, \ldots x_\varkappa y_\varkappa$ und die algebraisch davon abhängigen $x_{\varkappa+1} y_{\varkappa+1}, \ldots x_{\varkappa+\lambda} y_{\varkappa+\lambda}$ annehmen, eine algebraische Beziehung, so wird diese erhalten bleiben, wenn man statt $z_1, \ldots z_\varkappa$ beliebige andere particuläre Integrale, für $z_{\varkappa+1} \ldots z_{\varkappa+\lambda}$ aber bestimmte, andere particuläre Integrale substituirt. Nimmt man für die $\varkappa+\lambda$ Integrale stets dasselbe Integral, so gelangt man zur Ausdehnung des Abel'schen Theorems.

Hr.

L. Königsberger. Allgemeine Bemerkungen zum Abel'schen Theorem. Borchardt J. XC. 109-163.

Der Verfasser knüpft an eine frühere Arbeit an: „Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen“, Borchardt J. LXXXIV. 284-294 (s. F. d. M. X. 1878. 243) und legt die Untersuchungen dar, welche den Ausgangspunkt für die Aufstellung der allgemeinen Form der

Transformationsproblems der Integrale beliebiger Differentialgleichungen bilden. Der Gesichtspunkt, von dem aus das Abel'sche Theorem eine Verallgemeinerung der algebraischen Beziehungen zulässt, ist folgender: Ist y eine irreductible algebraische Function von x, so kann das Integral

$$\int f(x, y)\,dx$$

als Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y)$$

aufgefasst werden, und der Abel'sche Satz würde dann eine algebraische Beziehung ein und desselben Integrales dieser Differentialgleichung für verschiedene algebraisch mit einander verbundene Argumente und eines Integrales der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \psi(a, a', a'', \ldots), \quad \frac{\partial z}{\partial a'} = \psi_1(a, a', a'', \ldots),$$

$$\frac{\partial z}{\partial a''} = \psi_2(a, a', a'', \ldots), \ldots$$

liefern, worin die ψ-Functionen der Integrabilitätsbedingung genügende rationale Functionen der Parameter $a, a', a'', \ldots$ bedeuten, und diese wiederum algebraisch mit den ersteren Argumenten verknüpft sind. Nachdem der Begriff der Irreductibilität einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung von der Form

$$f\left(x, y_1, y_2, \ldots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots \frac{d^mz}{dx^m}\right) = 0$$

festgestellt worden ist, leitet der Herr Verfasser zwei allgemeine Sätze her, welche das in der oben citirten Arbeit gegebene Theorem (s. F. d. M. X. 1878. 243) als einen ganz speciellen Fall enthalten, und aus denen die Natur der algebraischen Beziehungen erhellt, welche zwischen den Integralen verschiedener Differentialgleichungen beliebiger Ordnung stattfinden. Alsdann wird gezeigt, wie diese allgemeinen Sätze für die Untersuchung der Irreductibilität von Differentialgleichungen verwerthet werden können. Hierauf werden sie benutzt, um die Form der algebraischen Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen und diejenigen Theoreme für die Integrale be-

liebiger Differentialgleichungen zu ermitteln, welche dem Abel'schen Satze für die Integrale algebraischer Differentiale analog sind. M.

L. Königsberger. Erweiterung des Abel'schen Satzes von der Form der algebraisch-logarithmisch ausdrückbaren Integrale algebraischer Functionen. Clebsch Ann. XVII. 561-564.

Im Anschluss an die in Gött. Nachr. 1880 (s. p. 237) veröffentlichten Untersuchungen über die lineare nicht homogene Differentialgleichung

$$(1)\qquad DZ = \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y_1,$$

in welcher $Y_1, Y_2, \dots Y_m, y_1$ algebraische Functionen von x sind, werden folgende beiden Sätze gewonnen: „Wenn eine lineare Differentialgleichung (1) ein algebraisches Integral besitzt und dieses nicht schon selbst so beschaffen ist, dass es rational in $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ und y_1 ausdrückbar ist, so besitzt die Differentialgleichung jedenfalls noch ein anderes algebraisches particuläres Integral von dieser Beschaffenheit;“ und „Wenn eine lineare Differentialgleichung (1) ein logarithmisches Integral von der Form $A \log v$ hat, worin A eine Constante und v eine algebraische Function bedeutet, so besitzt dieselbe auch ein Integral von der Form $\frac{A}{k} \log V$, worin k eine positive ganze Zahl und V rational in $x, Y_1, Y_2, \dots Y_n$ und y_1 ausdrückbar ist.“ M.

R. C. Rowe. Memoir on Abel's theorem. Proc. of Lond. XXX. 515-519.

Ein Bericht über die in den Trans. später erscheinende Abhandlung. Dieselbe enthält eine Vereinfachung der Methoden und Resultate der berühmten Abhandlung Abel's: „Sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes,“ welche der französischen Akademie in Jahre 1826 über-

reicht, aber erst in den Mémoires des Savants Étrangers für das Jahr 1841 veröffentlicht wurde. Cly. (M.)

F. Lindemann. Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz. Leipzig. Teubner. 1879.

Es wird mit Hülfe der Abel'schen Integrale der Riemann-Roch'sche Satz, der die Anzahl der Constanten einer algebraischen Function von gegebener Verzweigung liefert, auch auf die Fälle erweitert, in denen die Function besonderen Bedingungen genügt oder, algebraisch ausgedrückt, auf den Schnitt von nicht adjungirten Curven mit der Grundcurve.

Bald darauf hat Herr Nöther denselben Gegenstand rein algebraisch behandelt („Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven", Clebsch Ann. XV. cf. F. d. M. XI. 1879. p. 488) und dort die Lindemann'schen Ergebnisse nicht unwesentlich modificirt, so dass hier die algebraische Methode den Vorzug zu verdienen scheint.

My.

M. Nöther. Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen. Erl. Ber. 1880, Clebsch Ann. XVII. 263-284.

Die Grundidee der bekannten Arbeit der Herren Brill und Nöther (Clebsch Ann. VII. cf. F. d. M. VI. 1874. p. 231), der Theorie der Abel'schen Functionen eine rein algebraische Grundlage zu geben, wird hier wesentlich weitergeführt, indem es Herrn Nöther gelingt, alle algebraischen Functionen z derselben Classe, die aus einer beliebig ausgewählten

$$f(s, z) = 0$$

durch rationale, eindeutig umkehrbare Substitutionen ableitbar sind, in invarianter Form, d. h. als rationale homogene Functionen 0ter Dimension der linear von einander unabhängigen φ darzustellen und damit die Classe dieser Functionen von der speciellen Form $f(s, z) = 0$ unabhängig zu machen.

Die erste Frage, die sich darbietet, ist die nach der Dimension von Zähler und Nenner der gesuchten Darstellung in den φ. Diese fordert wieder als Voruntersuchung die Bestimmung der Anzahl der „linear von einander unabhängigen quadratischen, cubischen, ... Relationen zwischen den φ“. Es zeigt sich, dass diese Anzahl für alle Fälle (excl. den hyperelliptischen) constant ist und nur von p abhängt.

Zuerst (§ 1) wird nachgewiesen, dass der bekannte Satz von der Invarianteneigenschaft einer rationalen Function der Quotienten der φ in der Weise umkehrbar ist, dass auch jede rationale Function σ von s, z sich als rationale homogene Function 0ter Dimension der φ darstellen lässt (excl. den hyperelliptischen Fall).

Im § 2 wird als Muster aller weiteren Fälle die Zahl der quadratischen Relationen zwischen den φ untersucht. [Diese Frage wird schon, aber unvollständig behandelt von Herrn Weber „Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle“, Clebsch Ann. XIII. (s. F. d. M. X. 1878. p. 328) und von Herrn Krause „Note über aussergewöhnliche Specialgruppen auf algebraischen Curven“, Clebsch Ann. XVI., (s. Abschn. IX. Cap. 2. B)]. Der Gang ist folgender. Eine homogene ganze Function μ^{ter} Dimension der φ sei eine Φ_μ. Durch $(p-2)$ beliebige Punkte $a_1 \dots a_{p-2}$ auf f geht eine „φ“-Curvenschaar

$$\varphi_1 + \lambda\varphi_2.$$

Dann sind in der Form

$$(2) \qquad \varphi_1 \Phi_1 + \varphi_2 \Phi_1'$$

im allgemeinsten Falle $2p-1$ homogene Constante enthalten.

Eine weitere lineare Relation zwischen den Gliedern dieser Form kann nicht stattfinden, da nach dem Riemann-Roch'schen Satze durch den beweglichen Restschnitt von p Punkten von $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$ mit f nur eine φ-Curve geht.

„Ist φ_3 eine weitere φ-Curve, die aber durch keinen der Punkte a geht, so sind im allgemeinsten Falle in der Form

$$(3) \qquad \varphi_1 \Phi_1 + \varphi_2 \Phi_1' + \varphi_3 \Phi_1''$$

$(2p-1)+(p-2) = 3p-3$ homogene Constante enthalten (auch

lr $f = 0$). Da andrerseits eine rationale Function σ, die in den ($2p-2$) einfachen Punkten von f, in denen ein Function Ψ_2 erschwindet, unendlich wird, $3p-3$ Constante enthält, so ist iese allgemeinste rationale Function (excl. den hyperelliptischen all) in der Form $\frac{\Phi_2}{\Psi_2}$ darstellbar."

Ebenso ist für eine Φ_μ zu verfahren: Man setze nur für ($2p-2$) die Zahl $\mu(2p-2)$ und für $\frac{\Phi_2}{\Psi_2}$ die neue Form $\frac{\Phi_\mu}{\Psi_\mu}$. laraus folgt aber das gesuchte Resultat:

„Die Anzahl der von einander unabhängigen Relationen ter Ordnung zwischen den φ beträgt

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+\mu-1)}{1.2\ldots\mu}-(2\mu-1)(p-1)."$$

Im hyperelliptischen Fall tritt eine Erhöhung um $\mu(p-1)-p$ ein.)

Als Anwendung wird eine grosse Zahl von Sätzen aufgestellt über Curven, die die Grundcurve überall einfach berühren die entsprechenden Sätze über höhere Berührungen ergeben ich ohne Mühe daraus).

Als Fundamentalbegriff tritt dabei, wie bei Hesse und Clebsch, ler eines Systems solcher Curven X_μ, X_ν, ... auf, der durch den atz definirt ist, dass „zwei solche Curven X_μ, X_ν demselben ystem angehören, wenn eine Curve $\Phi_{\frac{\mu+\nu}{2}}$ existirt, deren Schnittunkte mit f nur aus den Berührungspunkten beider Curven beiehen."

Man gelangt dabei zu viel allgemeiner gültigen Sätzen, als ei Betrachtung bloss adjungirter Curven möglich ist. So ergiebt ich z. B. der wichtige Satz: „Es giebt keine weiteren Systeme, ls die aus den X_1 und X_2 zu bildenden," d. h. genauer: „Alle Berührungscurven $X_{2\mu+1}$ gehören mit Curven X_1, alle $X_{2\mu}$ mit X_2 n Systemen zusammen."

Wegen der weiteren Sätze mag auf die Abhandlung selbst verwiesen werden. My.

G. Hettner. Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen. Gött. Nachr. 1880. 386-398.

Das von Herrn Schwarz in Borchardt J. LXXXVII. 139; s. F. d. M. XI. 1879. 262, für diese Gleichungen unter Betrachtung der Riemann'schen Fläche hergeleitete Theorem, welches hier in folgender Form ausgesprochen wird: „Wenn eine irreductible algebraische Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen die Eigenschaft hat, durch eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst überzugehen, so ist der Rang der algebraischen Gleichung gleich Null oder Eins", wird von Herrn Hettner rein algebraisch mit Hülfe von Sätzen aus der Theorie der algebraischen Functionen bewiesen.

M.

A. Wassilieff. Ueber rationale den doppelt-periodischen analoge Functionen. Kasan. 1880. (Russisch.).

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Darstellung der Untersuchungen von Gordan, Klein, Schwarz etc. über die endlichen Gruppen linearer Transformationen, im Zusammenhang mit den Untersuchungen über algebraisch integrirbare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

P.

E. Picard. Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable, liées par une relation algébrique. C. R. XC. 724-726, Darboux Bull. (2) IV. 416-432.

E. Picard. Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable et sur une classe d'équations différentielles. C. R. XCI. 1058-1061.

In einer früheren Note (C. R. XCI. 214, siehe Abschn. IX. Cap. 2. B.) wurden die Untersuchungen zweier eindeutigen Functionen einer Variabeln z mitgetheilt, die durch eine hyperelliptische

Gleichung verbunden waren. Jetzt betrachtet der Herr Verfasser ganz allgemein zwei eindeutige Functionen u und v, die durch die irreductible algebraische Gleichung n^{ten} Grades $F(u, v) = 0$ verbunden sind. Ist diese algebraische Function gleich 0, so haben u und v die Form

$$u = \varphi[R(z)], \quad v = \varphi_1[R(z)],$$

wo φ und φ_1 rationale Functionen und $R(z)$ eine eindeutige Function bezeichnen; ist die Function aber gleich 1, so erhält man

$$u = F[G_1(z)], \quad v = F_1[G_1(z)],$$

wo F und F_1 doppelt-periodische Functionen mit denselben Perioden sind und $G_1(z)$ eine ganze Function ist.

In der zweiten Note werden die in der ersteren mitgetheilten Resultate auf die Differentialgleichungen von der Form

$$F\left(u, \frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0$$

angewendet, wo F ein Polynom ist. M.

E. Picard. Mémoire sur les fonctions entières. Ann. d. l'Éc. N. (2) IX. 147-166.

Die Resultate dieser Untersuchungen über die ganzen Functionen sind bereits früher in den C. R. LXXXVIII. und LXXXIX. (s. F. d. M. XI. 1879. 267 und 268) mitgetheilt worden. Unter ganzen Functionen einer complexen Veränderlichen z versteht der Herr Verfasser, mit Herrn Weierstrass, die eindeutigen und in der ganzen Ebene continuirlichen Functionen, die sich also in eine stets convergente, nach wachsenden Potenzen der Veränderlichen fortschreitende Reihe entwickeln lassen. In dem ersten Capitel wird gezeigt, dass es nicht mehr als einen endlichen Werth geben kann, den eine ganze Function für einen endlichen Werth der Veränderlichen annehmen kann. Der bei dem Beweise befolgte Gang führt zur Lösung des Problems, einen allgemeinen Ausdruck für eine Function von z zu finden, die in der ganzen Ebene oder auf einer Kugel nur drei singuläre Punkte hat. Am Schluss des ersten Capitels wird das obige Theorem angewendet, um zu zeigen, dass jede Gleichung

$P(z) = 0$, wo $P(z)$ ein Polynom ist, eine Wurzel hat. Im zweiten Capitel wird das allgemeine Theorem bewiesen, dass es nicht mehr als einen endlichen Werth a geben kann, für welchen die Gleichung $G(z) = a$, wo $G(z)$ eine ganze Function bedeutet, eine endliche Zahl von Wurzeln hat, wenigstens wenn $G(z)$ kein Polynom ist. Der Schluss betrifft die Form einer analytischen eindeutigen Function in der Umgebung eines wesentlich singulären Punktes. M.

E. Picard. Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. C. R. XCI. 1119-1121.

In dieser Note werden ohne Beweis einige Resultate mitgetheilt, welche Herr Picard bei der Untersuchung einer nicht eindeutigen Function $F(x, y)$ gefunden hat, die so beschaffen ist, dass zwischen irgend vier Verzweigungen derselben eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht. Die Rechnungen werden einer späteren Mittheilung vorbehalten.

M.

E. Picard. Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques. C. R. XCI. 1267-1269.

Eine Function $F(xy)$ wird durch folgende Bedingungen definirt: 1) Zwischen vier Zweigen der Function besteht eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten. 2) Für alle Werthe α von x und β von y, die nicht mit einem der Werthe $0, 1, \infty$ zusammenfallen und von einander verschieden sind, ist sie holomorph. 3) In der Umgebung von $x = 0$, $y = \beta$ haben drei Zweige der Function die Formen

$$P_1(xy),\quad P_2(xy),\quad x^{\lambda+b_1-1}P_3(xy)$$
$$(\text{die } P \text{ holomorph für } x = 0,\ y = \alpha),$$

ebenso sind

$$Q_1(xy),\quad Q_2(xy),\quad (x-1)^{\lambda+b_2-1}Q_3(xy)$$

und

$$x'^{-\lambda+1}R_1(x',y),\quad x'^{-\lambda+1}R_2(x',y),\quad x'^{3-\lambda-(b_1+b_2+b_3)}R_3(x',y)$$

$$\left(\text{wo } x'=\frac{1}{x}\right)$$

drei Zweige der Function in der Umgebung $x=1$, $y=\beta$, resp. $x=\infty$, $y=\beta$. Analoge Bestimmungen werden für die Umgebung von $x=\alpha$, $y=0, 1, \infty$ festgesetzt und die verschiedenen Exponenten mit den nämlichen aber accentuirten Buchstaben bezeichnet. 4) Für $x=y=\alpha$, verschieden von 0, 1, ∞, sind drei Zweige der Function von der Form

$$A_1(xy),\quad A_2(xy),\quad (x-y)^{\lambda+b_3-1}A_3(xy).$$

Betreffs der Exponenten wird vorausgesetzt, dass $\lambda+b_1$, $\lambda+b_2$, $\lambda+b_3$ und $b_1+b_2+b_3$ von ganzen Zahlen verschieden sind, ferner muss offenbar $\lambda+b_3=\lambda'+b'_3$ sein.

Denkt man sich y constant, dann ist F eine Function von x mit den singulären Punkten 0, 1, y, ∞. Diese genügt einer linearen Differentialgleichung 3[ter] Ordnung in x, welche nach den Untersuchungen des Herrn Pochhammer (Borchardt J. LXXI. 316 ff., s. F. d. M. II. 1870. 265, siehe auch Fuchs, ibid. LXXII. 255., s. F. d. M. II. 266) durch die obigen Festsetzungen vollständig bestimmt ist. Eine ähnliche Differentialgleichung erhält man, indem man x als constant betrachtet, mit der unabhängigen Variablen y. Nimmt man noch an, dass

$$b'_1=b_1,\quad b'_2=b_2;\quad b'_3=\lambda,\quad \lambda'=b_3,$$

dann haben beide Gleichungen drei gemeinschaftliche linear unabhängige Integrale. Ihre Form ist

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-1}du,$$

wo g und h zwei der vier Grössen 0, 1, y, x bedeuten. Die hier definirte Function $F(xy)$ fällt zusammen mit der von Herrn Appell in seinen Untersuchungen über die hypergeometrischen Reihen zweier Variablen (C. R. XC. 296, vgl. das bez. Referat in diesem Bande p. 296) betrachteten Function $F_1(\alpha\beta\beta'\gamma xy)$, wenn man setzt

$$b_1=1+\beta+\beta'-\gamma,\quad b_2=\gamma-\alpha,\quad b_3=1-\beta',\quad \lambda=1-\beta.$$

Schliesslich werden die Resultate auf eine Function $F(xy)$ mit den n singulären Punkten $a_1 \dots a_{n-1} \infty$ ausgedehnt. Hr.

N. Herz. Zur Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen. Schlömilch Z. XXV. 125-128.

Berichtigung einiger Fehler in der Abhandlung: „Die Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen durch unendliche Producte und Partialbruchreihen von C. Frenzel in Berlin" (Schlömilch Z. XXIV. 316, s. F. d. M. XI. 1879. p. 264). Die Fehler betreffen die Ableitung der von Herrn Weierstrass angegebenen Formel

$$f(u) = e^{\psi(u)}.u^m.\prod_k \left\{\left(1-\frac{u}{a_k}\right).e^{\sum_1^{\nu-1}{}_n \frac{1}{n}\left(\frac{u}{a_k}\right)^n}\right\}^{m_k}.$$

H. St.

E. Mc Clintock. Note on a theorem for expanding functions of functions. Am. J. III. 173.

Der Verfasser erkennt an, dass das in Vol. II. 348-353 von ihm entwickelte Theorem (vgl. F. d. M. XI. 1879. 203) bereits 20 Jahre früher von S. Roberts im Quart. J. IV. 195 publicirt ist. H.

O. Stolz. Bemerkung über einen Satz des Herrn E. Picard. Innsbruck. Ber. XI. 27-31.

Der im XI. Bd. des Jahrbuches p. 286 mitgetheilte Satz des Herrn Picard wird nach den Principien der Functionentheorie des Herrn Weierstrass bewiesen. St.

H. Léauté. Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées dans cet intervalle. C. R. XC. 1404-1406.

Das hier behandelte Problem lautet: „Dasjenige Polynom P_n n^{ten} Grades in x zu finden, das die Eigenschaft hat, dass sein Mittelwerth und die Mittelwerthe seiner n Ableitungen in dem Intervalle $-h$ bis $+h$ gleich $n+1$ gegebenen Grössen $Y_0, Y_1, \dots Y_n$ werden." Hier ist unter dem Mittelwerth der Function $f(x)$ im Intervalle a bis b das Integral

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

verstanden. Die Coefficienten der Y in der Darstellung von P_n, welche Functionen von x und h sind und Hülfspolynome genannt werden, gehören zu der Classe von Functionen, die Herr Appell in der Abhandlung: Sur une certaine classe de polynômes, Ann. de l'Éc. N. (2) IX. 119-144, siehe Abschn. VII. Cap. 2. p. 342, studirt hat. M.

GASCHEAU. Note sur les conditions de continuité et de discontinuité des fonctions algébriques. Mém. de Toul. (8) II. 122-127.

Herr Gascheau findet, dass $y = \sqrt{1-x^2}$ für $x = 1$ discontinuirlich wird, dass $y = \frac{1}{x^2}$ für $x = 0$ continuirlich bleibt, und dass

$$\int_1^0 \frac{dx}{x^2}$$

einen Sinn habe. No.

G. FROBENIUS. Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen. Borchardt J. XC. 1-17.

Ist die Potenzreihe

$$y = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

gegeben, so kann man zwei ganze Functionen von den Graden α und β

$$T = t_0+t_1x+\cdots+t_\alpha x^\alpha, \quad U = u_0+u_1x+\cdots+u_\beta x^\beta$$

so bestimmen, dass die Entwickelung von $yU-T = V$ erst mit der $(\alpha+\beta+1)^{ten}$ Potenz anfängt. Bezeichnet man mit $T_{\alpha\beta}$, $U_{\alpha\beta}$

die den gestellten Forderungen genügenden Functionen, so zeigt sich, dass sie bis auf einen constanten Factor vollständig bestimmt sind, sobald

$$c_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{\alpha-\beta+1} & a_{\alpha-\beta+2} \dots a_{\alpha} \\ a_{\alpha-\beta+2} & a_{\alpha-\beta+3} \dots a_{\alpha+1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{\alpha} & a_{\alpha+1} \quad \dots a_{\alpha+\beta-1} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Dies ist auch die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Bruch $T_{\alpha\beta}:U_{\alpha\beta}$ von Null verschieden sei. Aufgabe vorliegender Arbeit ist nun die Entwickelung eines Systems von identischen Relationen zwischen den T, U und V mit aufeinanderfolgenden Indices. Ist

$$a_n = \frac{f^{(n)}(t)}{n!},$$

so stellen die Quotienten $T_{\alpha\beta}:U_{\alpha\beta}$ die Näherungsbrüche der nach Potenzen von $x = s - t$ entwickelten Reihe der Function $y = f(s)$ dar. Die Relationen zwischen den Zählern, Nennern und Resten derselben und ihren Derivirten nach t bilden den Gegenstand eines besonderen Paragraphen. Den Beschluss bildet die Entwickelung der Potenzreihen in Kettenbrüche. Hr.

LAGUERRE. Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynôme entier. Liouville J. (3) VI. 99-110.

LAGUERRE. Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels. Bull. S. M. F. VIII 21-27.

LAGUERRE. Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$. Bull. S. M. F. VIII. 36-52.

G. HUMBERT. Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions. Bull. S. M. F. VIII. 182-187.

Das Verfahren, wodurch Herr Laguerre solche ganze Functionen n^{ten} Grades von $x: f_n$, φ_n bestimmt, dass die Differenz $e^{F(x)} - \{\varphi_n : f_n\}$, nach steigenden Potenzen von x entwickelt, mit x^{2n+1} beginnt, wurde schon auseinandergesetzt (vgl. d. Jahrb. IX. 1877. p. 308, X. 1878. p. 294). $y = f_n(x)$ muss die Differentialgleichung

$$y'' - \left[\frac{2n}{x} + \frac{\Theta_n'(x)}{\Theta_n(x)} - F'(x)\right] y' - \frac{H_n(x)}{x\Theta_n(x)} y = 0$$

erfüllen, worin Θ_n, H_n noch zu bestimmende ganze Functionen in x von den Graden $m-1$, $2m-2$ (m Grad von $F(x)$ in x) bedeuten. Nun wird die Ermittelung derselben gezeigt. Im Falle, dass $F(x) = x^2 + 2ax$ ist, wird die Untersuchung soweit fortgesetzt, dass die Möglichkeit ersichtlich wird, Recursionsgleichungen für die Coefficienten dieser Functionen auf algebraischem Wege zu gewinnen.

Es sei z eine Function, welche der Differentialgleichung

$$Wz' = Vz + U$$

genügt, deren Coefficienten ganze Polynome in x sind. Kann man

$$\text{(a)} \qquad z = \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

setzen (unter $\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$ eine Reihe nach fallenden Potenzen von x verstanden, die mit x^{-2n-1} beginnt), so ergiebt sich eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, der die Functionen

$$f_n \text{ und } e^{-\int \frac{V}{W} dx} \{\varphi_n - z f_n\}$$

genügen. Dieselbe enthält, wie die oben angeführte, noch unbekannte Constante, deren Bestimmung schwierig ist. Ist sie aber durchgeführt, so lassen sich für f_n, φ_n in der That die recurrirenden Formeln ableiten

$$f_{n+2} - Q_n f_{n+1} + P_n f_n = 0, \quad \varphi_{n+2} - Q_n \varphi_{n+1} + P_n \varphi_n = 0,$$

worin P_n eine willkürliche Constante, Q_n eine bestimmte Function 1ten Grades in x bezeichnet. Damit ist z in einen Kettenbruch entwickelt, dessen Zähler die P_n, dessen Nenner die Q_n und dessen Näherungsbrüche die $\varphi_n : f_n$ sind.

Im Falle der Function

$$z = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega},$$

welche der Differentialgleichung

$$(x^2-1)z'+2\omega z = 0$$

genügt, ergiebt sich die erwähnte Differentialgleichung für f_n leicht als:

$$(x^2-1)y''+2(x-\omega)y'-n(n+1)y = 0.$$

Aus ihr folgen sowohl die obige Recursionsformel für die f_n, als auch f_n selbst. Durch die hier auftretenden Functionen f_n, φ_n lassen sich ausdrücken die in z linearen Coefficienten der Jacobi'schen Entwickelung von $(x+z)^{\omega}$ nach steigenden Potenzen von z^2-1 und die Coefficienten der Entwickelung von $(x-z)^{\omega-1}$ $(\omega>0)$ nach Kugelfunctionen $X_n(z)$. Auch besteht die Relation

$$\varphi_n \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \omega} - \varphi_{n+1} \frac{\partial f_n}{\partial \omega} + f_{n+1} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \omega} - f_n \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \omega} = \text{const.}$$

Herr Humbert ermittelt direct die Zerlegung (a) für die Function

$$z = (x^2-1)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$$

im Falle, dass α eine ganze Zahl und z eine irrationale Function von x ist. St.

G. Humbert. Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme. Bull. S. M. F. VIII. 124-128.

Verallgemeinerung eines Satzes des Herrn Laguerre über die Coefficienten der Jacobi'schen Entwickelung von $\log(x-z)$ nach steigenden Potenzen eines Polynomes vom 2ten Grade (vgl. d. Jahrb. X. 1878. p. 183). St.

G. Humbert. Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques. Bull. S. M. F. VIII. 191-197.

Es seien $x_0, x_1, \dots x_n$ reelle Zahlen, steigend geordnet,

$$\varDelta(z) = (z-x_0)(z-x_1)\cdots(z-x_n)$$

und

$$K(z) = A(z-x_0)^{\mu_0}(z-x_1)^{\mu_1}\dots(z-x_n)^{\mu_n},$$

rorin die Exponenten sämmtlich positiv sind; ferner sei

$$z_r = \int_{x_{r-1}}^{x_r} \frac{K(z)}{\varDelta(z)}\frac{dz}{x-z} \quad (r = 1, 2, \dots n).$$

lestimmt man nun n ganze Functionen $P_1, P_2, \dots P_n$ von x des ^{ten} Grades durch die Bedingung, dass der Ausdruck

$$P_1 z_1 + P_2 z_2 + \cdots P_n z_n,$$

ntwickelt nach fallenden Potenzen von x, die Glieder

$$x^{-1},\ x^{-2},\ \dots\ x^{-mn-n-1}$$

iicht enthalte, so hat die Gleichung $P_r = 0$ nur reelle Wurzeln, ınd zwar liegen sie alle zwischen x_{r-1} und x_r. Der Beweis be- larf einer nahe liegenden Ergänzung, falls in den Integralen z_r omplexe Factoren auftreten. Erst dieser Satz zeigt im Falle $= 1$ die Möglichkeit, z_1 für hinlänglich grosse Werthe von x n einen Kettenbruch zu entwickeln. Denn da die Gleichung

$$z_1 = \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

ur für solche Werthe von x gilt, die ausserhalb eines Kreises ich befinden, der alle Wurzeln der Gleichung $f_n(x) = 0$ um- chliesst, so ist hierzu nothwendig, dass diese Wurzeln, was mmer auch n sei, ihrem absoluten Betrage nach unter einer ndlichen Grenze liegen. Im Falle $n = 1$ erscheint der Satz als ine Anwendung eines allgemeineren Theorems von Heine (vgl. Handbuch der Kugelfunctionen I. p. 291). St.

E. Laguerre. Sur quelques théorèmes de M. Hermite. Extrait d'une lettre adressée à M. Borchardt.

Borchardt J. LXXXIX. 339-342.

Einfacher Beweis eines algebraischen Satzes der Herren Biehler und Hermite (vgl. F. d. M. XI. 1879. p. 64, 273) und die folgende Bemerkung: Es sei $F(x)$ der gemeinsame Nenner jener n rationalen Functionen, welche die Functionen

$$e^{a_1 x},\ e^{a_2 x},\ \dots\ e^{a_n x}$$

bis auf Glieder von der Ordnung $n\mu + \mu$ darstellen (vgl. F. d. M. V. 1873. p. 248). Bei der Entwickelung von $e^{ax}F(x)$ nach stei-

genden Potenzen von x ergiebt sich als Coefficient von $x^{-\mu}$ der gemeinsame Nenner jener rationalen Functionen, welche die Functionen

$$\log\frac{x-a_1}{x},\ \log\frac{x-a_2}{x},\ \dots\ \log\frac{x-a_n}{x}$$

bis auf Glieder von der Ordnung $x^{-n\mu-\mu}$ darstellen (vgl. a. a. O. Bd. VII. p. 174).

St.

E. Laguerre. Sur les équations algébriques dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. C. R. XC. 809-812.

Genügt ein Polynom $F(x)$ einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, und ist es bekannt, dass die Gleichung $F(x) = 0$ nur reelle Wurzeln hat, so lässt sich aus den Coefficienten der Differentialgleichung ein Ausdruck bilden, welcher Grenzen giebt, innerhalb deren die Wurzeln von $F(x) = 0$ sich befinden.

No.

A. Sachse. Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen. Schlömilch Z. XXV. Suppl. 234-276. Darboux Bull. (2) IV. 43-64, 83-112.

P. du Bois-Reymond. Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen. Eine Entgegnung. Tübingen. Laupp. 8°.

A. Sachse. Anzeige der Schrift von P. du Bois-Reymond. Gött. Anz. 1880. 980-989.

Die erste Arbeit ist der verbesserte Abdruck resp. die Uebersetzung einer Dissertation, über die bereits im vorigen Bande p. 274 berichtet worden ist. Die beiden letzten sich daran anschliessenden Arbeiten veranlassen den Referenten, nochmals auf die Arbeit zurückzukommen. Es ist dabei aber nicht der Zweck dieser Zeilen, noch des Näheren auf den Inhalt der einzelnen oben citirten Arbeiten einzugehen. Herr Sachse will einen histo

rischen Ueberblick über die Entwickelung der Lehre von der Darstellung willkürlicher Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen geben. Ausgehend von Riemann's Habilitationsschrift: „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe“ bespricht er die hauptsächlichsten Arbeiten und sucht den Zusammenhang ihrer Resultate und Methoden nachzuweisen. Uebergangen scheint nur Einzelnes, so dass die Arbeit in der That zur Orientirung in der einschlägigen Literatur geeignet scheint. Die Schrift des Herrn P. du Bois-Reymond enthält eine scharfe Kritik dieser Arbeit. Abgesehen von dem persönlichen Theil, den wir als nicht in den Bereich des Jahrbuchs gehörend übergehen, lässt sich derselben eine gewisse Berechtigung nicht absprechen. Dass Fehler in der Darstellung untergelaufen sind, hat Herr Sachse zum Theil in der zuletzt citirten Arbeit zugegeben und sie in dem vorliegenden Abdruck verbessert. Es sind solche auch anderweit (Harnack, Clebsch Ann. XIX. p. 273) nachgewiesen. Auch die Würdigung der Bedeutung und Tragweite einzelner Arbeiten, wie sie der Verfasser aufstellt, dürfte nicht durchweg einwurfsfrei sein. Endlich scheint der Verfasser über die Schranken einer historischen Darstellung stellenweise hinweggegangen zu sein; wenigstens scheint es uns, als dürfe in einer solchen eine gedruckt vorliegende Entwickelung nicht zu Gunsten eines Theiles einer akademischen Vorlesung, möge sie auch noch so gelungen sein, zurückgedrängt werden. Die oben zuletzt angeführte Notiz tritt unter der Form einer Anzeige der Schrift des Herrn du Bois-Reymond auf und enthält eine zum Theil persönlich gehaltene Gegenkritik, in der der Verfasser die gegen ihn gerichteten Angriffe zurückzuweisen sucht. O.

W. Scheibner. Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in der Entwickelung einer beliebigen Potenz des Radiusvectors nach der mittleren Anomalie. **Clebsch Ann. XVII. 531-544.**

W. Scheibner. Ueber die asymptotischen Werthe de Coefficienten in den nach der mittleren Anomalie vor genommenen Entwickelungen. Clebsch Ann. XVII. 545-56(

Beide Abhandlungen stammen aus dem Jahre 1856; die erst ist in englischer Sprache publicirt in Gould's Astr. J. No. 95 Bd. IV. 177, Cambr. Mass. 1856, die zweite findet sich in de Leipz. Ber. vom 31. Mai 1856. Jacobi hat in den Astr. Nach XXVIII. 257-270, No. 665, und XXX. 197-254, No. 707-712, ein Abhandlung veröffentlicht, in der die Coefficienten der trigono metrischen Functionen sehr grosser Vielfachen der mittlere Anomalie in der Entwickelung des Radiusvectors und der Mittel punktsgleichung angenähert bestimmt werden. Es ist diese Ab handlung die Umarbeitung einer Arbeit von Franz Carlini au dem Jahre 1817: „Ricerche sulla convergenza della serie che serv alla soluzione del problema di Keplero, Milano.“ Da die ange wandte Methode nicht leicht zum Ziele führt, so hat Her Scheibner eine andere allgemeine Methode angegeben, mittel deren man sehr kurz und leicht die asymptotischen Werthe de Coefficienten in den nach den trigonometrischen Functionen de Vielfachen der mittleren Anomalie fortschreitenden Entwickelunge finden kann. Die Entwickelung der Mittelpunktsgleichung und des Radiusvectors erscheinen beide als specielle Fälle viel all gemeinerer Functionen, welche sich nach der mittleren Anomali entwickeln lassen. Aus den Formeln für die Entwickelung eine beliebigen positiven oder negativen Potenz des Radiusvectors, die in dem ersten Aufsatze zusammengestellt werden, ergieb sich die Richtigkeit der von Jacobi abgeleiteten Ausdrücke.

M.

W. de Maximowitch. Conditions pour que les constantes arbitraires d'une expression générale soient distinctes entre elles. Liouville J. (3) VI. 167-177.

Es wird zunächst der Satz bewiesen: Sind $A_1, A_2, \dots A_n$ Functionen der unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$, und be-

zeichnet R_m die Determinante aller A und irgend welcher die Ordnung m nicht übersteigender, für alle A gleichgebildeter partieller Differentialquotienten, R_{m-1} eine solche, wo die $(m-1)^{\text{te}}$ Ordnung nicht überstiegen wird; ist alsdann jedes R_m null und irgend ein R_{m-1} nicht null, so existirt eine lineare Relation zwischen den A. Bildet man nämlich alle linearen Gleichungssysteme, deren Coefficientendeterminanten die R_m sind, so lässt sich zeigen, dass sie durch Constante befriedigt werden können, und die gemeinschaftliche Gleichung

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots A_{m-1} u_{m-1} + A_m$$

ist die geforderte Relation. Jetzt folgt leicht, dass $R_m = 0$, gültig für alle R_m, die nothwendige und ausreichende Bedingung der Existenz einer homogenen linearen Relation zwischen den A ist. Ferner werden die zwei Definitionen aufgestellt: I. Zwei Ausdrücke

$$f(x_1, x_2, \dots x_n; \quad a_1, a_2, \dots a_m)$$

sind „äquivalent“, wenn man, indem man in dem einen den Constanten a alle Werthe ertheilt, daraus alle möglichen im andern speciell enthaltenen Functionen ableitet, und reciprok. II. Die Constanten eines solchen Ausdrucks sind „distinct“, wenn kein Ausdruck mit weniger Constanten ihm äquivalent ist. Hiernach lautet nun der Hauptsatz: „Damit die Constanten eines Ausdrucks f distinct seien, ist es nothwendig und ausreichend, dass zwischen den ersten partiellen Differentialquotienten nach den a keine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten existirt. Hierzu wieder ist es nothwendig und ausreichend, dass zwischen den partiellen Differentialquotienten in Bezug auf die x, deren Ordnung $m-1$ nicht übersteigt, mindestens ein System von m Functionen, einschliesslich f selbst, sich findet, derart dass zwischen ihnen keine Relation existirt, wo die a nicht explicit stehen.“ Dies wird bewiesen. H.

J. J. Walker. On theorems in the calculus of operations. Proc. L. M. S. XI. 408-413.

Es werden zwei Formeln ähnlich der Leibniz'schen entwick die der Verfasser nachher unter die folgende allgemeinere su summirt:

$$D^n(uv\varphi^n) = \sum_{k=0}^{k=n}(n)_k D^{k-1}(v'\varphi^k)D^{n-k}(u\varphi^{n-k}),$$

wo u, v, φ Functionen von x, $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$, D Differentialquotie nach x, und $D^{-1}(v'\varphi^0) = v$. Diese und zwei Zusätze werd durch Bernoulli'sche Schlussweise bewiesen. Anwendungen solle später folgen. H.

Capitel 2.

Besondere Functionen.

O. Schlömilch. Ueber das arithmetische, das geome trische und das harmonische Mittel aus beliebig viele positiven Zahlen. Hoffmann Z. XI. 361-362.

Elementarer Beweis, dass das arithmetische Mittel grös als das geometrische, und das geometrische Mittel grösser a das harmonische ist. M.

H. W. L. Tanner. On powers of functions of th form $\frac{ax+b}{cx+d}$. Messenger (2) IX. 139-150.

Die Arbeit bezieht sich auf Ausdrücke von der Form $\varphi^n(x$ wo $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ist, und enthält Bemerkungen und Zusätze z der Arbeit von Cayley über denselben Gegenstand im Messenge (2) IX. 104 (siehe F. d. M. XI. 1879. p. 278).

Glr. (O.)

W. L. Glaisher. Note on an algebraical identity.
Messenger (2) X. 54-60.

Die Identität heisst:

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$
$$=9+\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab)}{abc}.$$

ner wird bewiesen, dass

$$\left(\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}+\frac{a+b}{a-b}\right)$$
$$=9-8\frac{(a+b+c)(bc+ca+ab)}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

s diesen zwei Gleichungen werden einige trigonometrische
rmeln hergeleitet. Glr. (O.)

Cayley. Table of $\Delta^m 0^n : \Pi(m)$ up to $m=n=20$.
Trans. of Cambr. XIII. 1-4.

Eine kleine Tabelle für $\Delta^{10} o^{10}$ findet sich in Herschel's
amples (1820); aber bekanntlich ist Δo^n, $\Delta^2 o^n$, $\Delta^3 o^n$, ... durch
1.2, 1.2.3, ... und allgemein $\Delta^m o^n$ durch $\Pi(m)$ theilbar, und
ist zweckmässiger, $\Delta^m o^n : \Pi(m)$ in eine Tabelle zu bringen, als
ungetheilten Differenzen $\Delta^m o^n$. Grunert gab in Crelle J. XXV.
43) p. 279 eine Tabelle dieser Quotienten für $m=n=12$,
l diese Tabelle dehnt Herr Cayley für $m=n=20$ aus, in-
n er zur Berechnung die Formel

$$\frac{\Delta^m o^{n+1}}{\Pi(m)}=m\frac{\Delta^m o^n}{\Pi(m)}+\frac{\Delta^{m-1} o^n}{\Pi(m-1)}$$

wendet. Glr. (M.)

Bellavitis. Dei libri di ragione a scrittura doppia.
Acc. R. d. L. (3) IV. 20.

Bellavitis. Sviluppo in serie delle funzioni implicite e rami infiniti delle curve algebriche.
Acc. R. d. L. (3) IV. 20.

Dies sind der Angabe zufolge zwei eingesandte Abhandlungen, deren eine die algebraischen Functionen zweier Variabeln betrachtet. Zur Transformation der impliciten Functionen in explicite wird ein algebraisches Schachbrett oder Parallelogramm angewandt. Es werden einige Reihenentwickelungen nach steigenden und fallenden Potenzen der einen Variabeln vollzogen. Weiterhin wird die Curve betrachtet, welche die Function zweier Variabeln darstellen würde, und aus den ersten Gliedern der Entwickelung die Singularitäten im Anfangspunkt und im Unendlichen berechnet. H.

H. Léauté. Note sur le calcul approché par la méthode de Poncelet des radicaux de la forme $\sqrt{x^2-y^2}$. Bull. S. M. F. VIII. 106-109.

Der Verfasser behandelt die Aufgabe, die genannte Function annähernd durch eine lineare zu ersetzen, in dem Sinne, in welchem Poncelet dasselbe mit der Function $\sqrt{x^2+y^2}$ gethan. Er construirt die gleichseitige Hyperbel

$$x^2-y^2 = c^2.$$

Die Approximation soll gelten zwischen den Werthen K', K'' für $\frac{y}{x}$, wodurch auf der Hyperbel zwei Grenzpunkte bestimmt sind. Beide verbindet er durch eine Sehne, zwischen ihr und der ihr parallelen Tangente in gleichen Abständen von beiden zieht er eine parallele Gerade. Deren Gleichung tritt dann an die Stelle der Hyperbelgleichung. Nach analytischer Ausführung zeigt sich, dass das Resultat sich vom Poncelet'schen nur dadurch unterscheidet, dass an die Stelle der circulären die hyperbolischen goniometrischen Functionen treten. H.

P. Appell. Sur une classe de polynômes. Ann. de l'Éc. (2) IX. 119-144.

Gegenstand der Untersuchung ist eine Reihe von Polynomen in x

$$A_0,\ A_1,\ \ldots\ A_n,$$

wo A_n vom n^{ten} Grade ist, und zwei aufeinanderfolgende Glieder durch die Relation

$$\frac{dA_n}{dx} = nA_{n-1}$$

verknüpft sind. Die einfachsten Polynome der Art sind $1, x, x^2, \ldots x^n$. Den allgemeinsten Ausdruck für dieselbe findet man in folgender Weise: Es sei

$$a(h) = \alpha_0 + h\alpha_1 + \frac{h^2}{1.2}\alpha_2 + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\alpha_n + \cdots$$

die erzeugende Function, unter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ganz unbestimmte Grössen gedacht, so ist A_n der Coefficient von $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ in der Entwickelung von $a(h)e^{hx}$ nach steigenden Potenzen von h, also

$$a(h)e^{hx} = A_0 + A_1 h + A_2\frac{h^2}{1.2} + \cdots + A_n\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \cdots.$$

$a(h) = 1$ giebt die einfachsten Polynome $1, x, \ldots x^n$. Unter $(AB)_n$ versteht man das Polynom, das man erhält, wenn man in A_n x^k durch B_k ersetzt. Die erzeugende Function der Polynome (AB) ist das Product $a(h).b(h)$, wenn $b(h)$ die erzeugende Function der Polynome B ist. Hiernach ist $(AB)_n = (BA)_n$. $\left(\frac{B}{A}\right)_n$ wird durch die Gleichung $\left(A\cdot\frac{B}{A}\right)_n = B_n$ definirt, insbesondere $\left(\frac{1}{A}\right)_n$ durch die Gleichung $\left(A\cdot\frac{1}{A}\right)_n = x^n$.

Die weitere Untersuchung betrifft die Herleitung einer linearen Relation zwischen mehreren aufeinanderfolgenden Gliedern in der Reihe der A, sowie einer linearen Differentialgleichung für A_n, wenn die erzeugende Function gegeben ist, ferner die Darstellung einer Function $F(x)$ in einer Reihe, die nach den Polynomen A_n fortschreitet. Schliesslich wird der Grenzwerth von A_n für $n = \infty$ entwickelt.

Die angewandte Methode lässt sich auf Polynome von mehreren Variablen ausdehnen. So werden die Polynome $U_{m,n}$ in x, y definirt durch die Gleichung

$$f(h, k)\, e^{x(ah+bk)+y(b'h+c'k)} = \Sigma \frac{h^m k^n}{m!\, n!} U_{m,n},$$

wo $f(h, k)$ die erzeugende Function ist, entwickelbar nach ganz positiven wachsenden Potenzen von h und k. Hr.

H. Lamb. Note on a theorem relating to quadrat expressions. Messenger (2) X. 35-36.

Beweis des folgenden Satzes: Wenn T eine homogene qu dratische Function der $m+n$ Variabeln $x_1, x_2, \dots x_m$, $y_1, y_2, \dots$ ist und die Variabeln y mit Hülfe von Relationen der Fo $\eta = \frac{dT}{dy}$ eliminirt werden, so wird T zu einer Summe zwe homogener quadratischer Functionen der x resp. η, oder mit a dern Worten: Es kommen in dem Resultate keine Producte d x und η vor. Glr. (O.)

Laisant. Remarques sur les fonctions 1^x *et* $(-1)^x$. Bull. S. M. F. VIII. 109-111.

Die Bemerkung besteht darin, dass diese Functionen als abhän gig von einer ganzen Zahl k definirt werden müssen, um bestimm und stetig zu sein, so dass ihr Werth ist $e^{2ki\pi}$, $e^{(2k+1)i\pi}$. H.

Laguerre. Sur la fonction exponentielle. Bull. S. M. F VIII. 11-18.

Bestimmt man in dem Ausdrucke

$$V = Fe^{ax} + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} + \dots + F_{m-1} e^{lx}$$

die ganzen Functionen von x F, F_1, ... F_{m-1}, bezüglich von de Graden α, β, ... λ, so, dass er mit x in der Potenz

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda + m - 1$$

beginnt, so genügt V einer linearen Differentialgleichung m^{ter} Ord nung, welche Herr Laguerre für den Fall $\alpha = \beta = \dots = \lambda$ scho früher aufstellte. (Vgl. Borchardt J. LXXXVIII. p. 39, s. F. d. M XI. 1879. p. 266.) St.

J. A. M. da Silva. Sur une formule du calcul intégral. Teixeira J. II. (Portugiesisch).

Beweis, dass, wenn die Function $F(x+\alpha)$ in eine Reihe nach den Potenzen von $e^{-\alpha}$ entwickelbar ist, die folgende Formel gilt:

$$\int_0^\infty \frac{F(x+\alpha ti)-F(x-\alpha ti)}{t(1+t^2)}\,dt = i\pi[F(x+\alpha)-F(x)].$$

Dem Beweise folgen einige Anwendungen. Tx. (O.)

Laguerre. Sur l'approximation des fonctions circulaires au moyen de fonctions algébriques. C. R. XC. 304-307.

Die hier für die näherungsweise Berechnung der Kreisfunctionen mittels algebraischer Functionen gegebene Methode stützt sich auf folgendes Theorem: „Bezeichnet $f(x)=0$ eine Gleichung, deren sämmtliche Wurzeln reell sind, und α eine beliebige Grösse, so liegen die beiden Werthe von x, welche durch die Gleichung

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{-f'(\alpha)\pm\sqrt{(n-1)^2f'^2(\alpha)-n(n-1)f(\alpha)f''(\alpha)}}{nf(\alpha)}$$

bestimmt werden, resp. zwischen α und den beiden dem Werthe α benachbarten Wurzeln der vorgelegten Gleichung.“

M.

Y. Villarceau. Application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires. C. R. XC. 721-727, 767-769.

Y. Villarceau. Note sur la théorie des sinus des ordres supérieurs. C. R. XCI. 195-197.

Fortsetzung der Untersuchungen über die von Wronski eingeführten Sinus höherer Ordnungen (C. R. LXXXVI.; s. F. d. M. X. 1878. p. 301). Der Herr Verfasser hebt hervor, dass sich diese Functionen in Fragen der Mechanik und mathematischen

Physik sehr fruchtbar erweisen werden, und giebt in der ersten Note eine Anwendung derselben auf die Integration einer Classe linearer Differentialgleichungen. Die Functionen φ genügen nämlich der Differentialgleichung

$$\frac{d^m \varphi_\mu x}{dx^m} = \pm \varphi_\mu x.$$

Diese Eigenschaft wird nun benutzt zur Lösung der allgemeineren Gleichungen

$$\frac{d^m \eta}{dx^m} \mp r^m \eta = 0,$$

$$\frac{d^m \eta}{dx^m} \mp r^m \eta = V,$$

wo V eine Function von x allein ist, sowie der Gleichung

$$\frac{d^k y}{dx^k} \mp p \frac{d^h y}{dx^h} + q = V,$$

wo p eine positive Constante, q eine positive oder negative Constante und V eine explicite Function von x ist. Eine folgende Note (C. R. XCI. p. 13) enthält die Lösung einer linearen Differentialgleichung von der Ordnung mn; siehe Abschn. VI. Cap. 5, p. 261.

Die Note betrifft die Indices der Functionen φ. Durch die obigen Anwendungen ist der Herr Verfasser auf die Idee geführt worden, die Werthe der Indices auf beliebige ganze, positive oder negative Zahlen auszudehnen, so dass das Doppelzeichen $\pm$ in den Theoremen für die beiden Gattungen des Sinus, die hyperbolische und die elliptische, unterdrückt werden und so jedes System der beiden Formeln auf eine Formel gebracht werden kann. M.

J. Farkas. Sur la théorie des sinus des ordres supérieurs. C. R. XCI. 544-547.

J. Farkas. Sur l'application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles. linéaires. C. R. XCI., 1543-1545.

J. Farkas. Sur la théorie des sinus des ordres supérieurs. C. R. XCI. 209-211, 278-281.

Angeregt durch die Untersuchungen des Herrn Y. Villarceau (siehe das vorstehende Referat) hat sich Herr Farkas mit den Sinus höherer Ordnung beschäftigt und zum Theil dieselben Resultate gewonnen. Die erste Note betrifft die Entwickelung von $\varphi_i(x+y)$ nach ganzen Potenzen der beiden Variabeln; die Lösung eines von Herrn J. König aufgestellten Problems: „Die Reihe

$$a_\mu x^\mu + a_{\mu+m} x^{\mu+m} + a_{\mu+2m} x^{\mu+2m} + \cdots$$

durch den gegebenen Werth $f(x)$ der Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ auszudrücken“; und die Relation

$$\sqrt{-1}\,.\,2\pi\varphi_\mu(x) = \int_{(C)} e^{\frac{x}{z}} \frac{z^{\mu-1}}{1 \mp z^m}\, dz,$$

wo C eine geschlossene Curve bedeutet, die in positivem Sinne von z beschrieben ist, und wo $0 < \operatorname{mod} z < 1$ ist. Die zweite enthält die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^{2m} y}{dx^{2m}} + a_1 \frac{d^m y}{dx^m} + a_2 y = X;$$

die dritte und vierte die Verallgemeinerung der Indices der Sinus höherer Ordnung und Additionstheoreme. M.

J. Liouville. Leçons sur les fonctions doublement périodiques faites en 1847. Borchardt J. LXXXVIII. 277-311.

Eine der letzten Arbeiten des verstorbenen, um die mathematische Wissenschaft und ihre Verbreitung hochverdienten C. W. Borchardt ist die vorliegende Veröffentlichung der berühmten, zwar schon länger bekannten, aber nie in authentischer Fassung mitgetheilten Theorie von Liouville, welche letzterer im Jahre 1847 Borchardt und Joachimsthal vorgetragen hatte. Die einzige Abweichung von der Liouville'schen Fassung bildet der Beweis des Fundamentaltheorems, dass eine doppelt-periodische Function, die niemals unendlich wird, unmöglich ist, welcher

von Borchardt durch den Beweis eines allgemeineren Theorems ersetzt ist. Die von Borchardt aufgestellte Inhaltsübersicht lautet:

Première partie. Théorie générale.

1) Une fonction doublement périodique qui ne devient jamais infinie est impossible.

2) Une fonction doublement périodique à un seul infini est impossible.

3) Fonctions doublement périodiques à deux infinis. Leurs propriétés fondamentales.

4) Fonctions doublement périodiques à plusieurs infinis. Leur développement en sommes et en produits de fonctions doublement périodiques à deux infinis.

5) Fonctions à un nombre pair d'infinis. Leur développement en produits de fonctions doublement périodiques à trois infinis.

6) Développement des fonctions doublement périodiques en fractions de la forme $\frac{M+N.\varphi'(z)}{L}$, $\varphi(z)$ représentant une fonction doublement périodique à deux infinis, $\varphi'(z)$ son quotient différentiel et L, M, N, des fonctions entières de $\varphi(z)$.

Seconde partie. Applications.

7) Détermination du quotient différentiel des fonctions doublement périodiques à deux infinis. Théorème de l'addition pour les mêmes fonctions. Cas particulier du sinus amplitudinis.

8) Transformation du sinus amplitudinis. Expressions en forme d'une somme et d'un produit.

9) Transformation inverse du sinus amplitudinis. Formule d'Abel. Formule de Jacobi. H. St.

H. Laurent. Théorie élémentaire des fonctions elliptiques. Paris. Gauthier-Villars.

Zusammenstellung der einzelnen Abhandlungen aus den Nouv. Ann. 1877, 1878, 1879, die bereits in F. d. M. IX. 1877. p. 327, X. 1878. p. 303, XI. 1879. p. 281 besprochen worden sind. O.

S. PINCHERLE. Ricerche sopra una classe importante di funzione monodrome. Battaglini G. XVIII. 92-136.

Siehe Abschn. VII. Cap. 1, p. 308.

CH. HERMITE. Sur une formule d'Euler. Liouville J. (3) VI. 5-18.

Ein in Darboux Bull. (2) III. p. 226 (s. F. d. M. XI. 1879. p. 21) veröffentlichter Brief von N. Fuss enthält die von Euler gefundene Reduction des Integrals

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx$$

auf das Integral einer rationalen Function vermittels der Substitution

$$y = \frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}}.$$

Die Frage, ob es noch andere Integrale von der Form

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}}$$

gäbe, die durch eine algebraische Substitution auf Integrale rationaler Functionen zurückführbar sind, mit der sich Herr Hermite im Vorliegenden beschäftigt, führt zu folgendem Resultat. Die Integrale

$$\int \frac{f(x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{f_1(x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$\int \frac{f_2(x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

in denen die rationalen Functionen f, f_1, f_2 den Bedingungen

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right), \quad f_1(x^2) = -f_1\left[\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}\right],$$
$$f_2(x^2) = -f_2\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right)$$

genügen, lassen sich durch die Substitutionen

$$p = \frac{1}{x}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad p = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad p = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}$$

auf Integrale rationaler Functionen zurückführen.

M.

G. Battaglini. Sull' equazione differenziale ellittica. Acc. R. d. L. (3) IV. 49-50.

Bericht über eine der Akademie vorgelesene Note, welche eine directe Methode der Lösung der Euler'schen Differentialgleichung enthält. Es werden die Bedingungen aufgestellt, denen eine in Bezug auf drei Variabele quadratische Form genügen muss, damit sie das allgemeine Integral der elliptischen Differentialgleichung sei.

M.

W. Scheibner. Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. Leipz. Abh. XX. 57-197.

Die Schrift, deren ausführliche Inhaltsangabe hier vorliegt, sollte eine übersichtliche Zusammenstellung aller der Vorschriften geben, welche die in Problemen der Geometrie und Mechanik auftretenden elliptischen Integrale auf die Normalform der drei Gattungen reduciren und die Einführung der Thetafunctionen zur Berechnung der Integrale bewirken. Der ursprüngliche Zweck ist aber dadurch modificirt worden, dass sich dem Herrn Verfasser mancherlei die Theorie der elliptischen Integrale betreffende Fragen aufdrängten, welche hier mit behandelt wurden. Der erste Abschnitt (S. 57—117) enthält die Reduction auf die Normalform des elliptischen Differentials. Es wird die Integralgleichung

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} \pm \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta} = 0,$$

in welcher die Radicale ξ und η gleiche Invarianten besitzen, auf algebraische Relationen in rationaler und irrationaler Form

zurückgeführt. Daran schliessen sich die betreffenden Additionssätze und die Reduction auf die Normalform $\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi x)}$, nebst einigen Betrachtungen über Fälle ungleicher Invarianten. Der zweite Abschnitt (S. 118—197) handelt von der Reduction der reellen elliptischen Integrale

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\frac{dx}{\xi}$$

auf die Thetafunctionen Jacobi's. Es folgen die Transformationen von Gauss und Landen. Am Schluss werden die betreffenden Vorschriften für die numerische Berechnung zusammengestellt.

M.

F. Klein. Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung. Clebsch Ann. XVII. 133-138; Münch. Ber. 1880. 533-541.

Von dem schon früher (s. Münch. Ber. 1879; F. d. M. XI. 1879. p. 300) betonten Grundgedanken ausgehend, dass der Legendre'sche Modul k^2 als Modul zweiter Stufe nur das Anfangsglied einer unendlichen Kette von Moduln ist, die alle in vieler Hinsicht gleiche Berechtigung und Berücksichtigung beanspruchen können, zeigt der Herr Verfasser, dass die Legendre'sche Normalform nicht als Normalform schlechthin, sondern nur als solche zweiter Stufe erscheint, an die sich, den unendlich vielen Werthen von n entsprechend, unendlich viele Normalformen n^{ter} Stufe anreihen. Es wird nun gesetzt:

$$\begin{aligned}
\varrho x_0 &= \sigma(u-a_1).\sigma(u-a_2)\dots\sigma(u-a_n)\\
\varrho x_1 &= \sigma(u-b_1).\sigma(u-b_2)\dots\sigma(u-b_n)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\varrho x_{n-1} &= \sigma(u-n_1).\sigma(u-n_2)\dots\sigma(u-n_n),
\end{aligned}$$

wo unter $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ homogene Variabeln, unter ϱ ein Proportionalitätsfactor verstanden sind, und wo die σ-Producte von einander unabhängig sind. Der Quotient je zweier solcher Pro-

ducte, für welche die Bedingung $\Sigma a = \Sigma b =$ etc. gilt, ist, wie Herr Hermite gezeigt hat, eine doppelt-periodische Function mit den Perioden ω_1, ω_2 der σ-Function, und alle solche Producte lassen sich aus n unabhängigen derselben linear zusammensetzen. Betrachtet man die x als Coordinaten eines Punktes im Raume von $(n-1)$ Dimensionen, so stellen die obigen Formeln eine Curve dar, die das Geschlecht 1 und die Ordnung n hat, und eine elliptische Curve der n^{ten} Stufe genannt wird. Die Variable u, als Integral an einer solchen Curve hinerstreckt, ist ein Integral der n^{ten} Stufe. Die Normalformen für diese Curven n^{ter} Stufe werden durch eine geeignete lineare Transformation der x gewonnen. Im Folgenden werden die Resultate für die dritte und fünfte Stufe, die Herr Bianchi auf Veranlassung des Herrn Klein ausführlich behandelt hat, mitgetheilt. M.

L. Bianchi. Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung.
Clebsch Ann. XVII. 234-262.

Die ausführliche Darlegung der Untersuchungen über die Normalform der dritten und fünften Stufe, von denen Herr Klein in der vorstehenden Arbeit Mittheilung gemacht hatte (siehe das obige Referat). Für die dritte Stufe werden die neun Wendepunkte und die vier Wendedreiecke der ebenen Curve dritter Ordnung benutzt; es ergiebt sich, dass die hier auftretende Constante a für das an der Curve hinerstreckte Integral die Tetraederirrationalität ist, und die letztere durch σ-Functionen ausgedrückt. Bei der fünften Stufe werden sechs fundamentale Pentaeder in Betracht gezogen, welche für die Curve fünfter Ordnung im Raume von vier Dimensionen den vier Wendedreiecken der ebenen Curve dritter Ordnung entsprechen. Die hier auftretende Constante a ist die Icosaederirrationalität in der gewöhnlichen Normalform. Das überall endliche, längs der Curve fünfter Ordnung hinerstreckte Integral erscheint in der Form:

$$U = C\int\frac{(u\,dv - v\,du)x_1}{(\varphi_0\varphi_1\varphi_2 uv)},$$

wo C eine Constante, u und v irgend zwei lineare Ausdrücke in den x und $(\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 uv)$ die Functionaldeterminante der Functionen φ_0, φ_1, φ_2, u, v bedeuten. M.

A. Brill. Ueber das Additionstheorem und das Umkehrproblem der elliptischen Functionen. Clebsch Ann. XVII. 87-102.

Es wird ein Weg angegeben, auf dem man ohne mühsame Rechnungen in naturgemässer Weise in die Lehre von den Thetafunctionen, welche den Kernpunkt der Theorie der elliptischen Functionen bildet, eingeführt wird. Hierbei werden nur die Periodicitäts-Eigenschaften des Integrals erster Gattung als bekannt vorausgesetzt. Der Gang ist folgender: Nachdem die Additionstheoreme für die Integrale erster, zweiter und dritter Gattung auf einfache Weise abgeleitet sind, wird das von Jacobi mit $\Pi(u, a)$ bezeichnete Integral dritter Gattung durch Addition eines Logarithmus und eines Integrals erster Gattung in eine Normalform übergeführt, welche bezüglich des Vorkommens von Argument und Parameter symmetrisch, und deren reeller Periodicitätsmodul Null ist. Die vollständige Normirung geschieht dann, nachdem die Periodicitätseigenschaften der Integrale zweiter und dritter Gattung kurz entwickelt worden sind. Dieser, auch in der Theorie der Abel'schen Functionen fruchtbare Process der Normirung des Integrals dritter Gattung, dem zu diesem Zweck die Form eines Doppelintegrals gegeben wird, drängt nun von selbst auf die Einführung der Jacobi'schen Functionen Z und Θ. M.

Gräfe. Kurze Ableitung der Additionstheoreme der elliptischen Integrale aus der Gleichung $\frac{da}{\Delta a} + \frac{db}{\Delta b} = 0$. Borchardt J. XC. 83-84.

Sind a, b, c die Seiten, A, B, C die Winkel eines sphärischen Dreiecks, mit der Bedingung $\frac{\sin A}{\sin a} = k < 1$, so liefert der

Cosinussatz in Verbindung mit $F(a)+F(b)=F(c)$ vollständige Integralgleichungen der obigen Differentialgleichung. Die Additionstheoreme der elliptischen Integrale 2[ter] und 3[ter] Gattung werden auf einfache Weise erhalten, indem man die vorgelegte Differentialgleichung resp. mit den Functionen

$$-\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+n\sin^2 a}+\frac{1}{1+n\sin^2 b}$$

multiplicirt. M.

Müller. Eine neue Ableitung des Additionstheorems für elliptische Integrale. I. Theil. Pr. Gross-Glogau.

Der Herr Verfasser geht von der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right\}=\frac{k^2}{r}-\alpha$$

aus, auf welche nach der Hamilton-Jacobi'schen Methode die Differentialgleichung der Bewegung eines Punktes P mit der Masse 1, der von einem anderen Punkte C_1 mit der Masse 1 nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze angezogen wird, gebracht werden kann. Die Aufgabe führt zu der partiellen Differentialgleichung

$$(s^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)^2-(\sigma^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)^2=k^2(s-\sigma)-\frac{1}{2}\alpha(s^2-\sigma^2),$$

von der eine vollständige Lösung gesucht wird. Die elliptischen Integrale, zu welcher die Lösung gelangt, werden nun auf die Normalform gebracht. Die vollständige Herleitung des Additionstheorems, an der noch die algebraische Relation zwischen der oberen Grenzen der Integrale fehlt, die dadurch gewonnen wird, dass man die Zeit t durch algebraische und cyklometrische Functionen ausdrückt, wird einer späteren Veröffentlichung vorbehalten. M.

Ph. Gilbert. Note sur la formule d'addition des fonctions elliptiques. Ann. Soc. scient. Brux. IV. B. 87-90.

Es wird folgender Gedanke durchgeführt: Das Theorem von Hermite über die Zerlegung der doppelt-periodischen meromorphen

Functionen in halb-rationelle Brüche giebt

$$\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{sn}^2 z - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{1}{2D \operatorname{sn} a}\left[\frac{1}{\operatorname{sn}(z+a)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(z-a)}\right],$$

eine Relation, aus welcher leicht das Additionstheorem hergeleitet werden kann. Mn. (M.)

J. Griffiths. Note (1) on a geometrical form of Landen's theorem with regard to a hyperbolic arc; (2) on a class of closed curves whose arcs possess the same property as two Fagnanian arcs of an ellipse.
Proc. L. M. S. XI. 87-91.

Landen's Theorem wird mit Hülfe einer Ellipse, deren Axen $2a$ und $2b$, einer zweiten Ellipse, deren Axen $2(1+e)$ und $2(1-e)$, und einer Hyperbel, deren Queraxe $2e$ und deren Excentricität $\frac{1}{e}$ ist, bewiesen. Die in dem zweiten Theil behandelten Curven genügen der Gleichung

$$F(p^2(a^2+b^2-r^2),\ r^2(a^2+b^2-p^2),\ c) = 0,$$

worin F eine willkürliche Function, c eine Constante, r den Radiusvector vom Pol aus, p die Länge der Senkrechten vom Pol auf die Tangente bedeuten. M.

G. Morera. Sopra una nuova costruzione geometrica del teorema dell' addizione degli integrali ellittici.
Atti di Torino XV. 649-653.

Bei der Behandlung der Bewegung eines Punktes, der nach dem Newton'schen Gesetz von zwei festen Centren angezogen wird (s. Battaglini G. XVIII. p. 34-72, s. diesen Band, Abschn. X. Cap. 4. A.) ist der Herr Verfasser auf eine geometrische Darstellung des Additionstheorems der elliptischen Integrale geführt worden. Das algebraische Integral der Gleichung

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2-a^2)(\sigma^2-\varepsilon^2)}} - \frac{d\delta}{\sqrt{(a^2-\delta^2)(\varepsilon^2-\delta^2)}} = 0$$

lässt sich unter eine der Formen

$$a\cos\alpha = \frac{\sigma\sqrt{\varepsilon^2-\delta^2}\sqrt{a^2-\delta^2}+\delta\sqrt{\sigma^2-\varepsilon^2}\sqrt{\sigma^2-a^2}}{\sigma^2-\delta^2},$$

$$a\sin\alpha = \frac{\sigma\sqrt{\sigma^2-\varepsilon^2}\sqrt{a^2-\delta^2}-\delta\sqrt{\varepsilon^2-\delta^2}\sqrt{\sigma^2-a^2}}{\sigma^2-\delta^2},$$

$$\sqrt{\varepsilon^2-a^2}\cos\alpha = \frac{\sigma\sqrt{\varepsilon^2-\delta^2}\sqrt{\sigma^2-a^2}-\delta\sqrt{\sigma^2-\varepsilon^2}\sqrt{a^2-\delta^2}}{\sigma^2-\delta^2}$$

setzen, worin das Euler'sche Theorem besteht. M.

H. H. TURNER. On the curves represented by the equation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

and their envelopes. Messenger (2) X. 21-25.

Die durch die obige Gleichung (die Additionsgleichung für die elliptischen Functionen) definirten Curven werden discutirt, besonders in Beziehung auf ihre Enveloppen, die gerade Linien sind. Für specielle Fälle sind Zeichnungen der Curven gegeben.

Glr. (O.)

KLEIBER. Ableitung eines Systems von Formeln für die elliptischen Functionen und ihr Zusammenhang mit der sphärischen Trigonometrie. Pr. Königsberg.

Aus dem Additionstheoreme der Θ-Functionen mit vier Argumenten, dessen Beweis nach dem Vortrage Richelot's (Vorlesung i. J. 1867) hier vorangeschickt wird, werden 576 Formeln für die elliptischen Functionen abgeleitet, welche den von Jacobi, Fundam. nov. § 18 No. 16 bis 23 gegebenen ähnlich sind. Die gewonnenen Resultate lassen sich auf die sphärische Trigonometrie anwenden (cf. Durège, Elliptische Functionen § 31 ff.) und geben neue, den Gauss'schen ähnliche Formeln für ein sphärisches Dreieck. M.

J. W. L. GLAISHER. Systems of formulae in elliptic functions. Messenger (2) X. 104-111.

Die hier gegebenen Formeln bilden das vollständige System derjenigen Gleichungen, welche einigen der Gruppen entsprechen,

ie sich in dem IV. Capitel von Cayley's „Treatise on elliptic functions" (1876) und in Gudermann's „Theorie der Modularfunctionen nd der Modularintegrale" (Crelle J. XVII.) finden. Es werden ier Werthe ermittelt: 1) für $\mathrm{sn}^2 u$, $\mathrm{cn}^2 u$, $\mathrm{dn}^2 u$, ausgedrückt durch n$2u$, $\mathrm{dn}\, 2u$; 2) für $\mathrm{sn}(u+v)$ etc. ausgedrückt durch $\mathrm{sn}\, u, \dots$, $\mathrm{sn}\, v, \dots$;) für $\mathrm{sn}(u+\frac{1}{2}K), \dots$, $\mathrm{sn}(u+\frac{1}{2}iK'), \dots$, $\mathrm{sn}(u+\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}iK'), \dots$ durch $u, \dots$, 4) für $\mathrm{sn}^2(u+\frac{1}{2}K), \dots$, $\mathrm{sn}^2(u+\frac{1}{2}iK'), \dots$, $\mathrm{sn}^2(u+\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}iK'), \dots$ lurch $\mathrm{sn}\, 2u$, $\mathrm{cn}\, 2u$, $\mathrm{dn}\, 2u$. Z. B.:

$$\mathrm{n}^2 u = \frac{1-\mathrm{cn}\, 2u}{1+\mathrm{dn}\, 2u} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1-\mathrm{dn}\, 2u}{1+\mathrm{cn}\, 2u} = -\frac{1}{k^2}\cdot\frac{k'^2+k^2\mathrm{cn}\, 2u-\mathrm{dn}\, 2u}{\mathrm{dn}\, 2u-\mathrm{cn}\, 2u}$$
$$= \frac{\mathrm{dn}\, 2u-\mathrm{cn}\, 2u}{k'^2-k^2\mathrm{cn}\, 2u+\mathrm{dn}\, 2u}.$$

benso finden sich in der Arbeit Formeln für

$$\mathrm{sn}^2(u+\tfrac{1}{2}K), \dots, \mathrm{sn}^2(u+\tfrac{1}{2}iK'), \dots, \mathrm{sn}^2(u+\tfrac{1}{2}K+\tfrac{1}{2}iK')$$

usgedrückt durch $\mathrm{sn}\, u, \dots$, und für

$$\mathrm{sn}^4(u+\tfrac{1}{2}K), \dots, \mathrm{sn}^4(u+\tfrac{1}{2}iK'), \dots, \mathrm{sn}^4(u+\tfrac{1}{2}K+\tfrac{1}{2}iK'), \dots$$

usgedrückt durch $\mathrm{sn}\, 2u$, $\mathrm{cn}\, 2u$, $\mathrm{dn}\, 2u$. Glr. (M.)

J. W. L. Glaisher. On the deduction of trigonometrical from elliptic function formulae. Rep. Brit. Ass. 1880.

Die von dem Herrn Verfasser befolgte Methode besteht larin, dass die elliptischen Functionen nach Potenzen von k^2 entwickelt, und dass in den betreffenden Relationen die Coefficienten von k^2, k^4, etc. gleich Null gesetzt werden. Csy. (M.)

N. M. Ferrers. Note on elliptic functions. Messenger (2) X. 102-103.

Die Formeln

$$k\,\mathrm{sn}(u+v)\mathrm{sn}(u-v)\pm 1 = \pm\frac{(1\pm k\,\mathrm{sn}^2 u)(1\mp k\,\mathrm{sn}^2 v)}{1-k^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v},$$

$$k\,\mathrm{cn}(u+v)\,\mathrm{cn}(u-v)\pm ik' = \frac{(k\,\mathrm{cn}^2 u\pm ik')(k\,\mathrm{cn}^2 v\pm ik')}{(k\pm ik')(1-k^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v)},$$

$$\mathrm{dn}(u+v)\,\mathrm{dn}(u-v)\pm k' = \frac{(\mathrm{dn}^2 u\pm k')(\mathrm{dn}^2 v\pm k')}{(1\pm k')(1-k^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v)}$$

werden hergeleitet. Glr. (M.)

M. M. V. Wilkinson. An elliptic function identity. Messenger (2) X. 65.

J. W. L. Glaisher. On some elliptic function and trigonometrical theorems. Messenger (2) X. 92-97.

J. W. L. Glaisher. A system of trigonometrical formulae. Messenger (2) X. 73-78.

Schreibt man $S_1, S_2, \dots S_6$ für $\operatorname{sn} A$, $\operatorname{sn}(B-C)$, ... $\operatorname{sn}(A-B)$ so dass die Indices $1, 2, \dots 6$ resp. den sechs Argumenten A, $B-C$, B, $C-A$, C, $A-B$ entsprechen, so lauten die Identitäten des Herrn Wilkinson:

$$\begin{aligned}(S_1S_2+S_3S_4+S_5S_6)&(S_1S_4S_6+S_3S_6S_2+S_5S_2S_4+S_1S_3S_5)\\ &= -S_2S_3S_5(S_2^2+S_3^2+S_5^2)-S_4S_5S_1(S_4^2+S_5^2+S_1^2)\\ &\quad -S_6S_1S_3(S_6^2+S_1^2+S_3^2)-S_2S_4S_6(S_2^2+S_4^2+S_6^2).\end{aligned}$$

In der zweiten Note wird bewiesen, dass:

$$\begin{aligned}&S_1S_4S_6(S_2^2+S_3^2+S_5^2)+S_3S_6S_2(S_4^2+S_5^2+S_1^2)\\ &+S_5S_2S_4(S_6^2+S_1^2+S_3^2)+S_1S_3S_5(S_2^2+S_4^2+S_6^2)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&S_2S_3S_5(S_1^2+S_4^2+S_6^2)+S_4S_5S_1(S_3^2+S_6^2+S_2^2)\\ &+S_6S_1S_3(S_5^2+S_2^2+S_4^2)+S_2S_4S_6(S_1^2+S_3^2+S_5^2)\\ &+k^2S_1S_2S_3S_4S_5S_6(S_1S_4S_6+S_3S_6S_2+S_5S_2S_4+S_1S_3S_5)=0,\end{aligned}$$

und werden andere ähnliche Resultate hergeleitet. Entsprechende Formeln existiren für T_1, T_2, etc., wo $T_1 = \frac{\operatorname{sn} A}{\operatorname{cn} A}$, etc., sowie trigonometrische Theoreme, die aus jenen sich ergeben und die Functionen $s_1 = \sin A$, etc., $t_1 = \operatorname{tg} A$, etc. betreffen, z. B.:

$$s_1s_2(s_1^2+s_2^2)+s_3s_4(s_3^2+s_4^2)+s_5s_6(s_5^2+s_6^2)-4s_1s_2s_3s_4s_5s_6 = 0.$$

Die dritte Abhandlung enthält ähnliche trigonometrische Formeln, in denen dieselben Argumente wie in den anderen beiden Arbeiten vorkommen. Auch diese Formeln werden aus entsprechenden für elliptische Functionen abgeleitet. Es wird ein System von 32 Formeln gegeben, wie z. B.:

$$\begin{aligned}s_5(s_1s_4+s_2s_3)+s_6(s_1s_3+s_2s_4) &= 0,\\ s_5(s_2c_3+s_4c_1)+s_6(s_1c_3+s_4c_2) &= 0,\end{aligned}$$

und 32 andere, wie

$$s_5(c_1c_4-c_2c_3)+s_6(c_3c_4-c_1c_2) = 0,$$
$$s_5(s_1c_4-s_3c_3)+s_6(s_2c_4-s_3c_1) = 0$$

werden aus jenen gefolgert. Zugleich mit der Herleitung dieser Formeln werden ihre gegenseitigen Beziehungen erörtert.

Glr. (M.)

W. L. Glaisher. On the addition equation for the third elliptic integral. Messenger (2) X. 124-135.

Das Additionstheorem für das elliptische Integral dritter Gattung lautet

$$\Pi(u,a)+\Pi(v,a)-\Pi(u+v,a) = \tfrac{1}{2}\log\Omega,$$

wo

$$\Omega = \frac{1-k^2\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}v.\operatorname{sn}a.\operatorname{sn}(u+v-a)}{1+k^2\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}v.\operatorname{sn}a.\operatorname{sn}(u+v+a)}.$$

Zwei andere Formen für Ω wurden von Jacobi in seinen Fundamenta nova gegeben. Die vorliegende Arbeit enthält eine Zusammenstellung von 96 Ausdrücken für Ω, in deren Zähler die 4 Argumente $u, v, a, u+v-a$, in deren Nenner $u, v, a, u+v+a$ vorkommen. Z. B.:

$$\Omega = \frac{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v\operatorname{dn}a\operatorname{dn}(u+v-a)-k^2\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v\operatorname{cn}a\operatorname{cn}(u+v-a)}{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v\operatorname{dn}a\operatorname{dn}(u+v+a)-k^2\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v\operatorname{cn}a\operatorname{cn}(u+v+a)}$$

$$= \frac{\{k'^2+k^2\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v\operatorname{cn}a\operatorname{cn}(u+v-a)\}\operatorname{dn}(u+a)\operatorname{dn}(v+a)}{\{k'^2+k^2\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v\operatorname{cn}a\operatorname{cn}(u+v+a)\}\operatorname{dn}(u-a)\operatorname{dn}(v-a)}$$

$$= \frac{\{\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v-\operatorname{sn}a\operatorname{sn}(u+v-a)\}\operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(v+a)}{\{\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v+\operatorname{sn}a\operatorname{sn}(u+v+a)\}\operatorname{sn}(u-a)\operatorname{sn}(v-a)}$$

$$= \frac{\{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v-\operatorname{dn}a\operatorname{dn}(u+v-a)\}\operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(v+a)}{\{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v-\operatorname{dn}a\operatorname{dn}(u+v+a)\}\operatorname{sn}(u-a)\operatorname{sn}(v-a)}$$

$$= \frac{\{k'^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v-\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}a\operatorname{dn}(u+v-a)\}\operatorname{dn}(u+a)\operatorname{dn}(v+a)}{\{k'^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v-\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}a\operatorname{dn}(u+v+a)\}\operatorname{dn}(u-a)\operatorname{dn}(v-a)}$$

$$= \frac{\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v-\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}a\operatorname{dn}(u+v-a)}{\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v-\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}a\operatorname{dn}(u+v+a)}$$

$$= \frac{\{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}a+k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}a\operatorname{cn}v\operatorname{cn}(u+v-a)\}\operatorname{dn}(u+a)}{\{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}a-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}a\operatorname{cn}v\operatorname{cn}(u+v+a)\}\operatorname{dn}(u-a)}$$

$$= \frac{\{\operatorname{cn}a\operatorname{dn}(u+v-a)\operatorname{sn}u+\operatorname{cn}(u+v-a)\operatorname{dn}a\operatorname{sn}v\}\operatorname{cn}(v+a)\operatorname{dn}(u+a)}{\{\operatorname{cn}a\operatorname{dn}(u+v+a)\operatorname{sn}u+\operatorname{cn}(u+v+a)\operatorname{dn}a\operatorname{sn}v\}\operatorname{cn}(v-a)\operatorname{dn}(u-a)}$$

etc. etc.

Es werden diese Werthe für Ω discutirt, und einige andere ge-geben, in denen die acht Grössen

$$u,\ v,\ a,\ u+v-a,\ u+a,\ v+a,\ 2a$$

als Argumente auftreten. Glr. (M.)

A. G. Greenhill. Integrals expressed by inverse ellipti[c] functions. Proc. of Cambr. III. 361-372.

Eine Zusammenstellung von ungefähr 40 Integralen, di[e] durch inverse elliptische Functionen ausgedrückt sind, z. B.:

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} \arg \operatorname{cn} \left\{ \sqrt{\frac{a-b}{x-b}},\ \sqrt{\frac{b-c}{a-c}} \right\},$$

$$(\infty > x > a).$$

Die Resultate sind gewonnen aus den Werken von Legendre, Allégret, Königsberger u. a. Glr. (M.)

Ch. Hermite. Sur une proposition de la théorie de[s] fonctions elliptiques. C. R. XC. 1096-1098.

Der reelle Theil des Quotienten $\frac{K'}{K}$, wo

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}},\quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\varphi}}$$

und $k^2 = \alpha + \beta i$, ist positiv. M.

G. Darboux. Note sur deux intégrales elliptiques qui se présentent sous forme indéterminée. Mém. de Bord. (2) III. 373-376.

Im ersten Abschnitt wird ein Näherungswerth für das elliptische Integral

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2\varphi}}$$

für den Fall gegeben, wenn der Modul k sich dem Werthe Null

nähert; im zweiten wird der Werth des Integrals dritter Gattung

$$\int_0^u \frac{dn'a.du}{sn'a.cn'a(1+k^2 tn'^2 a.sn^2 u)}$$

ermittelt, der dem Werthe K' des Parameters a entspricht.

M.

G. Mittag-Leffler. Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce. C. R. XC. 177-180.

Herr Hermite hat gezeigt, dass die Function $F(x)$, für welche

$$F(x+2K) = \mu F(x), \quad F(x+2iK') = \mu' F(x)$$

ist, und in der Umgebung eines Poles a die Entwickelung

$$F(a+\varepsilon) + A\varepsilon^{-1} + A_1 D\varepsilon^{-1} + \cdots + A_\alpha D^\alpha \varepsilon^{-1} + B + B_1 \varepsilon + \cdots$$

stattfindet, dargestellt werden könne durch die Formel:

$$F(x) = \Sigma[Af(x-a) + A_1 Df(x-a) + \cdots + A_\alpha D^\alpha f(x-a)],$$

wo die Summe alle Pole a innerhalb des Periodenparallelogramms

$$p+\xi 2K+\eta 2iK', \quad 0 \leqq \xi < 1, \quad 0 < \eta < 1,$$

umfasst, und p eine Constante ist. Herr Mittag-Leffler beweist, dass die Entwickelung dann nicht mehr gültig ist, wenn die Constanten μ, μ' von der Form

$$\mu = e^{\lambda 2K}, \quad \mu' = e^{\lambda 2iK'}$$

sind, und giebt eine entsprechende Darstellung für diesen Ausnahmefall.

M.

H. J. S. Smith. On the kind of periodicity presented by some elliptic functions. Rep. Brit. Ass. 1880.

Csy.

J. Farkas. Sur une classe de deux fonctions doublement périodiques. C. R. XC. 1269-1271.

Im Anschluss an die Untersuchungen, welche der Herr Verfasser in seiner Schrift: „Généralisation du logarithme et de l'exponentielle," Budapest 1879, s. F. d. M. XI. 281, veröffent-

licht hat, leitet derselbe das Additionstheorem für die Functionen

$$(x)_1 = \sqrt{1-u}, \quad \text{wo } x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u}\,\sqrt{1-u\cos^2\alpha}\,\sqrt{1-u\sin^2\alpha}},$$

und

$$(x)' = (x+\vartheta)_1, \quad \text{wo } \vartheta = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}\,\sqrt{1-u\cos^2\alpha}\,\sqrt{1-u\sin^2\alpha}},$$

her. **M.**

J. Farkas. Sur les fonctions elliptiques. C. R. XC. 1482-148

Aus den Formeln

$$\log[\sqrt{-1}.x]_1 = \sqrt{-1}.\mathrm{am}\,x,$$

$$[\sqrt{-1}.x]_1 = \mathrm{cn}\,x + \sqrt{-1}.\mathrm{sn}\,x,$$

$$[\sqrt{-1}.x]' = \sqrt{-1}\,\frac{1-\mathrm{dn}\,x}{k\,\mathrm{sn}\,x} = \sqrt{-1}\,\frac{k\,\mathrm{sn}\,x}{1+\mathrm{dn}\,x}$$

werden Theoreme für die Addition der Argumente in den Functionen $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$ und $\frac{k\,\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{dn}\,x} = \mathrm{bn}\,x$ hergeleitet.

M.

J. W. L. Glaisher. A chapter in elliptic functions. Quart. J. XVII. 50-65.

Dieses Capitel aus der Theorie der elliptischen Functionen bezieht sich auf die Entwickelungen der Functionen $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$, $\frac{1}{\mathrm{sn}\,u}$, $\frac{1}{\mathrm{cn}\,u}$, $\frac{1}{\mathrm{dn}\,u}$ nach den q, von denen die drei ersten die wichtigeren sind, da sie auf die Function $Z(u)$ führen. Die Logarithmen der Producte für $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$, entwickelt und differentiirt, ergeben die q-Reihen für

$$\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}, \quad \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}, \quad \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},$$

aber nicht für die einfachen Functionen $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$. Deshalb hat der Herr Verfasser sich die Aufgabe gestellt, die q-Reihen

lr sn$u$, cn$u$, dn$u$ direct aus den q-Producten

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \cdot 2q^{\frac{1}{4}} \cdot \sin x \cdot \Pi \frac{1-2q^{2n}\cos 2x + q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x + q^{4n-2}},$$

$$\operatorname{cn} u = \text{etc.}, \ \operatorname{dn} = \text{etc.}$$

bzuleiten. M.

. W. L. Glaisher. Note on a method of obtaining the q-formula for the sine-amplitude in elliptic functions. Proc. L. M. S XI. 45-47.

Eine kurze Methode, mittels der die Entwickelung von sn$u$ ach q aus den q-Producten für sn$u$, cn$u$, dn$u$ hergeleitet weren kann, wird angedeutet. Siehe das vorstehende Referat.

M.

). André. Développements, par rapport au module, des fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$ et de leurs puissances. Ann. de l'Éc. N. (2) IX. 107-118.

Beendigung der Untersuchungen über die Entwickelungen er elliptischen Functionen, welche im VI. Bande de l'Éc. Norm. egonnen wurden (siehe F. d. M. XI. 1879. p. 289), und deren Resultate zuerst in einer Note der C. R. LXXXV. 786 (siehe F. d. M. IX. 1877. p. 351) mitgetheilt wurden. M.

). Bierens de Haan. Sur la différentiation de quelques intégrales elliptiques par rapport au module ou à une fonction du module. Arch. Néerl. XV. 225-268.

Siehe F. d. M. X. 1878. p. 303. G.

P. Appell. Intégration de certaines équations différentielles à l'aide des fonctions Θ. C. R. XC. 1207-1210.

Aus dem Theorem von Riemann über die Nullwerthe der ϑ-Functionen mehrerer Variabeln (Werke, S. 198) leitet Herr Appell

das Resultat her, dass das allgemeine Integral der Differential-gleichung

$$(dx\,d^2y - dy\,d^2x)(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 =$$
$$\sqrt{\{(\alpha dy - \alpha' dx)(\lambda_1 dy - \mu_1 dx)(\lambda_2 dy - \mu_2 dx)\ldots(\lambda_5 dy - \mu_5 dx)\}},$$

wo

$$\lambda_n = \alpha b_n - \beta a_n, \quad \mu_n = \alpha' b_n - \beta' a_n, \qquad (n = 1, 2, 3, 4, 5)$$

ist, die Form

$$\Theta(x+A, y+B) = 0$$

hat, wo A und B Constante sind und unter $\Theta(x, y)$ eine m[it] den Normal-Perioden der Integrale

$$u_1(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\alpha t + \beta}{\sqrt{f(t)}}\,dt, \quad u_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\alpha' t + \beta'}{\sqrt{f(t)}}\,dt$$

gebildete Θ-Function zu verstehen ist. Dieses Resultat wird a[uf] Θ-Functionen beliebig vieler Variabeln ausgedehnt. M.

J. Thomae. Convergenz der Thetareihen. Schlömilch [Z.] XXV. 43-44.

Die Riemann'sche Methode führt die Convergenz der meh[r]fach unendlichen Thetareihen auf die mehrfacher bestimmter In[-]tegrale zurück. Eine zweite Methode besteht darin, dass ma[n] durch Zerlegung der quadratischen Form

$$f(x_1, x_2, \ldots x_\mu) = \sum_{1}^{\mu}{}_\mu \sum_{1}^{\nu}{}_\nu\, \tau_{\mu\nu}\, x_\mu x_\nu$$

in eine Summe von Quadraten die Reihe mit einem Produc[t] von p einfach unendlichen Reihen vergleicht, deren Terme grösse[r] als die der vorgelegten Reihe sind, und die doch convergir[en]. Eine dritte für Vorlesungen sehr geeignete Methode hat Her[r] Thomae gefunden. Sie erlaubt für $p = 2$ und $p = 3$ die An[-]wendung graphischer Darstellung, und es wird direct die Theta[-]reihe mit einer einfach unendlichen Reihe verglichen. In vor[-]liegender Note wird der Beweis für $p = 2$ durchgeführt.

M.

F. KLEIN. Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Clebsch Ann. XVII. 62-70.

Ein Abdruck der Note in den Münch. Ber. 1879, s. F. d. M. XI. p. 300. M.

F. KLEIN. On the transformation of elliptic functions. Proc. L. M. S. XI. 151-152.

Einige der für die Transformation 5ten, 7ten und 11ten Grades der elliptischen Functionen früher (Clebsch Ann. XIV. und XV., s. F. d. M. X. 1878. p. 69, XI. 1879. p. 279, 299) gefundenen Resultate werden hier in homogener Form dargestellt. M.

E. MEISSEL. Beiträge zur Sphärik. Clebsch Ann. XVI. 529-532.

Die von dem Herrn Verfasser in den Astr. Nachr. XCI. No. 2261, (s. F. d. M. XI. 1879. p. 794), mitgetheilten Reihen für die sechs Elemente des sphärischen Dreiecks werden hier aus Reihen hergeleitet, welche Jacobi, Fundamenta Nova p. 101 und 102, gegeben hat. Es folgen Anwendungen elliptischer Transformationen auf die Sphärik. M.

A. ENNEPER. Ueber eine Gleichung zwischen Thetafunctionen. Clebsch Ann. XVII. 213-216.

In dieser aus den Gött. Nachr. 1878 abgedruckten Note wird eine von Herrn Hermite (C. R. 1877. LXXXV. 731, s. F. d. M. IX. p. 349) mitgetheilte und zur Integration einer Differentialgleichung verwandte bemerkenswerthe Relation zwischen Thetafunctionen:

$$\begin{aligned}-\vartheta'(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)+\vartheta(x+y+z)\vartheta'(x)\vartheta(y)\vartheta(z)\\+\vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta'(y)\vartheta(z)+\vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta'(z)\\=\vartheta_1'(0)\vartheta_1(y+z)\vartheta_1(x+z)\vartheta_1(x+y)\end{aligned}$$

aus Jacobi's Multiplicationstheorem der Thetafunctionen hergeleitet, und gezeigt, wie ähnliche Relationen sich ergeben. Als Folgerung aus obiger Relation ergiebt sich eine der von Herrn

Hermite (l. c. p. 824) auf anderem Wege gefundenen Differentialgleichungen. Am Schluss wird der von Hermite (Astr. Nachr. XCVI. 332) mitgetheilte Differentialquotient von $\operatorname{sn} u$ auf einfache Weise hergeleitet und in Bezug auf die Vorzeichen der Glieder der rechten Seite berichtigt. M.

David. Sur la transformation des fonctions Θ.
Liouville J. (3) VI. 187-214.

Das Problem der Transformation der Thetafunctionen wurde im Jahre 1858 in Liouville J. von Herrn Hermite gelöst, der eine die vier Functionen ϑ umfassende Formel gab. Da jede intermediäre Function

$$C.e^{\pi i(az^2+2bz)}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']}$$

d. h. nach der Definition von Briot und Bouquet solche, deren Quotienten doppelt-periodische Functionen geben, sich durch eine der Functionen ϑ ausdrücken lässt, so ist damit das Problem dieser Transformation in theoretischer Hinsicht vollständig gelöst. Herr David betrachtet denselben Gegenstand von etwas allgemeinerem Gesichtspunkte und erhält dadurch einfachere und symmetrischere Formeln. Er giebt nämlich die Summe der Reihe

$$U = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} e^{\varrho\left(p+\frac{2K}{q}\right)\pi i+\varrho^2\frac{p\pi i}{q}},$$

welche für $K=0$ in die von Herrn Hermite gegebene übergeht und für ein grades q der Gauss'schen Reihe

$$U = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} e^{\varrho^2\frac{2h\pi i}{q}}$$

analog ist. Auch die von Lebesgue (Liouville J. XII.) eingeführte Reihe

$$U = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q-1} e^{\frac{\varrho^2+\varrho}{2}\cdot\frac{2h\pi i}{q}}$$

ist ein specieller Fall der obigen. M.

G. Frobenius. Zur Theorie der Transformation der Thetafunctionen. Borchardt J. LXXXIX. 40-46.

Die alternirende bilineare Form von der Determinante 1

$$A = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

welche in der Theorie der Transformation der Thetafunctionen in sich selbst, multiplicirt mit einer ganzen Zahl n, übergeführt werden muss (s. Weber, Brioschi Ann. (2) IX. 126, s. F. d. M. XI. 1879 p. 328), wird durch die symbolische Gleichung

$$A'JA = nJ$$

definirt, wo

$$J = \Sigma i_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

und A' die conjugirte Form von A ist (s. des Verfassers Arbeit über lineare Substitutionen und bilineare Formen (Borchardt J. LXXXIV. 1, siehe F. d. M. IX. 1877. p. 85.). Ist

$$E = \sum_{1}^{2\varrho}{}_\alpha\, x_\alpha y_\alpha,$$

so ist

$$J^2 = -E,\quad J^4 = E,\quad J^3 = J^{-1} = -J = J'.$$

Der Herr Verfasser zeigt nun, dass zur Construction ganzzahliger Systeme A, deren Coefficienten den letzten Gleichungen genügen, sich eine von ihm in seiner „Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten" (Borchardt J. LXXXVI. 146, s. F. d. M. X. 1878. p. 79) zur Ermittelung von unimodularen Determinanten benutzte Methode übertragen lässt. Diese Methode ist zuerst von Gauss (Disqu. arithm. § 279) gegeben worden und beruht auf der successiven simultanen Bestimmung zweier reciproker Determinanten. M.

F. Klein. Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Functionen. Clebsch Ann. XVII. 565-574.

Die von dem Herrn Verfasser bei seiner Untersuchung über die Transformation fünfter, siebenter und elfter Ordnung der elliptischen Functionen (Clebsch Ann. XIV. und XV.) als geeignete Moduln benutzten Systeme von Verhältnisgrössen wurden durch geometrisch-functionentheoretische Methoden ihrer Existenz und

Eigenart nach behandelt. Im Vorliegenden werden nun diese Verhältnisgrössen in unmittelbaren Zusammenhang mit der gewöhnlichen Theorie der ϑ-Functionen gebracht, und sie ergeben sich als gradezu gewissen Theilwerthen der Function $\vartheta_1(x, e^{i\pi\omega})$ proportional. Aus den gewöhnlichen Reihenentwickelungen der Thetafunctionen werden dann auf leichte Weise für ein beliebiges ungrades n Resultate abgeleitet, welche die in den oben genannten Untersuchungen gefundenen Resultate als specielle Fälle enthalten.

M.

Elliot. Généralisation de deux théorèmes sur les fonctions Θ. C. R. XC. 352-354.

In der Theorie der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan ist ein sogenanntes erweitertes Umkehrproblem behandelt, in dem ausser den Summen für die p Integrale 1ter Gattung noch solche für q Integrale 3ter Gattung auftreten. Die Lösung dieses Problems führt auf eine mit $\Theta^{(q)}$ bezeichnete Function, die sich als Summe einer Reihe von Gliedern darstellt, jedes Glied gebildet als Product aus einer gewöhnlichen Θ-Function und einer Exponentialfunction, deren Exponent Integrale 3ter Gattung enthält. Auf diese Function Θ^q dehnt der Verfasser die beiden Theoreme von Riemann über die gewöhnlichen Θ-Functionen aus, welche die Zahl und Lage der Nullpunkte einer Θ-Function bestimmen und bei Riemann die Grundlage für die Lösung des Umkehrproblems bilden. Die Behandlung schliesst sich an Briot, „Théorie des fonctions Abéliennes" (Paris 1879) an. Bezeichnet man durch u_i $(i = 1, 2, \dots p)$ die p Normalintegrale 1ter Gattung, durch v_k $(k = 1, 2, \dots q)$ q Normalintegrale 3ter Gattung, alle mit derselben oberen Grenze (xy), so lauten die beiden Theoreme:

1) Die Function

$$\Theta^{(q)}(u_i - G_i,\ v_k - g_k)$$

hat $(p+q)$ Nullpunkte

$$(x_1 y_1),\ (x_2 y_2),\ \dots\ (x_{p+q}\, y_{p+q}).$$

2) Diese $(p+q)$ Nullpunkte genügen den Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{h=p+q} u_i(x_h y_h) - G_i \equiv C_i \quad (i = 1, 2, \dots p),$$
$$\sum_{h=1}^{h=p+q} v_k(x_h y_h) - g_k = c_k \quad (k = 1, 2, \dots q),$$

wo C_i und c_k von den G_i und g_k unabhängige Constante sind.

H. St.

Elliot. Sur le problème de l'inversion. C. R. XC. 1466-1468.

In einer früheren Note (C.R. XC. 352, s.d. vorgehende Referat) hat der Herr Verfasser zwei Eigenschaften der Functionen $\Theta^{(q)}$ entwickelt, in denen p Abel'sche Normalintegrale erster Gattung und q Normalintegrale dritter Gattung auftreten. Ersetzt man diese Integrale durch willkürliche Grössen, so wird $\Theta^{(q)}$ eine Function von $p+q$ unabhängigen Variabeln. Im Vorliegenden wird gezeigt, wie man mit Hülfe dieser Functionen $\Theta^{(q)}$ nach Riemann'scher Methode ein System Abel'scher Differentialgleichungen, die auf Integrale dritter Gattung ausgedehnt werden, integriren kann. Auf ganz anderem Wege ist dieses Problem bekanntlich von Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Functionen) gelöst worden.

M.

K. Schwering. Ueber eine Art Curven, deren Bogen durch ein elliptisches oder hyperelliptisches Integral erster Gattung ausgedrückt wird. Schlömilch Z. XXV. 234-243.

Der Herr Verfasser wendet seine in der Arbeit über eine eigenthümliche Deformation der Kegelschnitte (Schlömilch Z. XXV. 25, s. Abschn. IX. Cap. 3. C.) benutzten Methoden auf die von Herrn Kiepert (Borchardt J. LXXIX. 304, s. F. d. M. VII. 1875. p. 281) untersuchten Curven mit elliptischem Bogenintegral an. Es gelingt, in dem ersten Hauptfalle die allgemeinen Formen derselben aufzufinden. Nachdem die Fälle $n=5$ und $n=7$ durchgeführt sind, wird ein gradzahliges n betrachtet. Zum Schlusse werden die Methoden auf hyperelliptische Integrale angewendet.

M.

G. Darboux. Sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique. C. R. XC. 85-87.

Einfacher Beweis des Satzes: „So oft ein Polygon n^{ter} Ordnung existirt, das einem Kegelschnitte eingeschrieben und einem anderen umschrieben ist, kann man eine rationale Transformation n^{ter} Ordnung eines elliptischen Integrals in ein anderes erhalten; und umgekehrt." M.

Ch. Hermite. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. C. R. XC. 106-112, 201-208, 478-483, 643-649, 761-767.

Fortsetzungen der Abhandlungen in den fünf letzten Bänden der C. R. (s. F. d. M. IX. 1877. 349). Die vorliegenden Paragraphen stehen in Beziehung zu den wichtigen Entdeckungen des Herrn Fuchs über die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit das vollständige Integral einer linearen Differentialgleichung eine eindeutige Function der Variabeln sei. Diese Bedingungen werden angewendet auf das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$y''-\left[\frac{\operatorname{sn}a}{\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}(u-a)}+\frac{\operatorname{sn}b}{\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}(u-b)}\right]y'$$
$$+\left[\frac{A\operatorname{sn}a}{\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}(u-a)}+\frac{B\operatorname{sn}b}{\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}(u-b)}+\frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)}-C^2\right]y=0.$$

Alsdann wird der von Herrn Picard (C. R. LXXXIX. p. 140, siehe F. d. M. XI. 1879. p. 241) gefundene Satz bewiesen, dass dieses Integral durch zwei doppelt-periodische Functionen 2ter Gattung ausgedrückt werden kann. Im Folgenden wird diese Theorie angewendet auf die Bestimmung der Gleichgewichtsfigur einer elastischen Feder, die beliebigen Kräften unterworfen ist. Den Schluss bildet die Behandlung des Falles $n=2$ (siehe F. d. M. IX. 1877. p. 351). M.

L. Königsberger. Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf niedere Integralformen, speciell auf elliptische Integrale. Borchardt J. LXXXIX. 89-126.

Sind $y_1, y_2, \dots y_n$ n algebraische Functionen von x, welche durch n algebraische Gleichungen von der Form

$$y^\mu + f_1(x)\, y^{\mu-1} + f_2(x)\, y^{\mu-2} + \cdots + f_\mu(x) = 0$$

definirt werden, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, so wird als allgemeinster zwischen Abel'schen Integralen bestehender Zusammenhang eine Gleichung von der Form

$$\int^{x_1} F_1(x, y_1)dx + \int^{x_2} F_2(x, y_2)\, dx + \cdots + \int^{x_n} F_n(x, y_n)\, dx = u$$

erwiesen, worin u eine aus den Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ algebraisch zusammengesetzte Function bedeutet und die Grössen $x_1, x_2, \dots x_m$ von einander unabhängig, aber $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n$ von dieser abhängig sind. Durch Zurückführung der allgemeinen algebraischen Beziehungen zwischen den Variabeln auf rationale lässt sich nun jene allgemeine Relation vereinfachen und weiter untersuchen. Transformirt man die obige Relation in die Form

$$\int^{x_1} F_1(x, y_1)\, dx + \int^{x_2} F_2(x, y_2)\, dx + \cdots + \int^{x_m} F_m(x, y_m)\, dx$$
$$= -\int^{x_{m+1}} F_{m+1}(x, y_{m+1})\, dx - \cdots - \int^{x_n} F_n(x, y_n)\, dx + u,$$

so gehört jeder Art von Abel'schen Integralen der rechten Seite ein System von Integralen erster Gattung zu, deren Anzahl durch die den Integralen zukommende charakteristische Zahl ϱ bestimmt wird, deren Summe gleich einem Integrale erster Gattung ist, welches einem der auf der linken Seite der Transformationsgleichung befindlichen Abel'schen Integrale zugehört, und deren Grenzen die Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$z^\varrho + \varphi_1(x_1, Y_1)\, z^{\varrho-1} + \cdots + \varphi_\varrho(x_1, Y_1) = 0$$

sind, während die diesen Grenzen zugehörigen algebraischen Irrationalitäten rational durch die zugehörige Lösung dieser algebraischen Gleichung und x_1, Y_1 ausdrückbar sind. Dadurch ist die Frage der allgemeinen Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische Integrale und algebraisch-logarithmische Functionen auf die Frage der Reduction eines Abel'schen Integrales erster Gattung auf ein elliptisches Integral erster Gattung zurückgeführt. Bei der nun folgenden Behandlung dieses so reducirten

Problems ergeben sich bemerkenswerthe Beziehungen zu Sätzen über die Form der Entwickelung der algebraischen Functionen um deren Verzweigungspunkte herum und zu den Fundamentalsätzen der Kreistheilung. M.

J. Ptaszycki. Extrait d'une lettre à M. C. Neumann. Clebsch Ann. XVI. 264-266.

Es wird ein Integral aufgestellt, das sich, widersprechend den von Herrn Königsberger für die Reducirbarkeit hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen gegebenen Regeln (siehe Clebsch Ann. XI. 119, s. F. d. M. IX. 1877. p. 358), durch Logarithmen ausdrücken lässt. M.

H. Hettner. Ueber die Reduction der Integrale einer besonderen Classe von algebraischen Differentialen auf die hyperelliptischen Integrale. Diss. Berlin. 1877.

Das durch die irreducible algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ definirte algebraische Gebilde habe den Rang ϱ; ferner sei $H(xy, x'y')$ eine rationale Function des Paares (xy), die an den ϱ beliebig gewählten festen Stellen $(a_\varrho b_\varrho)_{\varrho=1,\dots\varrho}$ und der variabeln Stelle $(x'y')$ von der ersten Ordnung unendlich werde und an der vorgeschriebenen Stelle $(a_0 b_0)$ verschwinde, und in deren Entwickelung nach Potenzen von $(x - x')$ der Coefficient von $(x - x')^{-1}$ gleich -1 sei. Alsdann lassen sich durch die Entwickelungen

$$H(x_t^\alpha y_t^\alpha, x'y') = t^{-1}H(x'y')_\alpha + H^0(x'y')_\alpha - tH'(x'y')_\alpha + \cdots$$
$$(\alpha = 1, 2, \dots \varrho)$$

ϱ rationale von einander linear unabhängige Functionen $H(xy)_\alpha$ und ebensolche $H'(xy)_\alpha$ definiren, und die Integrale

$$\int H(xy)_\alpha dx, \quad \int H'(xy)_\alpha dx \qquad (\alpha = 1, 2, \dots \varrho)$$

und

$$\int H(x'y'xy)_\alpha dx$$

sind die ϱ Normalintegrale 1ter und 2ter und das Normalintegral 3ter Gattung. Führt man statt x, y zwei neue Variable ξ, η so ein, dass sowohl x und y rationale Functionen von ξ, η, als auch umgekehrt ξ, η rationale Functionen von x, y sind, so hat die transformirte Gleichung denselben Rang wie $F(x, y) = 0$. Ist $\varrho > 2$, so lässt sich die Gleichung nur in besonderen Fällen auf die der Theorie der hyperelliptischen Integrale zu Grunde liegende Gleichung

$$\eta^2 - R(\xi) = 0$$

durch eine eindeutige Transformation zurückführen. Der Herr Verfasser berechnet nun allgemein den Rang ϱ für das durch die Gleichung

$$F(x)y^4 + G(x)y^2 + H(x) = 0$$

definirte algebraische Gebilde, worin $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ ganze rationale Functionen von beliebig hohem Grade bedeuten. Nun wird jene Gleichung durch eine eindeutige Substitution so transformirt, dass sie im Unendlichen regulär ist, und es werden für die so transformirte Gleichung die ϱ Functionen $H(xy)_u$ allgemein hergestellt. Alsdann werden für $\varrho = 1$ und $\varrho = 2$ alle Gleichungen, und für ein beliebiges ϱ eine bestimmte Gattung von Gleichungen in die Normalform

$$\eta^2 - R(\xi) = 0$$

durch eine eindeutige Transformation übergeführt. In all diesen Fällen lassen sich dann die Integrale der aus der Gleichung

$$F(x)y^4 + G(x)y^2 + H(x) = 0$$

entspringenden algebraischen Differentiale unmittelbar auf die hyperelliptischen Integrale reduciren. M.

G. Hettner. Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen. Borchardt J. LXXXIX. 221-246.

Der Herr Verfasser gelangt auf einem Wege, der von dem von Borchardt eingeschlagenen abweicht, zur Ermittelung des Grenzwerthes des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen (Siehe wegen der Bezeichnungen das Referat über

die Borchardt'sche Fundamentalarbeit F. d. M. VIII. 1876, p. 300 Es wird bewiesen, dass, wenn die Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aus de Gleichungen

$$\alpha_0 = \delta\frac{acb'}{\Delta},\ \alpha_1 = \delta\frac{cc'e'}{\Delta},\ \alpha_2 = \delta\frac{ac''e'}{\Delta},\ \alpha_3 = \delta\frac{b'c'c''}{\Delta},$$

$$\Delta = (abceb'c'e'b''c''e'')^{\frac{1}{4}}$$

und $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ aus den analogen Gleichungen

$$\beta_0 = \delta\frac{a_1c_1b'_1}{\Delta_1},\ \beta_1 = \delta\frac{c_1c'_1e'_1}{\Delta_1},\ \beta_2 = \delta\frac{a_1c''_1e'_1}{\Delta_1},\ \beta_3 = \delta\frac{b'_1c'_1c''_1}{\Delta_1},$$

$$\Delta_1 = (a_1b_1c_1e_1b'_1c'_1e'_1b''_1c''_1e''_1)^{\frac{1}{4}}$$

bestimmt werden, in denen δ eine willkürliche positive Grös bedeutet und $b'_1, c'_1, \dots e''_1$ in derselben Weise von a_1, b_1, c_1, e_1 al hängen, wie $b', c', \dots e''$ von a, b, c, e, die Integralgleichung

$$(J)\quad \int_0^{\alpha_3} dx' \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx \frac{x-x'}{\sqrt{R(x)R(x')}} = \int_0^{\beta_3} dy' \int_{\beta_2}^{\beta_1} dy \frac{y-y'}{\sqrt{R_1(y)R_1(y')}}$$

besteht, wo

$$R(x) = (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)x$$
$$R(y) = (y-\beta_0)(y-\beta_1)(y-\beta_2)(y-\beta_3)y$$

ist, dass also die Determinante $\omega_{12}\omega_{21} - \omega_{11}\omega_{22}$, wo

$$\omega_{11} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},\quad \omega_{21} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$\omega_{12} = \int_{\alpha_3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},\quad \omega_{22} = \int_{\alpha_3}^{0} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

bei dem Uebergang von den ursprünglichen Elementen $a, b, c,$ zu den transformirten Elementen a_1, b_1, c_1, e_1 ihrem Werthe nac ungeändert bleibt. Der Grenzwerth g wird dann aus der Glei chung (J) durch n-malige Wiederholung der Transformation un durch den Uebergang zur Grenze für $n = \infty$ erhalten.

M.

W. R. Roberts. On the periods of the first class o hyperelliptic integrals. Rep. Brit. Ass. 1880.

Mit Hülfe der neueren Methoden der Theorie complexer Variabeln werden die Perioden der hyperelliptischen Integrale untersucht. Csy. (M.)

M. Krause. Ueber die Transformation fünften Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.
Clebsch Ann. XVI. 83-88.

Die Grundzüge der Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung sind in den Arbeiten Hermite's über die Transformation der Abel'schen Functionen (C. R. XL. 1855) bereits enthalten. Von Weber und Königsberger besonders sind dann die Transformationen ersten, zweiten und dritten Grades ausführlich behandelt worden (Borchardt J. LXXIV. (s. F. d. M. III. 1871. p. 216), LXVII). Im Vorliegenden werden die analogen Untersuchungen für die Transformation fünften Grades durchgeführt. M.

M. Krause. Ueber die lineare Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.
Clebsch Ann. XVII. 435-447.

Zweck der Arbeit ist, die in theoretischer Hinsicht vollständig entwickelte Theorie der linearen Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung soweit auszubilden, wie es die entsprechende Theorie der elliptischen Functionen bereits ist, um die Anwendungen ohne Schwierigkeiten zu ermöglichen. Die Methode beruht auf der Zusammensetzung der allgemeinen linearen Transformationen aus solchen einfachster Art, für welche das Problem als gelöst angenommen werden kann. Der von Herrn Kronecker herrührende Gedanke einer derartigen Zusammensetzung von Determinanten ist bereits von Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Functionen) speciell für die hyperelliptischen Functionen verwerthet worden; doch wird hier die Untersuchung noch weiter geführt, ähnlich wie Herr Schläfli (Borchardt J. LXXII. 360, s. F. d. M. II. 1870. p. 238.) die Transformation der elliptischen Functionen ausgebildet hat. M.

M. Krause. Ueber die Multiplication der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Clebsch Ann. XVII. 448-455.

Als Ausgangspunkt für die Multiplication der hyperelliptischen Functionen wird hier das Additionstheorem derselben genommen. Ferner wird mit Hülfe der in der obigen Arbeit entwickelten linearen Transformation und der Substitution von halben Perioden eine Reihe von Coefficienten-Relationen entwickelt.

M.

H. Stahl. Zur Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems. Borchardt J. LXXXIX. 170-184.

In seiner Theorie der Abel'schen Functionen hat Riemann (Ges. Werke, herausgegeben von H. Weber p. 133) das in den Gleichungen

$$V_k = \sum_1^p {}_i \int_{c_i}^{(s_i\, z_i)} du_k \quad (i,\ k = 1,\ 2 \dots p)$$

enthaltene Jacobi'sche Umkehrproblem dahin formulirt, einfache ϑ-Quotienten mit den Argumenten $v_1, v_2 \dots v_p$, vermehrt um Bruchtheile von Periodensystemen mit dem Nenner m, algebraisch und symmetrisch durch die Coordinaten $(s_i\, z_i)$ der oberen Grenzen darzustellen. Die Darstellung selber durch m^{te} Wurzeln aus rationalen und symmetrischen Functionen der $(s_i\, z_i)$ wird nur angedeutet. Für hyperelliptische Integrale und den Nenner $m = 2$ war diese Darstellung bereits früher von Herrn Weierstrass (Borchardt J. XLVII und LII; vgl. Königsberger, Borchardt J. LXIV p. 21) in einer sehr einfachen Form ausgeführt. Die vorliegende Abhandlung giebt, gestützt auf eine Bemerkung in Riemann's Nachlass (l. c. p. 135), eine Lösung des angegebenen Riemann'schen Problems, die den Endgleichungen von Herrn Weierstrass genau entspricht. Es sei eine algebraische Curve $f(x) = 0$ vom Geschlecht p gegeben; die p zugehörigen Normal-Integrale 1ter Gattung $\int_a^k du_k$ mit beliebigem Anfangspunkte a

seien bezeichnet durch u_k und die p Nullpunkte von $\vartheta(u_k)$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$. Ferner sei

$$R_k = r'_k \pi i + \sum_1^p {}_l\, r_l a_{kl}$$

ein Periodensystem, in welchem man den ganzen Zahlen $(r_1, \ldots r_p, r'_1, \ldots r'_p)$ der Characteristik (r) alle Werthe $0, 1, \ldots, m-1$ beilegen kann. Die p Nullpunkte von $\vartheta\left(u_k - \frac{R_k}{m}\right)$ seien $\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)} \ldots \alpha_p^{(r)}$. Dies Punktsystem ist algebraisch so definirt: Legt man durch die Doppelpunkte von $f(x) = 0$ eine Curve $\Psi_0(x) = 0$, welche f in den p Punkten α_i je $(m-1)$-punktig berührt, und legt man durch die übrigen Schnittpunkte von f und Ψ_0 und wiederum durch die Doppelpunkte von f das System von m^{2p} Curven, deren jede ebenfalls f in p Punkten je $(m-1)$-punktig berührt, so entsprechen diese m^{2p} Curven $\Psi_r(x) = 0$ eindeutig den m^{2p} Charakteristiken (r) oder den m^{2p} Periodensystemen R; die Curve Ψ_0 der Charakteristik 0. Die Curven Ψ_r und ihre Zuordnung zu den Charakteristiken (r) wird als bekannt vorausgesetzt. Bezeichnet (ϱ) eine zweite Charakteristik, P das zugehörige Periodensystem und $\alpha_1^{(\varrho)}, \ldots \alpha_p^{(\varrho)}$ die Berührungspunkte der zugehörigen Curve $\Psi_\varrho(x) = 0$, so hat man nach Riemann

$$\frac{\vartheta\left(u_k - \frac{R_k}{m}\right)}{\vartheta\left(u_k - \frac{P_k}{m}\right)} \cdot \frac{e^{-2\sum\limits_1^p \frac{r_k u_k}{m}}}{e^{-2\sum\limits_1^p \frac{\varrho_k u_k}{m}}} = C \cdot \sqrt[m]{\frac{\Psi_r(x)}{\Psi_\varrho(x)}}.$$

Ersetzt man in der linken Seite dieser Gleichung die einfachen Integrale u_k durch die Integralsumme

$$\omega_k = \sum_0^p {}_i \int_{\alpha_i}^{x_i} du_k \quad (k = 1, 2, \ldots p),$$

so handelt es sich um die algebraische und symmetrische Darstellung des so entstehenden ϑ-Quotienten durch die Coordinaten der oberen Grenzen $x, x_1, \ldots x_p$. Hierzu bezeichne man das zur Charakteristik $(r + \varrho)$ gehörige System von Berührungs-

punkten mit $a_1, a_2, \ldots a_p$, lege ferner durch die Doppelpunkte von f und die p Punkte a_i eine Curve χ_0, die f noch in den p Punkten α_i einfach berührt, lege endlich durch die übrigen Schnittpunkte von χ_0 mit f und wiederum durch die Doppelpunkte von f zwei Curven von derselben Ordnung wie χ_0, die erste $\chi_r(x, x_i, \alpha_i^{(r)})$ durch die $2p$ Punkte x_i und $\alpha_i^{(r)}$, die zweite $\chi_\varrho(x, x_i, \alpha_i^{(\varrho)})$ durch die $2p$ Punkte x_i und $\alpha_i^{(\varrho)}$, so erhält man die Lösung des Umkehrproblems in der Form

$$\frac{\vartheta\left(\omega_k - \frac{R_k}{m}\right)}{\vartheta\left(\omega_k - \frac{P_k}{m}\right)} \cdot \frac{e^{-2\sum\limits_1^p \frac{\omega_k r_k}{m}}}{e^{-2\sum\limits_1^p \frac{\omega_k \varrho_k}{m}}}$$

$$= A\,\frac{\chi_\varrho(x, x_i, \alpha_i^{(\varrho)})}{\chi_r(x, x_i, \alpha_i^{(r)})} \cdot \sqrt{\frac{\Psi_r(x).\Psi_r(x_1)\ldots\Psi_r(x_p)}{\Psi_\varrho(x).\Psi_\varrho(x_1)\ldots\Psi_\varrho(x_p)}},$$

wo A eine von den Punkten x, x_i unabhängige Constante ist. Aus dieser Gleichung ergiebt sich durch Einführung der Punktsysteme (α, α_i) und (α, a_i) an Stelle der (x, x_i) ein algebraischer Ausdruck für A^2 und den ϑ-Quotienten

$$\vartheta^2\left(\frac{R_k}{m}\right) : \vartheta^2\left(\frac{P_k}{m}\right).$$

Hier ist eine Bemerkung zu berichtigen. Seite 184 heisst es: „die vorstehende Bestimmung passt nicht mehr, wenn die Charakteristik $(\varrho, \varrho') = (0, 0)$ ist, was damit zusammenhängt, dass wir grade die Berührungspunkte der Curve Ψ_0 zu unteren Grenzen des Umkehrproblems gewählt haben. Man erhält indess algebraische Ausdrücke für ϑ-Quotienten der obigen Form, in welcher $\vartheta(0)$ auftritt, wenn man die Berührungspunkte einer anderen Curve aus dem System der Ψ zu unteren Grenzen des Umkehrproblems nimmt." Dies ist falsch; es handelt sich vielmehr um die Werthbestimmung des Quotienten

$$\frac{\chi_0(x, x_i, \alpha_i)}{\sqrt[m]{\Psi_0(x).\Psi_0(x_1)\ldots\Psi_0(x_p)}}$$

für $x_1 = \alpha_1, \dots x_p = \alpha_p$, für welches Punktsystem Zähler und Nenner dieses Quotienten in gleicher Ordnung verschwinden. Ausserdem ist Seite 181 ein Druckfehler zu verbessern. Die Gleichungen (12) daselbst müssen lauten

$$A_i^k = \sqrt[m]{\Phi_r^{(i)}(x_k)}, \quad B_i^k = \sqrt[m]{\Phi_\varrho^{(i)}(x_k)},$$

und die rechte Seite der Gleichung (11)

$$A \cdot \frac{\Sigma \pm A_0^0 A_1^1 \dots A_p^p}{\Sigma \pm B_0^0 B_1^1 \dots B_p^p}.$$

H. St.

Appell. Sur les fonctions de deux variables à trois ou quatre paires de périodes. C. R. XC. 174-176.

Der Verfasser baut aus Exponentialfunctionen und ϑ-Functionen je einer Variablen eindeutige Functionen von zwei Variablen auf, die drei resp. vier Paare von Perioden haben, und bespricht die algebraischen Beziehungen zwischen denselben. Speciellere Functionen dieser Art hat bereits Rosenhain untersucht (cf. Académie des Sciences, Savants étrangers. 1851). H. St.

G. Pick und M. Ungar. Grundzüge einer Theorie von einer Classe Abel'scher Integrale. Wien. Ber. 1880. 893-930.

Die Verfasser untersuchen hier diejenigen Abel'schen Integrale, deren Irrationalitäten durch die binomische Gleichung

$$y^m - (z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2} \dots (z-\alpha_\varrho)^{m_\varrho} = 0$$

gegeben sind. In Nr. I werden die Integrale 1ter Gattung und die Integrale 2ter und 3ter Gattung mit vorgegebenen Unstetigkeitspunkten hergestellt, in Nr. II ein beliebig vorgelegtes binomisches Integral in Integrale der drei Gattungen und algebraische Bestandtheile zerlegt. Nr. III behandelt nach der von Abel (Précis d'une théorie des fonctions elliptiques Oeuvr. compl. t. I) für die elliptischen Integrale angegebenen und von Königsberger in mehreren Arbeiten auf die hyperelliptischen Integrale ange-

wandten Methode das Transformationsproblem, d. h. die Frage welche algebraische Relationen zwischen den binomischen Integralen bestehen können, wenn die oberen Grenzen derselben algebraisch zusammenhängen. In Nr. IV endlich wird als specieller Fall des vorigen die Möglichkeit der Reduction eines binomischen Integrals auf algebraische Functionen und Logarithmen behandelt. H. St.

A. Cayley. A memoir on the single and double theta-functions. Phil. Trans. CLXXI. 897-1002.

Obwohl die Thetafunctionen historisch sich aus den elliptischen Functionen entwickelt haben, so gehen sie doch nach dem einfachen Entwickelungsgange diesen vorauf und sind in directer Verbindung mit der Exponentialfunction e^x oder exp. x. Denn jede von ihnen wird als Summe einer Reihe von Exponentialfunctionen definirt, die einfach unendlich in Hinsicht auf die einzelnen Functionen, doppelt unendlich in Hinsicht auf die doppelten Functionen, und so fort. Die Anzahl der p-fachen Functionen ist $= 4^p$, und die Quotienten derselben, oder alle ausser einer dividirt durch diese übrig bleibende Function sind die Abel'schen Functionen von p Argumenten, die von der irrationalen Function y abhängen, welche durch die Gleichung $F(x,y) = 0$ der Curve vom Geschlechte p definirt ist. Wenn wir, anstatt die Verhältnisse der Functionen mit einer ebenen Curve in Verbindung zu setzen, die Functionen selbst als die Coordinaten eines Punktes in einem $(4^p - 1)$-dimensionalen Raume ansehen, dann haben wir die einfachen Functionen als die vier Coordinaten eines Punktes in einer Curve 4ter Ordnung (ein einfacher Ort) in dem gewöhnlichen Raume und die doppelten Functionen als die 16 Coordinaten eines Punktes auf dem zweifachen Orte 4ter Ordnung in einem Raume von 15 Dimensionen, indem das Geschlecht dieses zweifachen Ortes gleich 2 ist. Die Untersuchungen in dem ersten Theile dieser Abhandlung lassen sich, obwohl sie der einfacheren Bezeichnung wegen nur für die doppelten Functionen durchgeführt sind, in der That sofort auf den

allgemeinen Fall der p-fachen Functionen ausdehnen; doch ist der Ausführung entsprechend der Titel der Abhandlung nur für die einfachen und doppelten Thetafunctionen gewählt. Es gewährt einen Vortheil, beide Theorien gleichzeitig und zugleich mit dem sogenannten Productensatz zu behandeln. Der Verfasser entwickelt in allgemeiner Weise die Theorie der einfachen Functionen und in Verbindung damit, doch kürzer, die der doppelten Functionen, und betrachtet im dritten und vierten Theil beide Theorien getrennt bis in's Einzelne. Die Definition der Thetafunctionen weicht etwas von der gewöhnlichen ab, indem nämlich die Functionen statt der Periode $\frac{1}{2}\pi i$ die Periode 1 erhalten. Die Definition der doppelten Thetafunctionen ist folgende: Setzt man

$$\binom{m\ n}{u\ v} = \frac{1}{4}(a, h, b\widehat{\chi} m, n)^2 + \frac{1}{2}\pi i(mu + nv)$$

und in gleicher Weise

$$\binom{m+\alpha,\ n+\beta}{u+\gamma,\ v+\delta}$$

$$= \frac{1}{4}(a, h, b\widehat{\chi} m+\alpha, u+\beta)^2 + \frac{1}{2}\pi i[(m+\alpha)(u+\gamma) + (n+\beta)(v+\delta)]$$

und setzt vor jede dieser Functionen das Symbol exp., so hat man die Exponentialfunction der in Rede stehenden Functionen, d. h. e mit der Function als Exponenten, und die doppelte Thetafunction wird definirt als:

$$\vartheta\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}(u, v) = \Sigma \text{ exp. } \binom{m+\alpha,\ n+\beta}{u+\gamma,\ v+\delta},$$

wo die Summe sich auf alle positiven und negativen graden Zahlenwerthe (Null eingeschlossen) von m und n erstreckt. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnen irgend welche Grössen, aber für die Thetafunctionen müssen sie positive oder negative ganze Zahlen sein. Die einzelnen Functionen sind die 4^2 oder 16 Functionen, welche man erhält, wenn man den Grössen α, β, γ, δ die Werthe 0 und 1 beilegt.

Cly. (M.)

A. Cayley. On a theorem relating to the multiple thetafunctions. Clebsch Ann. XVII. 115-122.

Ein Beweis des allgemeinen Theorems (3'), p. 4 in Schottky's „Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln" (Leipzig 1880, s. p. 383):

$$e^{-\eta(u_1\ldots;\,\mu',\,\nu')}\Theta(u_1+2\varpi',\ldots;\,\mu,\nu)$$
$$=e^{-2\pi i\Sigma\mu_\alpha r'_\alpha}\,\Theta(u_1\ldots;\,\mu+\mu',\,\nu+\nu'),$$

worin die Thetafunctionen ganz allgemeine von 2ϱ Variabeln und die μ,ν nicht nur 0 und 1, sondern jede ganze oder gebrochene Zahl bedeuten. M.

Elliot. Sur la transformation des intégrales Abéliennes. Ann. d. l'Éc. N. (2) IX. 167-187.

Die Transformation einer Curve $f(xy)=0$ und der zugehörigen Abel'schen Integrale durch die rationalen, umkehrbaren Substitutionen

$$x_1=\frac{M(xy)}{N(xy)},\quad y_1=\frac{P(xy)}{Q(xy)}$$

ist bekanntlich zuerst von Riemann in seiner „Theorie der Abel'schen Functionen" behandelt. Seine Untersuchung führt zu dem Begriff der mit $f(xy)=0$ zu derselben Classe gehörigen algebraischen Gleichungen, zur Aufstellung von Normalformen und zur Bestimmung der von einander unabhängigen Moduln einer Classe. Clebsch und Gordan haben in ihrer Theorie der Abel'schen Functionen diese Untersuchungen algebraisch-geometrisch weiter ausgeführt. Ihre Behandlung ist insofern etwas specieller, als sie den obigen Brüchen denselben Nenner geben, wie es der homogenen Form und der geometrischen Deutung ihrer algebraischen Gleichungen angemessen war. Der Verfasser geht von der obigen Form der Transformation aus und behandelt, im wesentlichen auf algebraischem Wege, im ersten Theil die Bedingungen der eindeutigen Transformation, im zweiten Theil die Ausführung derselben für die Integrale 1ter Gattung, die bekannt-

lich in ebensolche Integrale übergehen. An dem Beispiel des elliptischen Integrals wird gezeigt, dass eine nicht umkehrbare Substitution nicht alle Integrale 1ter Gattung der transformirten Curve geben kann. Den Schluss bildet die Anwendung auf die Jacobi'sche Transformation des elliptischen Integrals und eine analoge Transformation eines ähnlichen Integrals.

H. St.

F. Schottky. Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln. Leipzig. Teubner.

In seiner Schrift „Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3". Berlin. Reimer. 1876. hat Herr Weber die Theorie dieser Functionen, ausgehend von der allgemeinen Curve 4ter Ordnung vom Geschlecht 3, auf dem von Riemann angegebenen Wege behandelt und das Umkehrproblem vollständig und allgemein gelöst. Es blieb noch übrig, den umgekehrten Weg zurückzulegen, d. h. von den periodischen oder Theta-Functionen aus zu den algebraischen Differentialgleichungen des Umkehrproblems zu gelangen. In der vorliegenden, von Herrn Weierstrass angeregten Arbeit wird auch diese mit manchen Schwierigkeiten verbundene Aufgabe in klarer und eingehender Weise gelöst Den Kernpunkt der Lösung bildet die Herleitung der algebraischen Grundgleichung vom Geschlecht 3. Da die Menge der zur Bewältigung der Rechnung eingeführten Hilfsgrössen eine Wiedergabe des Einzelnen unmöglich macht, so müssen wir uns mit einer kurzen Analyse des Inhalts begnügen.

Der erste Theil behandelt zunächst (§§ 1—5) das Additionstheorem der θ-Function für 3 Variable. Nach Herrn Weierstrass wird für die θ-Function r^{ter} Ordnung mit ϱ Variablen und der allgemeinsten Charakteristik der Fundamentalsatz bewiesen: Alle θ-Functionen r^{ter} Ordnung mit derselben Charakteristik lassen sich linear und homogen durch r^ϱ unter ihnen ausdrücken. Die Betrachtung von graden und ungraden θ-Functionen führt zu Charakteristiken mit dem Nenner 2 von der Form

$$(\tfrac{1}{2}\delta_\alpha, \tfrac{1}{2}\varepsilon_\alpha); \quad \alpha = 1, 2 \dots \varrho,$$

in welchen die Zahlen δ und ε den Werth 0 oder 1 haben. Verschiedene Charakteristiken dieser Art werden durch einen oberen Index unterschieden. Der Verfasser stellt nunmehr ein specielles System von 2ϱ primitiven Indices auf, durch deren Combination man sämmtliche $2^{2\varrho}$ Indices mit Ausnahme des Index 0 erhält. Für $\varrho = 3$ stellen sich die 64 Indices dar durch die 64 Combinationen 0, $\varkappa$, $\varkappa\lambda$, $\varkappa\lambda\mu$, wo $\varkappa$, λ, μ die Zahlen 1, 2, ... 7 bedeuten. Die 28 Combinationen $\varkappa$ und $\varkappa\lambda$ entsprechen den ungraden, die 36 Combinationen 0 und $\varkappa\lambda\mu$ den graden θ-Functionen. Dies System von Charakteristiken dient zur Herstellung des Additionstheorems der θ-Function mit 3 Variablen. Aus demselben ergibt sich nun (§§ 6—9) die Auflösung des Systems der θ-Relationen für die Nullwerthe der Argumente. Bezeichnet man die graden θ-Functionen mit dem Index $\varkappa\lambda\mu$, gebildet für $(u_1, u_2, u_3 = 0)$ durch $e_{\varkappa\lambda\mu}$ und die Derivirten der ungraden θ-Functionen mit dem Index $\varkappa$ (resp. $\varkappa\lambda$) nach den drei Variablen gebildet für $(u_1, u_2, u_3 = 0)$ durch $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ (resp. $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, $c_{\varkappa\lambda}$), so lassen sich sowohl die Verhältnisse der 36 Grössen e_0 und $e_{\varkappa\lambda\mu}$, als auch die 3.21 Werthe $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, $c_{\varkappa\lambda}$ ausdrücken durch eine Hilfsgrösse r und die 3.7 Grössen $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots 7$), die als Moduln betrachtet und immer auf 6 unabhängige Moduln zurückgeführt werden können.

Der zweite Theil behandelt in ähnlicher Weise die algebraischen Relationen zwischen den θ-Functionen mit variablen Argumenten, zunächst (§§ 1-4) die zwischen den 28 ungraden Functionen $\theta(u)$. Es wird gezeigt, wie sich die Quotienten der Producte von gleichviel ungraden θ-Functionen als rationale Functionen der Verhältnisse von 6 Grössen $\mathfrak{L}_{ik}(u)$ $(i, k = 1, 2, 3)$ darstellen lassen, zwischen denen wiederum zwei unabhängige, homogene Gleichungen 6ter Ordnung bestehen. Dies führt (§§ 5-10) in sehr eleganter Weise zu der algebraischen Grundgleichung, die alle weiteren algebraischen Darstellungen beherrscht. Es werden nämlich die Argumente u_1, u_2, u_3 der θ-Function specialisirt durch die Bedingung $\Sigma \pm \mathfrak{L}_{11}\, \mathfrak{L}_{22}\, \mathfrak{L}_{33} = 0$ zwischen den $\mathfrak{L}_{ik}$. Es zeigt sich dann, dass der Quotient zweier ungrader Functionen $\theta_m(u) : \theta_n(u)$ mit diesen speciellen Argumenten sich rein

algebraisch darstellen lässt als die Quadratwurzel aus dem Quotienten zweier Functionen $H_m(xyz)$ und $H_n(xyz)$, die homogen vom 3ten Grade in den Coordinaten (x, y, z) des Punktes einer Curve $\mathfrak{L}(x, y, z) = 0$ sind. Diese Curve ist von der 6ten Ordnung und vom Geschlecht 3; ihre sieben Doppelpunkte haben die Coordinaten $(a_i\ b_i\ c_i)$, $i = 1, 2, \dots 7$; welche Grössen früher als Moduln aufgetreten sind. (Die Functionen $\sqrt{H_m}$ stimmen überein mit den „Abel'schen Functionen" $\sqrt{\varphi_\mu}$ bei Riemann; führt man drei der Functionen H_m als Coordinaten statt der (x, y, z) ein, so ergiebt sich statt der Curve $\mathfrak{L} = 0$ der 6ten Ordnung eine Curve 4ter Ordnung vom Geschlecht 3, wie sie Herr Weber seiner Untersuchung zu Grunde legt.) Hieran schliesst sich (§§ 11-16) eine entsprechende Behandlung der graden θ-Functionen und die Darstellung des Quotienten von zwei graden oder von einer ungraden und einer graden θ-Function durch ähnliche Wurzelfunctionen in (x, y, z). Endlich folgt (§§ 17-19) aus der Differentialgleichung der θ-Function, dass die oben definirten speciellen Argumente (u_1, u_2, u_3). die drei Integrale 1ter Gattung der Curve $\mathfrak{L}(x\,y\,z) = 0$ sind. Nunmehr (§§ 20-24) kehrt der Verfasser zu den allgemeinen Argumenten zurück und zeigt, wie sich die Quotienten der θ-Functionen mit allgemeinen Argumenten, wenn diese letzteren gleich Summen von Integralen 1ter Gattung gesetzt werden, algebraisch durch die Coordinaten der oberen Grenzen der Integralsummen ausdrücken. Diese Lösung des Umkehrproblems schliesst sich im wesentlichen an die oben erwähnte Weber'sche Darstellung an. Ein Nachtrag giebt die Theorie der hyperelliptischen Functionen dreier Variablen. Auch dieser Fall, welcher durch das Verschwinden einer der 36 Grössen $l_{\varkappa\lambda\mu}$ charakterisirt ist, wird, von den θ-Functionen ausgehend, bis zur Lösung des Umkehrproblems vollständig durchgeführt.

H. St.

G. Frobenius. Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variablen. Borchardt J. LXXXIX. 185-220.

Angeregt einerseits durch eine Arbeit von Herrn Weber (Ueber die Transformationstheorie der Thetafunctionen. Brioschi

Ann. (2) IX., siehe F. d. M. X. 1878. p. 325), andererseits durch eine von dem Referenten gegebene, noch unentwickelte Additionsformel (Borchardt J. LXXXVIII. p. 117 und p. 273, siehe F. d. M. XI. 1879. p. 334, vgl. auch Nöther, „Zur Theorie der ϑ-Functionen mit beliebig vielen Argumenten.“ Clebsch Ann. XVI., siehe das folgende Referat) giebt der Verfasser hier eine klare und vollständige Darstellung des Additionstheorems der Thetafunctionen mit ϱ Variablen, welche alle für specielle Fälle aufgestellten ϑ-Relationen (soweit es sich nicht um die algebraische Auflösung des Systems dieser Relationen handelt) umfasst. Die Grundlage bildet eine Untersuchung der ϑ-Charakteristiken. Als wesentlich werden diejenigen Eigenschaften der Systeme von Charakteristiken betrachtet, von denen die zwischen den ϑ-Functionen bestehenden Relationen abhängen. Diese Relationen bleiben aber bestehen, wenn man auf die ϑ-Functionen eine Transformation 1ter Ordnung anwendet und wenn man ihre Argumente um halbe Perioden, d. h. ihre Charakteristiken alle um eine bestimmte Charakteristik vermehrt. Sind

$$A = \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_\varrho \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_\varrho \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \nu_1' & \nu_2' & \dots & \nu_\varrho' \\ \mu_1' & \mu_2' & \dots & \mu_\varrho' \end{bmatrix}$$

zwei Charakteristiken und setzt man

$$|A| = \Sigma_i \mu_i \nu_i \qquad |A, B| = \Sigma_i (\mu_i \nu_i' - \mu_i' \nu_i)$$
$$|A, B, C| = |B, C| + |C, A| + |A, B|,$$

so zeigt eine genauere Untersuchung (die Ausführung derselben wird in Aussicht gestellt), dass die zwischen mehreren Functionen $\vartheta\,[A_\alpha]\,(u)$ mit der Charakteristik A_α bestehenden Relationen einzig und allein davon abhängen, welche Werthe 0 oder 1 (mod. 2) die Ausdrücke $|A_\alpha, A_\beta, A_\gamma|$ haben und ob die Summe einer graden Anzahl von Charakteristiken A_α verschwindet oder nicht. Mehrere Charakteristiken $A, A_1, A_2 \dots$ heissen *unabhängig*, wenn nicht die Summe irgend einer Anzahl derselben, *wesentlich unabhängig*, wenn nicht die Summe einer graden Anzahl derselben congruent 0 ist. Jede aus irgend einer Anzahl der gegebenen Charakteristiken gebildete Summe heisst eine Combination, jede aus einer ungraden Anzahl gebildete Summe eine wesentliche Combination der Charakteristiken. Nachdem eine

allgemeine Methode angegeben ist zur Bestimmung der Anzahl solcher Charakteristiken, die gegebenen Bedingungen, insbesondere Congruenzen genügen, wendet sich der Verfasser zur allgemeinsten Bestimmung eines Systems von Charakteristiken A, A_1, A_2 ... derart, dass zwischen je drei derselben entweder die Relation

$$|A_\alpha, A_\beta, A_\gamma| \equiv 0 \ (\text{mod.}\ 2)$$

oder die Relation

$$|A_\alpha, A_\beta, A_\gamma| \equiv 1 \ (\text{mod.}\ 2)$$

besteht. Systeme der ersten Art heissen Göpel'sche Systeme; sie führen zu einer ersten Form des Additionstheorems der ϑ-Functionen, aus der sich eine Verallgemeinerung der von Göpel für zwei Variable aufgestellten ϑ-Relationen ergiebt. Systeme der zweiten Art heissen Fundamentalsysteme; sie geben eine zweite weniger einfache Form des Additionstheorems.

Ein Göpel'sches System A, A_1, A_2 ..., definirt durch die Beziehung $|A_\alpha, A_\beta, A_\gamma| \equiv 0$, besteht aus $r = 2^\varrho$ Charakteristiken, nämlich aus $(\varrho + 1)$ Charakteristiken A, A_1, ... A_ϱ, welche die Basis des Systems bilden und den wesentlichen Combinationen dieser $(\varrho + 1)$ Charakteristiken. Die $(\varrho + 1)$ Charakteristiken der Basis können nicht alle ungrade sein, sonst aber einen beliebigen Charakter haben. Die Zahl der Göpel'schen Systeme ist

$$2^\varrho . (2^\varrho + 1) . (2^{\varrho-1} + 1) ... (2^2 + 1)(2 + 1).$$

Ist A, A_1, A_2, ... A_{r-1} ein Göpel'sches System und C eine beliebige Charakteristik, so ist auch

$$CA, \ CA_1, \ CA_2 ... CA_{r-1}$$

ein solches System. Die Gesammtheit der Systeme, welche auf diese Weise aus einem erhalten werden, indem man für C alle Charakteristiken setzt, heisst ein Complex Göpel'scher Systeme. Unter den 2^ϱ Göpel'schen Systemen eines Complexes gibt es eins, dessen Charakteristiken sämmtlich grade sind und $2^\varrho - 1$, deren Charakteristiken zur Hälfte grade und zur Hälfte ungrade sind.

Die Göpel'schen Systeme A, A_1 ... A_{r-1} geben nun folgendes Additionstheorem der ϑ-Functionen: Jedes Product der Form

$$\vartheta[A_\varkappa](u+v) . \vartheta[A_\lambda](u+v)$$

mit beliebigen Charakteristiken lässt sich rational durch die

Functionen

$$\vartheta[A_\alpha](u+v+w),\quad \vartheta[A_\alpha](v+w),\quad \vartheta[A_\alpha](u),\quad \vartheta[A_\alpha](v),$$
$$\vartheta[A_\alpha](w),\quad \vartheta[A_\alpha](0)$$

mit Göpel'schen Charakteristiken ausdrücken. Diese Darstellung wird in vollständig entwickelter Form erreicht durch eine passende Verfügung über das Vorzeichen der in den Bestimmungsgleichungen der Coefficienten auftretenden vierten Einheitswurzeln und eine geschickte Addition dieser Bestimmungsgleichungen. Aus dem Additionstheorem ergeben sich die Verallgemeinerungen der von Göpel für zwei Variablen aufgestellten ϑ-Relationen, nämlich erstens eine Darstellung des Quadrats einer beliebigen der $2^{2\varrho}$ Functionen $\vartheta[M](u)$ linear durch die Quadrate der 2ϱ Göpel'schen Functionen $\vartheta[A_\alpha](u)$, zweitens die biquadratischen Relationen zwischen den Göpel'schen ϑ-Functionen, drittens Relationen für die Ableitungen der Göpel'schen ϑ-Functionen. Die Anwendung endlich des Additionstheorems auf die Transformation k^{ten} Grades der ϑ-Functionen (siehe die citirte Abhandlung von Weber) führt zur Ausdehnung auf ϱ Variable des von Hermite für zwei Variable bewiesenen Theorems, dass, wenn ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 vier Göpel'sche (durch die biquadratische Relation von Göpel verbundene) ϑ-Functionen und θ_0, θ_1, θ_2, θ_3 die transformirten Functionen mit den nämlichen Charakteristiken sind, sich die vier Functionen θ_α als ganze Functionen k^{ten} Grades der vier Functionen ϑ_α darstellen lassen.

In ähnlicher Weise wird ein Fundamentalsystem untersucht, das durch die Beziehung $|A_\alpha, A_\beta, A_\gamma| \equiv 1$ definirt ist und aus $(2\varrho+2)$ Charakteristiken $A, A_1, \ldots A_{2\varrho+1}$ besteht, deren Summe congruent 0 ist. Es wird die Anzahl der Fundamentalsysteme bestimmt, ferner der Weg angegeben, dieselben zu ermitteln oder aus einem Fundamentalsystem alle übrigen abzuleiten, und schliesslich werden Complexe von Fundamentalsystemen untersucht. Von Wichtigkeit ist die Darstellung sämmtlicher $2^{2\varrho}$ Charakteristiken durch die Charakteristiken eines Fundamentalsystems, welche die Verallgemeinerung einer von Riemann angegebenen Darstellung ist (siehe die citirte Abhandlung des Referenten; vergl. auch die citirte Abhandlung von Nöther). Den Schluss der inhaltreichen

Arbeit bildet ein zweites Additionstheorem der ϑ-Functionen, gegründet auf die Fundamentalsysteme, und die Herleitung einer Reihe von ϑ-Relationen aus demselben. H. St.

M. Nöther. Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten. Clebsch Ann. XVI. 270-344.

Das von Herrn Weber (Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin 1876, s. F. d. M. VIII. p. 293) für drei und vom Verfasser selbst (Clebsch. Ann. XIV. 250 ff., s. F. d. M. XI. 1879. p. 327) für vier Variable aufgestellte Additionstheorem der Thetafunctionen wird hier auf p Variable ausgedehnt. Gleichzeitig hat Herr Frobenius (Borchardt. J. LXXXIX; s. d. vorhergehende Referat) das allgemeine Additionstheorem in zweifacher und vollständig expliciter Form entwickelt, nachdem schon früher Referent (Borchardt. J. LXXXVIII; F. d. M. XI. 1879. 334), gestützt auf einen Riemann'schen Satz über Thetacharakteristiken eine Additionsformel in weniger entwickelter Form angegeben hatte. Als Grundlage dient dem Verfasser eine ausführliche Untersuchung der Gruppirungsverhältnisse der Charakteristiken, deren Resultate bereits in einer Note „Ueber die Thetacharakteristiken" Erl. Ber. Juli 1879 (F. d. M. XI. 327) mitgetheilt sind. Von den eigentlichen Charakteristiken

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1^\alpha & n_2^\alpha & \dots & n_p^\alpha \\ m_1^\alpha & m_2^\alpha & \dots & m_p^\alpha \end{pmatrix},$$

deren Zahl 2^{2p}, unterscheidet der Verfasser die Gruppencharakteristiken, indem er (nach Riemann) alle diejenigen Paare (α), (β) von graden, sowie diejenigen (α'), (β') von ungraden Charakteristiken, welche als Summe dieselbe Charakteristik (r) ergeben, also definirt sind durch

$$(r) = (\alpha) + (\beta) = (\alpha') + (\beta'),$$

zu einer Gruppe zusammenfasst, und dieser Gruppe die Gruppencharakteristik $[r]$ zuordnet. Von den Charakteristiken (α), (β), (α'), (β') sagt man, sie sind in der Gruppe $[r]$ enthalten und zwar (α), (β) und ebenso (α'), (β') gepaart enthalten. Jeder eigentlichen Charakteristik (r) entspricht eine Gruppencharakte-

ristik $[r]$, mit Ausnahme der Charakteristik (0), so dass die Anzahl der Gruppencharakteristiken $= 2^{2p} - 1$ ist. Es werden ferner die Bezeichnungen eingeführt

$$K_{rs} = \sum_i (n_i^r m_i^s + n_i^s m_i^r),$$

$$R_\mu = 2^{\mu-1}(2^\mu - 1), \quad S_\mu = 2^{\mu-1}(2^\mu + 1).$$

Einen ausgedehnten Gebrauch endlich macht der Verfasser von den zuerst von C. Jordan angegebenen Substitutionen, welche die Charakteristiken-Beziehungen unverändert lassen. Unter dem Zeichen $\{r\}$ wird diejenige Substitution verstanden, welche die in der Gruppe $[r]$ enthaltenen Charakteristiken in die mit ihnen darin gepaart auftretenden überführt, d. h. (α) mit (β), (α') mit (β') u. s. w. vertauscht, die nicht in $[r]$ enthaltenen Charakteristiken aber unverändert lässt. Mit diesen Definitionen werden zunächst für die Gruppen und ihre Beziehungen zu einander, insbesondere für die gemeinsamen Charakteristiken zweier Gruppen, die in der Beziehung $K_{rs} \equiv 1$ oder $K_{rs} \equiv 0$ (mod. 2) stehen, eine Reihe von Sätzen abgeleitet, welche zu dem Hauptsatze der Theorie führen, nämlich: die R_{p-1} ungraden und die S_{p-1} graden p-reihigen Charakteristiken, welche in irgend zwei Gruppen $[r]$ und $[s]$, für die $K_{rs} \equiv 1$, gemeinsam enthalten sind, stehen unter einander genau in denselben Beziehungen, wie die überhaupt existirenden R_{p-1} ungraden und S_{p-1} graden $(p-1)$-reihigen Charakteristiken. Hierbei treten an Stelle der bei den $(p-1)$-reihigen Charakteristiken vorhandenen $2^{2(p-1)} - 1$ Gruppen $[r'_1]$ diejenigen $2^{2(p-1)} - 1$ Gruppen $[r_1]$, für welche

$$K_{rr_1} \equiv K_{sr_1} \equiv 0.$$

Ebenso wie der Charakter des Graden oder Ungraden der eigentlichen Charakteristiken geht dabei auch die Beziehung $K_{r'_1 s'_1}$ zwischen zwei Gruppen $[r'_1]$, $[s'_1]$ aus den $(p-1)$-reihigen Charakteristiken in dieselbe Beziehung K_{r_1, s_1} zwischen den unter den p-reihigen Charakteristiken entsprechenden Gruppen $[r_1]$, $[s_1]$ über. Dieser Satz führt also die p-reihigen auf die $(p-1)$-reihigen und weiterhin auf die $(p-\mu)$-reihigen Charakteristiken zurück und giebt gleichzeitig eine Eintheilung der Gruppen in Systeme und eine Gruppirung der Substitutionen, welche die Charakte-

ristiken-Beziehungen ungeändert lassen. Es werden nun solche Systeme von Charakteristiken untersucht, für welche die Summe irgend einer ungraden Zahl von Charakteristiken einen gegebenen Charakter (des Graden oder Ungraden) hat, insbesondere diejenigen Systeme von $(2p+1)$ Charakteristiken, deren Combinationen alle überhaupt existirenden Charakteristiken und Gruppen und jede nur einmal liefern. (Riemann hat etwas speciellere Systeme von $2p$ Charakteristiken dieser Art angegeben, die jedoch nicht zu den 2^{2p} Charakteristiken, sondern nur zu den $2^{2p}-1$ Gruppencharakteristiken führen (vgl. Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Zürich 1866; Stahl, Borchardt J. LXXXVIII. pag. 273). Diese „ausgezeichneten" Systeme (bei Frobenius „Fundamentalsysteme" l. c.) dienen weiterhin zur Darstellung und Untersuchung der Beziehungen zwischen den Charakteristiken. Nachdem die Bildung und Anzahl solcher ausgezeichneten Systeme angegeben ist, folgt eine Anwendung auf die Zweitheilungsgleichungen und deren Resolventen, die sich in verschiedener Weise aufstellen lassen. Der zweite Abschnitt behandelt das Additionstheorem der ϑ-Functionen. Zunächst stellt sich der Werth von $\vartheta_\varkappa(u+v+w) \,.\, \vartheta_\lambda(u-v)$ durch Determinanten dar, die jedoch selbst wieder Summen von je 2^{p-3} Producten mit einfachen Argumenten sind. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass diese Summen in lineare Factoren zerfallen. Doch gelingt es dem Verfasser nicht, eine explicite Form herzustellen. Es wird daher eine andere, vollständig entwickelte Additionsformel aufgestellt, in der freilich die linke Seite selbst eine Summe von 2^{p-3} Ausdrücken mit zusammengesetzten Argumenten ist, die also kein eigentliches Additionstheorem vorstellt, aus der sich aber eine Reihe von ϑ-Relationen und Beziehungen zwischen diesen Relationen ergeben. Den Schluss bildet eine Anwendung auf den Fall $p=5$, mit einer Discussion der Bedingungen, unter welchen die ϑ-Functionen zu hyperelliptischen Functionen führen. H. St.

E. Heine. Einige Anwendungen der Residuenrechnu[ng] von Cauchy. Borchardt J. LXXXIX. 19-40.

Die erste Anwendung betrifft die Γ-Function. Es ergie[bt] sich, dass

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2\pi i}\int e^z z^{-a}\, dz,$$

wenn z mit Vermeidung des negativen Arms der reellen Axe v[on] $-\infty - 0i$ bis $-\infty + 0i$ variirt, unter 0 die Grenze einer v[er]schwindenden Positiven verstanden. Im Beweise wird der W[eg] geradlinig über die Punkte $+0-0i$ und $+0+0i$ genomme[n]. In ähnlicher Weise werden einige bekannte Formeln bewiese[n], dann die folgende Entwickelung der reciproken Function na[ch] Potenzen des Arguments hergeleitet:

$$\frac{\pi}{\Gamma(a)} = \sin a\pi \int_1^\infty e^{-x} x^{-a}\, dx + \int_0^\pi e^{\cos\vartheta} \cos[(1-a)\vartheta + \sin\vartheta]\, d[\vartheta]$$

wo der erste Theil

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-a)^n}{2i\Pi(n)} \int_1^\infty e^{-x}\left[(\log x - \pi i)^n - (\log x + \pi i)^n\right] dx,$$

der zweit

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-ai)^n}{\Pi(n)} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta^n e^{\cos\vartheta + i(\vartheta + \sin\vartheta)}\, d\vartheta.$$

Die zweite Anwendung geschieht auf Mehler's Kegelfunction

$$\mathfrak{K}^{(\mu)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{-\frac{1}{2}+\mu i}\, d\varphi,$$

welche hier für reelle x transformirt wird in

$$\mathfrak{K}^{(\mu)}(\cos\vartheta i) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\cos\vartheta i - \cos\alpha i}},$$

$$\mathfrak{K}^{(\mu)}(\cos\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos\mu\alpha i\, d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\vartheta}},$$

und woraus sich nach Cauchy's Methode andere von Mehler g[e]fundene Ausdrücke herleiten lassen. Sie wird ferner angewan[dt] auf die Lagrange'sche Interpolation, dann auf die Fourier'sc[he]

Reihe in allgemeinerer Auffassung. Die Functionswerthe $\sin nx$ sind nämlich ein Beispiel, wo die n die Wurzeln einer Gleichung $\sin a\pi = 0$ darstellen. Man kann statt des Sinus andere Functionen setzen, derart, dass die Reihe der Argumente als die unendlich vielen Wurzeln einer Gleichung hervorgehen. Nach den Untersuchungen von Sturm und Liouville blieb es noch zweifelhaft, ob andere Functionen den Bedingungen genügten. Durch die Cauchy'sche Methode wird die Möglichkeit für einige Functionen gezeigt. Der erste Fall ergiebt die gewöhnliche Cosinusreihe. Im zweiten wird nach $\sin \alpha\xi$ entwickelt, wo die α aus $\alpha \cos \alpha\mathfrak{r} + h \sin \alpha\mathfrak{r} = 0$ hervorgehen; im dritten nach Cylinderfunctionen $\mathfrak{J}_\nu(\alpha\xi)$, theils für $\mathfrak{J}_\nu(\alpha\mathfrak{r}) = 0$, theils für

$$\alpha \mathfrak{J}'_\nu(\alpha\mathfrak{r}) + h\mathfrak{J}_\nu(\alpha\mathfrak{r}) = 0,$$

ersteres wenn der Mantel eines Cylinders in der Temperatur 0 erhalten wird, anzuwenden. Die Untersuchung geht von dem Ausdruck

$$\frac{\Theta(\alpha,\xi)}{\varpi(\alpha)} - S\,\frac{\Theta(\lambda,\xi)}{(\alpha-\lambda)\varpi'(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Theta(z,\xi)\,dz}{(z-\alpha)\varpi(z)}$$

aus, wo $\theta(\chi,\xi)$ die Functionen bezeichnet, nach denen entwickelt wird, $\varpi(\lambda) = 0$ die Gleichung, welche die α bestimmt und die Complexe z über einen Kreis von unendlich grossem Radius variirt. Ist das Integral Null, so stellt die linke Seite die Entwickelung dar. Ist die Entwickelung

$$f(\xi) = Sc_\lambda\,\theta(\lambda,\xi)$$

möglich, so lassen sich die c nach einem für die Fourier'sche Reihe bekannten analogen Verfahren finden, und man erhält

$$f(\xi) = S\theta(\lambda,\xi)\,\frac{\int_0^r f(\xi)\,\theta(\lambda,\xi)\,g\,d\xi}{\int_0^r (\theta(\lambda,\xi))^2\,g\,d\xi},$$

falls die Reihe in gleichem Grade convergirt; es giebt alsdann keine andre in gleichem Grade convergente Entwickelung von f nach den θ. H.

F. Tissérand. Sur des transcendantes qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des perturbations planétaires. C. R. XC. 1021-1026, 1094-1096.

O. Callandreau. Sur des transcendantes qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des perturbations planétaires. C. R. XC. 1154-1156, 1201-1203, 1540-1542.

G. Darboux. Sur les transcendantes qui jouent un rôle important dans la théorie des perturbations planétaires. C. R. XC. 1416-1419, 1472-1474.

Die hier betrachteten in den Ausdrücken für die Störungs-Function auftretenden Transcendenten sind durch die Relation

$$B_n^{(k)} = \frac{1}{1.2\ldots n} \alpha^n \frac{d^n b^{(k)}}{d\alpha^n}$$

definirt, wo die Grössen

$$b^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos k\vartheta}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\vartheta}}\, d\vartheta$$

die Coefficienten in der bekannten Entwickelung

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\vartheta}}$$
$$= \tfrac{1}{2}b^{(0)} + b^{(1)}\cos\vartheta + b^{(2)}\cos 2\vartheta + \cdots + b^{(k)}\cos k\vartheta + \cdots$$

sind, und α eine reelle Grösse zwischen 0 und 1 bedeutet. Herr Tissérand zeigt, dass, wenn k fest bleibt und n unbegrenzt wächst, die Function $B_n^{(k)}$ von α unbegrenzt wächst, wenn $\alpha > \frac{1}{2}$ ist, und dass sie gegen Null convergirt, wenn $\alpha < \frac{1}{2}$ ist. Aus diesem wichtigen Satze folgt, dass die Convergenz der Reihen für die Excentricitäten für $\alpha > \frac{1}{2}$ beträchtlich verringert, für $\alpha < \frac{1}{2}$ aber vergrössert wird. Durch Transformation von $b^{(0)}$ in ein elliptisches Integral ergiebt sich, dass der Ausdruck

$$\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} \frac{d^n K}{d\alpha^n}$$

für $n = \infty$ gegen Null convergirt, wenn der Modul $\alpha \overline{\leqq} \frac{1}{2}$, im anderen Falle wird der Ausdruck selbst unendlich. Analog wird die Function

$$C_n^{(k)} = \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} \cdot \frac{d^n c^{(k)}}{d\alpha^n}$$

untersucht, welche der Entwickelung

$$(1+\alpha^2-2\alpha\cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}c^{(0)} + c^{(1)}\cos\vartheta + c^{(2)}\cos 2\vartheta + \cdots + c^{(k)}\cos k\vartheta + \cdots$$

entspricht. Herr Callandreau zeigt, dass der Werth von

$$\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n b_s^{(m)}}{d\alpha^n}, \quad b_s^{(m)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos m\vartheta . d\vartheta}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos\vartheta)^s},$$
$$(0<s<1),$$

gegen Null oder Unendlich convergirt, je nachdem $\alpha+x$ kleiner oder grösser als 1 ist, und geht dann zu dem allgemeinen Fall über, wo s beliebig ist. Herr Darboux erhält die angenäherten Werthe nach der Methode, die er in seinem Mémoire: „Sur l'approximation des fonctions de grands nombres“ (Liouville J. (3) IV., s. F. d. M. X. 1878. p. 279) befolgt hat. In der letzten Note wendet Herr Callandreau die erhaltenen Resultate an, um die von Le Verrier in den Annales de l'Observatoire, Tome II, gegebene Methode zu verbessern. M.

ESCARY. Remarque relative à deux intégrales obtenues par Lamé dans la théorie analytique de la chaleur. C. R. XC. 1341-1344.

Die in der Note betrachteten Functionen $P_l^n(x)$ sind die von demselben Verfasser schon früher behandelten (cfr. F. d. M. X. 1879. p. 338, XI. 1880. p. 346) Coefficienten, die bei der Entwickelung von

$$(1-2\alpha x+\alpha^2 c^2)^{-\frac{2l+1}{2}}$$

nach steigenden Potenzen von α auftreten. Neue Gesichtspunkte oder Resultate giebt der Verfasser auch diesmal nicht.

Wn.

LAGUERRE. Sur une propriété des polynômes X_n de Legendre. C. R. XCI. 849-851.

Es sei eine ganze Function $F(x)$ durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe dargestellt, und zwar sei diese nach steigenden Indices geordnet. Dann ist die Zahl der positiven Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$, die grösser oder gleich der Einheit sind, höchstens gleich der Zahl der Zeichenwechsel in den Coefficienten der Reihe. Für die Zahl der negativen Wurzeln, deren absoluter Werth $>$ oder $= 1$ ist, gilt derselbe Satz, wenn man in der Reihe die Vorzeichen der Coefficienten umkehrt, deren Index ungrade ist. Wn.

A. R. FORSYTH. On the integrals

$$\int_{-1}^{+1} P_i \mu^m d\mu, \qquad \int_{-1}^{+1} P_i \cos(m\theta)\, d\mu,$$
$$\int_{-1}^{+1} P_i \nu^m d\mu, \qquad \int_{-1}^{+1} P_i \sin(m\theta)\, d\mu.$$

Quart. J. XVII. 37-46.

Zum Verständnis der im Titel genannten Integrale ist (was der Verfasser zu erwähnen für überflüssig erachtet) zu bemerken, dass $\mu = \cos\theta$ das Argument der Kugelfunction P_i ist, während $\nu = \sin\theta = \sqrt{1-\mu^2}$. Was nun die Integrale selbst betrifft, so sind die in Bezug auf das erste, zweite und vierte abgeleiteten Resultate nicht neu (cf. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, II. Auflage). Die Ableitung des ersten Integrals geschieht so: für $i < m$ ist der Werth des Integrals $= 0$; für $i = m$ ergiebt er sich unmittelbar aus der Reihe für P_i; für $m > i$ endlich lässt sich durch Benutzung der Differentialgleichung, der P_i genügt, sowie durch Anwendung der theilweisen Integration eine Recursionsformel finden, die diesen Fall auf den vorigen zurückführt. Durch eine ähnliche Methode der Reduction ergeben sich die übrigen der oben genannten Integrale. Hinsichtlich der Resultate, die, wie schon bemerkt, nur beim dritten neu sind, müssen wir auf die Arbeit selbst verweisen. Wn.

E. J. Routh. On functions analogous to Laplace's functions. Proc. L. M. S. XI. 92-102.

Fortsetzung einer Arbeit, über die im vorigen Jahre (F. d. M. XI. 1880. p. 347) berichtet ist. Hier handelt es sich wesentlich um die Discussion des Parameters p der Differentialgleichung, welcher die betrachteten Functionen genügen. Aus der geometrischen Bedeutung von p für ein endliches n wird die Realität aller p abgeleitet, ferner die Bedingung, unter der alle p positiv sind; schliesslich wird die untere Grenze des kleinsten Werthes von p bestimmt. Von der Function χ, die dem kleinsten p entspricht, wird gezeigt, dass sie innerhalb der Integrationsgrenzen ihr Zeichen nicht wechselt; endlich werden einige Sätze über die Wurzeln der Gleichung $\chi = 0$ für andere Werthe von p mitgetheilt, die bekannten Sätzen der Kugelfunctionen analog sind. Dies der Inhalt der Arbeit. Weshalb die vorliegenden Resultate nicht als streng begründet anzusehen sind, darüber hat sich Referent bereits im vorigen Jahre ausgesprochen. Wn.

F. Niemöller. Formeln zur numerischen Berechnung des allgemeinen Integrals der Bessel'schen Differentialgleichung. Schlömilch Z. XXV. 65-71.

Es handelt sich hauptsächlich um die Aufstellung der semiconvergenten Reihen für die Bessel'schen Functionen zweiter Art bei ganzzahligem Index. Die Resultate sind nicht neu, sondern finden sich sämmtlich schon in Lommel's Studien über Bessel'sche Functionen (cf. F.d.M. I. 1868 p. 139). Abgeleitet werden die Reihen hier folgendermassen: Die von Schlömilch für die Entwickelung von J_0 in die semiconvergente Reihe angegebene Methode wird auf J_ε angewandt, wo der Index ε zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt. Daraus ergiebt sich die Reihe für die Bessel'sche Function zweiter Art mit dem Index Null (hier O_0 genannt) mittels der Relation

$$O_0 = \frac{d}{d\varepsilon}\left\{\Gamma(1+\varepsilon) J_\varepsilon\right\}_{\varepsilon=0}.$$

Die Reihen für J und O mit beliebig grossem Index werden nicht

explicite aufgestellt, sondern nur die bekannten Darstellungen der genannten Functionen durch höhere Differentialquotienten derselben Functionen mit niedrigerem Index abgeleitet.

Wn.

E. Lommel. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. Clebsch Ann. XVI. 183-208.

Das Bessel'sche Integral

$$1)\qquad y = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\omega - z\sin\omega)\,d\omega$$

ist mit der Bessel'schen Function $J^\nu_{(z)}$ (der particulären Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung) nur identisch, wenn ν eine ganze Zahl ist. Im ersten Theile der vorliegenden Arbeit wird nun der Zusammenhang zwischen dem obigen Integrale und der Bessel'schen Function für beliebige Werthe von ν untersucht. Jenes Integral genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{z} - \frac{\nu}{z^2}\right),$$

und lässt sich daher für beliebige ν folgendermassen darstellen:

$$y = J^\nu + \frac{\sin(\nu\pi)}{\nu\pi}(1 - S^{1,\nu} + \nu S^{0,\nu}).$$

Hierbei sind $S^{0,\nu}$ und $S^{1,\nu}$ specielle Werthe einer mit den Bessel'schen Functionen verwandten Function, die Herr Lommel schon früher untersucht hat (Clebsch Ann. IX. p. 425, s. F. d. M. VIII 1876. p. 311), nämlich von

$$S^{\mu,\nu} = \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\left(J^\nu\int z^\mu J^{-\nu}\,dz - J^{-\nu}\int z^\mu J^\nu\,dz\right).$$

Für diese Function lassen sich sowohl convergente, als semiconvergente Entwickelungen aufstellen.

Eine analoge Darstellung wie das Integral 1) lässt auch das folgende,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\nu\omega - z\sin\omega)\,d\omega,$$

n, nur dass hier die Darstellung verschieden wird für nicht ganzzahlige, grade und ungrade ν.

Im zweiten Theile der Arbeit werden die Fresnel'schen Integrale durch die obige Hülfsfunction dargestellt, nämlich

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)dv = \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z dz = \frac{1}{2}\int J^{+\frac{1}{2}}dz$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2z}{\pi}}[2\sin z(1-S^{1,\frac{1}{2}}) - \cos z . S^{0,\frac{1}{2}}]$$

$$\int \cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)dv = \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z dz$$
$$= \frac{1}{2}\int J^{-\frac{1}{2}}.dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2z}{\pi}}[2\cos z(1-S^{1,\frac{1}{2}}) + \sin z S^{0,\frac{1}{2}}].$$

Hieraus folgt, dass beide Integrale, von der hinzukommenden Integrationsconstante abgesehen, für $z = 0$ den Werth -1 annehmen und für $z = \infty$ verschwinden. Ferner ergeben sich für die Functionen $z^{\frac{1}{2}}S^{0,\frac{1}{2}}$ und $2z^{\frac{1}{2}}(1-S^{1,\frac{1}{2}})$ folgende Darstellungen durch bestimmte Integrale

$$z^{\frac{1}{2}}S^{0,\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-uz}du}{(1+u^2)\sqrt{u}},$$

$$2z^{\frac{1}{2}}(1-S^{1,\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-uz}\sqrt{u}\,du}{1+u^2},$$

und mit Hülfe dieser Darstellungen lässt sich der Gang der in Rede stehenden Functionen vollständig übersehen. Die so gewonnenen Resultate werden angewandt zur Discussion des Ausdrucks für die Intensität des gebeugten Lichtes für Punkte innerhalb des geometrischen Schattens eines einerseits unbegrenzt gedachten, andrerseits geradlinig begrenzten dunklen Schirmes. Man erhält ein deutliches Bild von der Variation der Lichtstärke, ohne zu numerischen Auswerthungen greifen zu müssen.

Im dritten Theile wird gezeigt, dass sich auch der Integral-Sinus und -Cosinus, nämlich die Integrale

$$\int_0^z \frac{\sin z}{z}dz \quad \text{und} \quad \int_z^\infty \frac{\cos z}{z}dz$$

leicht durch die Function $S^{\mu,\nu}$ ausdrücken lassen, woran sich

Discussionen, sowie Darstellungen dieser Functionen durch bestimmte Integrale anschliessen. Wn.

N. Sonine. Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries. Clebsch Ann. XVI. 1-80.

Im ersten Capitel betrachtet der Verfasser eine Reihe von Functionen

$$S_0(x),\ S_1(x),\ S_2(x)\dots S_n(x),$$

von welchen nur bekannt ist, dass sie der recurrenten Relation

$$(1)\qquad S_{n+1}+2\frac{dS_n}{dx}-S_{n-1}=0,$$

$$(1a)\qquad S_1=-\frac{dS_0}{dx}$$

genügen. Aus diesen Relationen ergiebt sich

$$S_n=\frac{(-D+\sqrt{D^2+1})^n+(-D-\sqrt{D^2+1})^n}{2}S_0,$$

wo die Potenzen von D Symbole für die entsprechenden Differentialquotienten der willkürlich bleibenden Function S_0 sind. Ferner folgt, dass, wenn man eine Function $f(\alpha+x)$ in eine nach den Functionen $S_n(x)$ fortschreitende Reihe entwickelt, die Coefficienten solche Functionen von α sind, die derselben recurrenten Relation 1) genügen. Speciell hervorzuheben sind die Entwickelungen

$$S_0(\alpha+x)=J^0(\alpha)S_0(x)+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^nJ^n(\alpha)S_n(x),$$

$$\frac{1}{x-\alpha}=J^0(\alpha)S_0(x)+2\sum_{n=1}^{n=\infty}J^n(\alpha)S_n(x).$$

In beiden Reihen sind die J die gewöhnlichen Bessel'schen Functionen, in der ersten ist ausserdem J_0 ganz willkürlich, während in der zweiten $S_0(x)=\frac{1}{x}$ ist, wodurch die $S_n(x)$ mit den von Herrn C. Neumann eingeführten Functionen $O^{(n)}$ identisch werden. Die Untersuchung der Convergenz der obigen Entwickelung fehlt gänzlich, und darüber dürfte auf dem vo

Verfasser eingeschlagenen Wege wohl nichts zu ermitteln sein [vgl. auch das folgende Referat].

Im zweiten Capitel wird die Betrachtung dahin erweitert, dass n nicht mehr eine ganze Zahl ist. Von den beiden obigen Formeln 1) und 1a) fällt dann naturgemäss die zweite fort; es bleibt nur die erste. Dieser wird genügt durch das Integral

$$(2) \qquad S_n = \int_a^b e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \psi(x) \frac{dt}{t^{n+1}},$$

wo ψ eine willkürliche Function, a und b zwei absolute Constanten sind. Der Verfasser stellt sich dann die Aufgabe, die willkürliche Function ψ so zu bestimmen, dass die Function $S_n(x)$ ausser der Bedingung 1) noch der weiteren Recursionsformel

$$(3) \qquad nS_n(x) = \frac{x}{2}[S_{n-1}(x) + S_{n+1}(x)]$$

genügt. Jede Lösung des Systems 1) und 3) wird als Cylinderfunction bezeichnet. Die allgemeinste Lösung ist, wenn n keine ganze Zahl,

$$S_n = AJ^n(x) + Be^{-n\pi i}J^{-n}(x),$$

wo A und B periodische Functionen von n sind, J die Bessel'schen Functionen; für ganzzahlige n wird

$$S_n = AJ^n(x) + BY^n(x).$$

Nebenbei ergeben sich aus 2) verschiedene Integraldarstellungen der Bessel'schen Functionen, sowie andre auf diese Functionen bezügliche Formeln, die zum grossen Theil bekannt, zum Theil auch Verallgemeinerungen bekannter Formeln sind. Wir erwähnen die eine Formel

$$(4) \qquad J^n(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{a}{2}(k+ri) - \frac{x^2}{2a(k+ri)}} \cdot \frac{dr}{(k+ri)^{n+1}},$$

wobei der reelle Theil von n positiv sein muss.

Es folgt die Behandlung von unbestimmten Integralen der Form

$$\int \sigma(x) . S_\mu(\varphi(x)) . S_\nu(\psi(x))\, dx,$$

und es wird bestimmt, in welchem Falle sich ein solches Integral

durch ein Aggregat von Producten je zweier der Functionen $S_\mu(\varphi(x))$, $S_{\mu+1}(\varphi(x))$, $S_\nu(\psi(x))$, $S_{\nu+1}(\psi(x))$ ausdrücken läss. Analoge Aufgaben sind, wenn auch nicht so allgemein, schon von Lommel behandelt (cf. F. d. M. XI. 1880. p. 349).

Im vierten Abschnitt werden bestimmte Integrale, die Cylinderfunctionen enthalten, untersucht. Vorzugsweise durch Benutzung des obigen Ausdrucks (4) und Umformung der entstehenden Doppelintegrale wird eine grosse Zahl von Formeln abgeleitet, die sich schon in den Arbeiten von Weber, Hanke und Gegenbauer finden, verschiedene Formeln werden in Zusammenhang gebracht und einige neue sehr allgemeine hinzugefügt. Von diesen mögen die folgenden hier Platz finden:

$$\int_0^\infty J^m(qx)e^{-hx^2}x^{m+1}\,dx = \frac{q^m}{(2h)^{m+1}}e^{-\frac{q^2}{4h}},$$

wobei $m > -1$, h eine beliebige complexe Grösse mit positivem reellen Theile ist;

$$\int_0^\infty J^m(bx)x^{m-1}\frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\,dx$$

$$= \frac{b^m}{a^n}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1}\cdot J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2}) \quad \text{für } a>b,$$

$$= 0 \text{ für } a<b.$$

Dabei ist $n > m > -1$, a und b reell und positiv. Endlich findet sich noch folgende Darstellung der Bessel'schen Function zweiter Art $Y^0(k)$:

$$Y^0(k) = -2\int_0^\infty J^0(x)\frac{\cos(x+k)}{x+k}\,dx$$

$$= -2\int_0^\infty \frac{J^0(x)\,dx}{x+k} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(k\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Weiter folgt die Behandlung der Bessel'schen Differentialgleichung. Es wird gezeigt, wie man durch Benutzung der von Hargreave (Phil. Trans. 1848) aufgestellten symbolischen Lösung dieser Differentialgleichung, nämlich

$$y = x^n(1+D^2)^{-n-\frac{1}{2}}\frac{C\sin x + C_1\cos x}{x}, \quad n > -\tfrac{1}{2},$$

eine Anzahl bekannter Integraldarstellungen der Bessel'schen Functionen erhält. Die Methode ist die, $\frac{\sin x}{x}$ oder $\frac{1}{x}$ durch ein bestimmtes Integral auszudrücken und das Symbol $(1+D^2)^{n-\frac{1}{2}}$ zu entwickeln.

Zum Schluss wird der Inhalt des ersten Abschnitts verallgemeinert. Es wird wieder n als ganze Zahl angenommen und statt der Recursionsformeln 1) und 1a) werden die allgemeineren

$$S_n(x) = \varphi_n(D).S_0(x), \quad \varphi_0(D) = 1$$

gewählt, wobei D dasselbe Symbol wie oben bezeichnet. Sodann wird gezeigt, wie aus einer Entwickelung von $e^{\alpha x}$, die nach irgend welchen Polynomen von α fortschreitet, eine analoge Entwickelung der willkürlichen Function $S_0(\alpha+x)$ nach denselben Polynomen von α folgt, wobei die $S_n(x)$ die Coefficienten der Entwickelung sind. Dies wird angewandt auf einige specielle Fälle, z. B. auf den Fall $S_0(x) = \frac{J^\nu}{x^\nu}$ etc. Eine eingehendere Behandlung dieses Gegenstandes behält sich der Verfasser vor.

Wn.

J. König. Ueber Reihenentwickelung nach Bessel'schen Functionen. Clebsch Ann. XVII. 85-86.

Für die im ersten Abschnitt der vorstehenden Arbeit von Sonine gegebene Entwickelung einer beliebigen analytischen Function in Reihen, die nach Bessel'schen Functionen der Variablen fortschreiten, wobei die Coefficienten durch recurrirende Gleichungen dargestellt werden, nimmt Herr König die Priorität in Anspruch; vgl. dessen Arbeit Clebsch Ann. V. (F. d. M. IV. 1872. p. 189). Bei Sonine sind nur die recurrirenden Formeln durch die ausgerechneten Ausdrücke ersetzt, was aber keine Mühe macht, während Herrn König's Entwickelungen einfacher und hinsichtlich der Convergenz der Reihen strenger sind.

Wn.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

G. Cantor. Ueber unendliche lineare Punktmannig faltigkeiten. Clebsch Ann. XVII. 355-359.

Fortsetzung der in diesem Jahrbuch XI. 1881. p. 351 b sprochenen Arbeit. Es werden zunächst die Begriffe des Z sammenhanges, des kleinsten gemeinsamen Vielfachen und d grössten gemeinsamen Theilers zweier Punktmengen erört und Bezeichnungen für diese Beziehungen aufgestellt. Es zei sich dann, dass jede folgende Ableitung einer Punktmenge e Divisor der vorhergehenden ist. Die „Punktmengen 1ter Gattun sind schon durch den einfachen Begriff der Ableitung genüge charakterisirt. Für Punktmengen 2ter Gattung bedarf densell einer Erweiterung, die auf folgende Art gewonnen wird. Bei d Bildung der Ableitungen P', P'' ... einer Punktmenge 2ter G tung fällt jedesmal eine Punktmenge weg, während eine ande R, beständig erhalten bleibt. Es ist dann $R = P^{(\infty)}$. Aus le terem Begriffe folgen dann eine Menge anderer, indem d Index ∞ durch Addition, Multiplication und Potenzirung mit ea

lichen Zahlen und mit sich selbst schliesslich zu der Form $\infty^{\infty^{\infty}}$ erweitert wird. Am Schlusse wird der einfache Fall erörtert, dass $P^{(\infty)}$ aus einem einzigen Punkte besteht. Schg.

W. J. Stringham. Regular figures in *n*-dimensional space. Am. J. III. 1-15.

Ein *n*-dimensionaler Winkel wird von *n* Kanten, $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Ebenen, allgemein von $n \cdot ^k$ *k*-dimensionalen Gebilden begrenzt. Er heisst regulär, wenn alle Grenzgebilde von gleicher Dimensionenzahl congruent sind. Die Zahl seiner Grenzkanten ist im letzteren Falle gleich der Zahl der Ecken eines $(n-1)$-dimensionalen regulären Gebildes. Hiernach giebt es 5 Arten regulärer vierdimensionaler Winkel. Es ergeben sich hieraus 11 Bildungsweisen regulärer vierdimensionaler Gebilde, indem in jeder Ecke eines solchen 4, 8, 20 Tetraeder, Hexaeder, Dodekaeder, ferner 6 Oktaeder und 12 Ikosaeder zusammenstossen können. Da aber die Zahl der $(n-1)$-dimensionalen Grenzgebilde, welche in einer Ecke zusammentreffen, kleiner sein muss als die der $(n-1)$-dimensionalen Gebilde, welche im $(n-1)$-dimensionalen Raume um einen Punkt herumgelegt werden können, so reducirt sich die Zahl der regulären Gebilde von 11 auf 6. Dieselben werden resp. begrenzt von 5, 16, 600 Tetraedern, 24 Oktaedern, 8 Hexaedern, 120 Dodekaedern. Diese letzteren Zahlen findet der Verfasser empirisch durch Construction der dreidimensionalen Projectionen jener Gebilde. Es werden weiter die Bildungsweisen der regulären 5-dimensionalen Gebilde mitgetheilt und classificirt In den Räumen mit 5 und mehr Dimensionen existiren nur noch je 3 reguläre Gebilde, begrenzt von $n+1$, $2n$ und 2^n Gebilden mit $n-1$ Dimensionen. Schg.

W. Killing. Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie. Pr. Brilon.

Untersuchungen über die Grundbegriffe Körper, Raum und

diejenigen, welche Beziehungen zwischen diesen Gebilden ausdrücken, ferner über den Ursprung verschiedener Raumformen und die denselben zukommenden Grundsätze und einschränkenden Bedingungen. Schg.

W. Killing. Die Rechnung in den Nicht-Euklidischen Raumformen. Borchardt J. IXC. 265-288.

Im Anschluss an eine frühere Arbeit (S. F. d. M. X. 1878. p. 344) zeigt der Verfasser durch Rechnung, dass die vier bekannten Raumformen, die Euklidische, Lobatschewski'sche, Riemann'sche und die Polarform des letzteren die einzigen für das reale Gebiet existirenden sind, während in der Lobatschewski'schen Geometrie für ein mit dem reellen im Unendlichen zusammenhängendes ideales Gebiet noch mehrere Formen denkbar sind. Betrachtet man auch den Euklidischen Raum als zusammengesetzt aus einem realen und einem idealen Theile, die beide im Unendlichen zusammenhängen (dieselbe Auffassung lässt sich auch auf Gerade und Ebene anwenden), so lässt sich auch die Riemann'sche Raumform auf die Euklidische eindeutig abbilden.

Schg.

G. Chrystal. Non-Euclidian geometry. Proc. of Edinb. X. 638-644.

Dies ist eine Adresse, welche auf Veranlassung der Royal Society von Edinburgh bearbeitet ist, und deren Gegenstand zum Theil deshalb gewählt ist, weil sie mit Notizen von des Verfassers Vorgänger, Prof. Kelland, zusammenhängt. Der Verfasser betrachtet die Arbeit als eine Skizze, welche für solche Leser bestimmt ist, die mit Euklid's Geometrie vertraut sind. Er will keine detaillirte Uebersicht über die neueren Untersuchungen und auch keine systematische Behandlung geben, sondern nur auf synthetischem Wege einen allgemeinen Ueberblick über das, was in einem bestimmten Theil eines jetzt viel bearbeiteten Gegenstandes bekannt ist. Er hat sich dabei so viel als möglich an

Methoden Euklid's gehalten, vielleicht zum Theil auf Kosten der Eleganz, aber dafür zu praktischem Nutzen. Bibliographische Details werden nicht gegeben, da sich diese ja schon in Halsted's Arbeit finden (Am. J. I 261-276, 384, 385, II 65-70 s. F. d. M. X. 1878. p. 343, XI. 1879. p. 357). Der Verfasser bemerkt, dass er zwar den grössten Theil der Literatur selbst gelesen hat, sich aber doch hauptsächlich an Newcomb und Frischauf anschliesst.

Unter den Bemerkungen möge hervorgehoben werden die Unterscheidung zwischen den beiden Arten elliptischen Raumes. Der einfachste Fall ist der, in dem eine gerade Linie so in sich selbst zurückkehrt, dass der nächste Punkt, in dem zwei gerade Linien sich schneiden, der Punkt ist, in dem sie sich zuerst schneiden. Dies kann der einfach elliptische Raum genannt werden. Der nächst einfache Fall ist der, in dem sich zwei gerade Linien ein zweites Mal in einem verschiedenen Punkte schneiden und zwar in einem Schnittpunkt, der mit dem ursprünglichen einen zusammenfällt. Dies kann der doppelt elliptische Raum genannt werden. Ob diese Multiplicität des elliptischen Raumes noch weiter fortgeführt werden kann, ist nicht klar. Cly. (O.)

E. Ricordi. J circoli nella geometria non euclidea. Battaglini G. XVIII. 255-271.

Nach einer Reihe einleitender Sätze über die Kreise in der nicht-euklidischen Geometrie werden die von Battaglini früher auf analytischem Wege gefundenen diesen Gegenstand betreffenden Resultate durch rein geometrische Betrachtungen abgeleitet. (S. F. d. M. VI. 1874. 300 und 420.) Schn.

P. Cassani. Intorno ad alcune generazioni della retta e del piano. Atti d. Ist. Ven. (3). II. 45-52.

Den von Lobatschewsky und Bolyai gegebenen Definitionen der Geraden und der Ebene haftet, wie der Verfasser mit Recht

bemerkt, der Uebelstand an, dass sie eine ganze Anzahl andere Sätze voraussetzen. Diesen Uebelstand sucht der Verfasser dadurch zu vermeiden, dass er Gerade und Ebene als den geometrischen Ort eines Punktes definirt, dessen variable Abstände von drei resp. zwei Punkten einander gleich sind.

Schg.

Capitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

J. H. GRAF. Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche. Diss. Bern. Huber u. Comp.

Schätzbarer Beitrag, um die von Clebsch und Gordan in ihrer Theorie der Abel'schen Functionen studirten Kreiswege 1ter und 2ter Art der Riemann'schen Flächenanschauung zu nähern. Als Vermittlung dienen einige Sätze von Clebsch (Clebsch Ann. VI. 216, s. F. d. M. V. 1873. 283), die die Lüroth'sche Umwandlung der Riemann'schen Fläche (Clebsch. Ann. III. 181, cf. F. d. M. III. 1871. p. 192) ergänzen. Als Beispiel dient eine sechs-blättrige Fläche mit 20 Verzweigungspunkten (Curve 6ten Grades mit 5 Doppelpunkten).

Zum Schluss wird die bez. Riemann'sche Fläche durch allmählige Deformationen in die Fläche eines Körpers mit 5 (allgemein mit p) Durchbohrungen übergeführt und der Vortheil dieser Anschauung nachgewiesen. Zum Letzteren möchte Referent bemerken, dass Herr Professor Klein seit mehreren Jahren mit dieser Gestalt der Flächen als der bequemsten operirt.

My.

P. G. TAIT. On the colouring of maps. Proc. of Edinb. X. 501-503.

Bezieht sich auf De Morgan's durch Erfahrung gefundenen

Satz, dass vier Farben hinreichend sind, um auf einer Karte die verschiedenen Districte alle von einander zu unterscheiden.

Cly. (O.)

P. G. TAIT. Note on a theorem of the geometry of position. Trans. of Edinb. XXIX. 657-660.

Bezieht sich auf einen Satz, der in der obigen Arbeit gegeben ist und hier in folgender Form aufgestellt wird: „Wenn $2n$ Punkte durch $3n$ Linien so verbunden werden, dass je drei Linien, und nur drei sich in jedem Punkte schneiden, so können diese Linien (meist auf mannigfache Weise) in drei Gruppen von je n so getheilt werden, dass eine aus jeder Gruppe in jedem der Punkte endet.“

Cly. (O.)

P. G. TAIT. Remarks on the preceeding communication. Proc. of Edinb. X. 729.

Cly.

P. G. TAIT. Solution of a question (5494). Educ. Times XXXIII.. 33.

Behandelt zwei specielle Fälle der Verknotungstheorie des Verfassers, anknüpfend an die Arbeit desselben in den Trans. of Edinb., 1877, über die F. d. M. IX. 1877. 392 berichtet worden ist.

O.

DE POLIGNAC. Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications. Bull. S. M. F. VIII. 120-124.

Es sind dies Configurationen aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt, wie sie schon von Jordan, Sylvester, Cayley, Tebay etc. betrachtet sind. Der Herr Verfasser definirt sie als solche aus Zweigen und Knotenpunkten bestehende ebene Figuren, „so dass man von jedem Knotenpunkt zu jedem andern

aber nur auf einem Wege gelangen kann." (Somit sind geschlossene Curven- oder Curventheile hier ausgeschlossen). Es gilt der Satz: „Wie man auch eine „Verzweigung" (ohne Wiederholung und Hemmung) ziehen mag, die Zahl der Durchläufe ist immer dieselbe." Es ist dies die Zahl der Züge, die dazu gedient haben, die „Verzweigung" zu zeichnen, $= N$. Für diese (Fundamentalzahl) werden eine Reihe von Ausdrücken aufgestellt, mittelst der verschiedenen Grössen, die eine Verzweigung charakterisiren können. So erhält man z. B.:

$$N = \Sigma\left(\frac{m+1}{2}\right) - (\nu - 1),$$

wo m die Zahl der Zweige eines Knotenpunktes, ν die Zahl der letzteren, $\left(\frac{m+1}{2}\right)$ die in diesem Bruch enthaltene grösste ganze Zahl ist. Desgleichen, wenn für eine gegebene Verzweigung die graden Zahlen m an Zahl p vorhanden sind

$$= 2\mu_1,\ 2\mu_2,\ \dots 2\mu_p$$

und die ungraden an Zahl i

$$= 2\lambda_1 + 1,\ 2\lambda_2 + 1,\ \dots 2\lambda_i + 1,$$

so ist

$$N = \Sigma\mu + \Sigma\lambda - p + 1,$$

wo also i gar nicht vorkommt. My.

O. Simony. Ueber jene Flächen, welche aus ringförmig geschlossenen, knotenfreien Bändern durch in sich selbst zurückkehrende Längsschnitte erzeugt werden. Wien. Ber. 1880.

Es wird die Verknotung der Flächen festgestellt, die aus einem rechteckigen Streifen entstehen, indem man das eine Ende beliebig oft tordirt (d. h. um ein Multiplum von 180° dreht), sodann mit dem anderen Ende verklebt und endlich längs der Mittellinie des Streifens einen vollständigen Schnittt führt.

Es ergiebt sich, dass für ein ungrades Multiplum von 180° $= (2k+1)\ 180°$ ein einziges, ringförmig geschlossenes Band mit einer Gesammtverdrehung von $4(k+1)\ 180°$ entsteht mit einem

verschiebbaren Knoten k^{ter} Art, d. h. einem solchen, den man erhält, wenn man die eine Hälfte eines Streifens $k$mal um die andere windet und ihr Ende zum Schluss durch die Anfangsschlinge durchzieht.

Dagegen für ein grades Multiplum $2k(180)$ entstehen zwei geschlossene Bänder mit je einer Gesammtverdrehung von $2k\,(180^{\circ})$, von denen jedes an irgend einer (vertical gestellten) unverdrehten Stelle des anderen aufgehangen werden kann. Desshalb sind sie auch nur mittelst eines ganzen Querschnitts, den man für eines derselben führt, auseinander zu bringen. (Verbindung k^{ter} Art.)

Das allgemein gestellte moderne Problem „in ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen" lässt daher, wie man aus dem ersten Fall sieht, unendlich viele Lösungen zu; jedoch unter den beiden Voraussetzungen, erstens, dass das gegebene Band schon eine gewisse Verdrehung aufweisen muss, zweitens, dass die Länge des umgeformten Bandes eine andere geworden ist.

Endlich wird gezeigt, dass die oben angegebene Gesammtverdrehung des Knotens resp. der Verbindung k^{ter} Art keine unveränderliche ist. Denn man kann z. B. jene Gebilde auch mittelst analoger Verdrehungs- und Längsschnittoperationen aus einem Kreuzstreifen erzeugen, so dass nun die Gesammtverdrehung eine andere wird. My.

H. Durège. Ueber die Hoppe'sche Knotencurve. Wien. Ber. 1880.

R. Hoppe. Bemerkung betreffend die Auflösung eines Knotens in 4ter Dimension. Grunert Arch. LXV. 423-426.

Herr Hoppe hatte (Grunert Arch. LXIV. p. 224, cf. F. d. M. XI. 1881. p. 362) die Gleichung eines unauflösbaren Knotens aufgestellt, die mit Hülfe einer vierten Coordinate (der vierten Dimension) und eines variabeln Parameters continuirlich in die Gleichung eines Kreises übergeht. Die Gleichungen sind von

der Form

$$x_i = f(t).\varphi_i(t, u) \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

wo t der Hülfsparameter ist, der die Gestaltsveränderung regulirt. Die φ_i sind bestimmte ganze Functionen von $\sin u$, $\cos u$, $\cos t$, $\sin t$. $f(t)$ braucht dagegen nur die Bedingung zu erfüllen, dass für die verschiedenen Werthe von t die Länge der Curve constant bleibt. Ausserdem soll $f(0)$ noch gleich 1 sein. In der That kann f so bestimmt werden.

Für $t = 0$ bis $t = \pi$ geht die Curve vom ersten Zustand ($x_4 = 0$, Knoten) stetig in den Endzustand ($x_4 = 0$, $x_3 = 0$, Kreis) über.

Herr Durège bemerkt treffend, wie diesem Beispiel noch der Mangel anhaftet, dass bei der Aenderung von t die Curve sich gleich im ersten Moment öffnet, also nicht geschlossen bleibt, und hilft diesem Uebelstande ab, indem er setzt

$$x_4 = \tfrac{1}{2}h \sin u \sin t \; f(t)$$

(h constant), während bei Herrn Hoppe statt $\sin u$ nur u stand. Weiter zeigt Herr Durège, dass die Störung, die etwa durch ein Unendlichgrosswerden von f einträte, in der That nicht stattfindet, indem f endlich bleibt.

Die Bedingung der Unauflösbarkeit im drei-dimensionalen Raume drückt sich mathematisch dadurch aus, dass für einen Werth von t die Curve

$$x_i = f(t)\varphi_i(t, u) \quad i = 1, 2, 3$$

einen wirklichen Doppelpunkt haben muss.

Die Möglichkeit der Ueberführung in den Kreis im vierdimensionalen Raum bedingt, dass in diesem Raum die Curve

$$x_i = f(t)\varphi_i(t,u) \quad i = 1, \ldots 4$$

für keinen Werth von t einen Doppelpunkt besitzt. Beides weist Herr Durège nach, indem er den Doppelpunkt im drei-dimensionalen Raum berechnet, und ergänzt somit auch in dieser Hinsicht die Betrachtungen des Herrn Hoppe.

Herr Hoppe giebt die Umgestaltung von $\varphi_4(t, u)$ zu und zeigt im Weiteren, wie sich die Umgestaltung der Curve auch ausdehnen lässt auf ein körperliches cylindrisches Band, dessen

Mittellinie die Curve ist. Bei der Tordirung dieses materiellen Bandes wird sich die Länge ändern, d. h. man setze einfach $f(t) = 1$. Bei nicht zu grosser Dicke des Bandes kann man es stets so einrichten, dass sich dasselbe nirgends selbst durchdringt und die im Anfang zur Mittellinie senkrechten Querschnitte bei der Umgestaltung stets senkrecht bleiben. My.

E. Cesaro. Sur l'existence de certains polyèdres. N. C. M. VI. 118-119.

Es giebt nur fünf Arten von regulären Polyeder, wie bekannt. Mn. (O.)

F. Röllner. Ueber einfach und mehrfach zusammenhängende Polyederflächen. Z. f. d. R. V. 133-142.

Neun, grossentheils neue, Theoreme über den Zusammenhang von Flächen, dies Wort im Riemann'schen Sinne genommen. Zur Probe greifen wir einen dieser Sätze heraus: „Für jede $(2n+1)$-fach zusammenhängende Polyederoberfläche mit f mehrfach zusammenhängenden Seitenflächen, in welcher man jeden Eckpunct mit jedem anderen durch eine Kante oder eine aus Kanten zusammengesetzte Linie verbinden kann, gilt die Formel $2f \leq s \leq n+f$, sofern s die Summe der f Zahlen ist, welche einzeln die Ordnung des Zusammenhanges der f Seitenflächen angeben." Angewandt werden diese stereometrischen Wahrheiten einerseits zur Aufklärung einiger Bemerkungen v. Staudt's, andererseits zur Bestimmung der massgebenden Constanten für jene Polyederformen, welche Hessel in seinem Aufsatze „Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von den Polyedern" (Crelle J. VIII.) beschrieben hat. Gr.

E. Hess. Anwendungen und Erweiterungen des Steiner-Lindelöf'schen Satzes. Marb. Ber. 1880. 55.

Vorläufige Mittheilung über eine demnächst erscheinende Abhandlung. V.

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

SZWAJKART. Kurzer Abriss der Mathematik auf der Grundlage der Lehre von den Raumgrössen und der Zahlensysteme. Erstes Heft. Lemberg. 1880.

Das Referat geben wir in dem folgenden Bande der Jahrbücher. Dn.

V. SCHLEGEL. Lehrbuch der elementaren Mathematik. II. Th.: Geometrie. III. Th.: Trigonometrie (mit einer vierstelligen Logarithmentafel). IV. Th.: Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Wolfenbüttel. J. Zwissler.

Ueber den ersten Theil dieses Lehrbuchs haben wir F. d. M. XI. 1879. p. 803 berichtet und die für die Abfassung des Buches massgebend gewesenen Grundsätze erwähnt. Wie die meisten besseren neueren Lehrbücher der Planimetrie weicht auch dieses der Form und dem Inhalt nach von dem alten euklidischen Muster ab. Das Hauptziel der mathematischen Bildung ist nicht in der Kenntnis einzelner Sätze, sondern in dem Verständnis des inneren Zusammenhanges aller Sätze zu suchen. Deshalb weicht die Form darin ab, dass der Lehrsatz erst dann ausgesprochen wird, wenn er aus früheren Sätzen abgeleitet worden ist. Für die Darstellung ist das fruchtbare Princip der Verwandtschaft oberster Gesichtspunkt, und zur Begründung dieses Principes ist das Princip der Bewegung unentbehrlich. Uebrigens hat der Herr Verfasser den Anhängern der alten Methode bei dem Beweise der Congruenz dadurch eine Concession gemacht, dass er den Gang nach der alten Methode in die Anmerkung mitaufgenommen hat. Was den Umfang der Geometrie betrifft,

so sind auch die Kegelschnitte behandelt, und zwar nach rein geometrischer Methode, die durch gleichzeitige Betrachtung der Curve und eines festen Kreises vereinfacht wird.

In der Trigonometrie ist der Herr Verfasser im wesentlichen dem Vorgange H. Grassmann's (Lehrbuch der Trigonometrie, Berlin 1865, Enslin) gefolgt. Der Cosinus bildet das Fundament der goniometrischen Functionen, und die Trigonometrie wird überhaupt als Anwendung der allgemeinen Functionslehre auf die Geometrie, nicht als rein geometrische Disciplin angesehen. Daher finden wir auch die Darstellung der Winkelfunctionen in transcendenter und Reihenform ausführlicher als gewöhnlich behandelt. Die Aufgaben für die Berechnung der Dreiecke sind schematisch geordnet. Am Schluss findet sich eine vollständige vierstellige Logarithmentafel.

In der Stereometrie ist der Hauptnachdruck auf die Beziehungen zwischen ebenen und räumlichen Gebilden gelegt. Auch hier ist, wie in der Geometrie, die Bewegung oberstes Princip. Besonders ausführlich ist die Lehre vom Tetraeder und von den regelmässigen Polyedern behandelt. Ganz abweichend von anderen Lehrbüchern der Stereometrie hat der Herr Verfasser auch die allgemeinen Flächen 2ter Ordnung mitaufgenommen, die in möglichst elementarer Weise behandelt werden.

M.

F. Hoza. Elemente der ebenen Geometrie. Prag. (Böhmisch.).

Das sorgfältig ausgearbeitete, dem österreichischen Schulprogramm genau angepasste Buch enthält in 5 Abtheilungen das Nothwendigste aus der ebenen Geometrie, insoweit die Unterabtheilung der Mittelschule zu berücksichtigen ist, und bildet mit der früher ausgegebenen Geometrie des Raumes von demselben Verfasser ein pädagogisches durchdachtes Ganze von nicht selten origineller Fassung.

Std.

J. K. Becker. Lehrbuch der Elementargeometrie für den Schulgebrauch. Drittes Buch. Stereometrie, sphärische Trigonometrie und Kegelschnitte. Berlin. 1879. Weidmann.

Das 1te Buch (1877) enthielt die 1te Stufe der Planimetrie, das 2te Buch (1878) die ebene Trigonometrie und 2te Stufe der Planimetrie. Diese sowohl wie das gegenwärtige verwerthen die Grundsätze, welche in der vorausgehenden Schrift des Verfassers: „Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage etc.“ 1877 (s. F. d. M. IX. 1877. p. 394) dargelegt sind. Die Stereometrie stützt sich nicht wie gewöhnlich auf die vorausgehende Behandlung der Planimetrie, sondern greift im Gegentheil in der Grundlegung noch weiter zurück als diese. Die Grundbegriffe der Geometrie werden mit ausserordentlicher Gründlichkeit und Ausführlichkeit entwickelt. Das Studium der Riemann'schen Schriften hat sichtlich den Verfasser auf die Beachtung der wichtigen Punkte gelenkt. So entsprechen auch die aufgestellten sechs Axiome (a. a. O. genannt) im ganzen den Beschränkungen des empirischen Raumes nach Riemann. Die didaktische Verarbeitung der von ihm aufgenommenen Ideen ist zum grossen Theil mit Glück und Geschick ausgeführt. Bemerkenswerth ist z. B., dass erst die kürzeste Linienverbindung zwischen zwei Punkten, durch sie der Abstand, dadurch die Kugel, dann die Rotation und der Kreis, dadurch die Gerade, diese also zweimal, erst als Kürzeste, nun als Rotationsaxe erklärt wird. Dass die Existenz des Minimums der Verbindungslinie nicht exact gefolgert werden kann, räumt der Verfasser selbst ein. Die Abschnitte des Buchs sind: 1) Grundbegriffe, Beziehungen zwischen Geraden, Ebenen, Kugel-, Kegel- und Cylinderflächen, woran sich Aufgaben schliessen; 2) Körperlehre oder Stereometrie im engeren Sinne; 3) Sphärik und sphärische Trigonometrie; 4) Kegelschnitte, deren Eigenschaften aus dem ebenen Schnitt des Kegels hergeleitet werden.

H.

E. GLINZER. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Erster Theil: Planimetrie. Hamburg. F. H. Nestler u. Melle.

Das Lehrbuch soll zur mathematischen Vorbildung für Gewerbe dienen. Es ist indess nicht weniger exact bearbeitet, als es die wissenschaftliche Bestimmung erfordert hätte. Für beide Zwecke gleich ungenügend ist es dagegen, dass die Incommensurabilität unberücksichtigt und unerwähnt bleibt. Im übrigen ist der Lehrgang der gewöhnliche. Die Figuren sind in den Text gedruckt. Ausführlicher besprochen in Grunert Arch. LXV. Lit. Ber. p. 19.

H.

G. WAGNER. Ueber geometrische Constructionsaufgaben beim planimetrischen Unterrichte. Zeitschr. f. d. Realsch. V. 535-540.

Betrachtungen über die zweckmässigste Art, planimetrische Aufgaben auszuwählen und aufzulösen, verbunden mit Bemerkungen über die gangbaren Beispielsammlungen. Das treffliche Werkchen Petersen's (deutsch von Fischer-Benzon) ist merkwürdigerweise nicht besprochen. Gr.

A. MUKHOPADHYAY. Proof of Euclid I. 25. Messenger (2) X. 122-123.

Directer Beweis des Satzes durch Inversion. Glr. (O.)

R. TUCKER, J. L. KITCHIN. Solution of a question (42). Educ. Times XXXIII. 35.

Zieht man von den Ecken eines Dreiecks ABC drei Gerade durch einen Punkt O, welche die gegenüberliegenden Seiten resp. in den Punkten A', B', C' schneiden, so ist, wie bekannt:

$$2\Delta ABC : \Delta A'B'C' = AO.BO.CO : A'O.B'O.C'O.$$

O.

A. PÁNEK. Ueber die Berechnung der Dreiecksfläche aus den Seitenlängen. Casopis IX. 162. (Böhmisch.)

Enthält eine neue Ableitung der bekannten Formel unter Verwendung von Determinanten. Std.

N. VON LORENZ. Nachtrag zu der Dreiecksaufgabe T. LXIII. p. 300. Grunert Arch. LXV. 212-215.

Die citirte Aufgabe bildet den zweiten Theil des in F. d. M. XI. 371 besprochenen Aufsatzes. Es handelte sich um Ausdrücke der Seiten und der in ihnen symmetrischen Grössen in drei ausgewählten der letztern. Diese Bestimmung giebt jetzt Anlass, einige Fälle von Maximis und Minimis zu untersuchen. H.

G. DOSTOR. Surface des triangles dont les sommets sont les pieds des bissectrices d'un triangle donné. Grunert Arch. LXIV. 407-425.

Die inneren und äusseren Winkel eines Dreiecks werden halbirt, die durch die Schnitte der Gegenseiten begrenzten Linien und die entstehenden Dreiecke durch die Seiten und den Inhalt des Urdreiecks ausgedrückt. H.

G. DOSTOR. Distances mutuelles entre les pieds des six bissectrices d'un triangle. Grunert Arch. LXIV. 426-431.

Es wird der durch den Titel bezeichnete Theil der vorigen Aufgabe behandelt. H.

A. HAUSSNER. Constructionsaufgaben. Grunert Arch. LXV. 334-336.

Die zwei ersten Aufgaben, welche hier gelöst werden, sind: Aus den drei Höhen ein Dreieck und aus den vier Seitenlängen ein Kreisviereck zu construiren. Hierauf folgt die Theorie des

„Pantographen." Dies Instrument besteht aus einem Rhombus mit variabelm Winkel, in einem Punkte einer Seite fest in einer Ebene; ein Punkt der Gegenseite wird in der Ebene geführt; derjenige Punkt einer dritten Seite, welcher mit den zwei Punkten in gerader Linie liegt, enthält den zeichnenden Stift. Seine Bewegung ist parallel und proportional der Bewegung des zweiten Punktes; er zeichnet daher eine ähnliche Figur. H.

G. DOSTOR. Distances des trois sommets d'un triangle au centre d'un cercle, qui passe par les pieds des trois hauteurs du triangle. Grunert Arch. LXVI. 24-26.

Sind a, b, c die Seiten des Urdreiecks, R der Radius von dessen Umkreis, so ist das vierfache Quadrat des Abstands einer Ecke vom Mittelpunkt des Neunpunktkreises

$$= R^2 + b^2 + c^2 - a^2,$$

die andern analog und das vierfache Quadrat des Abstands des Höhenschnitts von demselben Mittelpunkt ist

$$= 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

H.

M. D'OCAGNE. Démonstrations de théorèmes énoncés dans les Nouvelles Annales. Nouv. Ann. (2) XIX. 304-307.

Zwei dieser Sätze, am gleichschenkligen und am beliebigen Dreieck, sind recht sinnreich, doch die Figuren nicht einfach zur Mittheilung; der dritte lautet: Ein beliebiger Punkt eines Kegelschnitts, der Fusspunkt des Lothes vom Mittelpunkt auf die Tangente in ihm und die Endpunkte einer Axe liegen auf einem Kreise. Hieraus folgt ein vierter Satz. H.

S. KANTOR. Geometrische Untersuchungen. Schlömilch Z. XXV. 54-59.

Einem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ und einem zweiten $B_1 B_2 B_3$ auf dem Kreise K, insbesondere seinem Gegendreieck, ist eine Ellipse ein-

beschrieben, welche der Ort der Schnittpunkte normaler zu demselben Punkte des Kreises gehöriger Geradenpaare σ ist. An den Combinationen der Dreieckspaare, welche sich aus den sechs Ecken formen lassen, werden eine grössere Anzahl Bemerkungen ohne Beweis mitgetheilt, dann der folgende Satz bewiesen: Der Feuerbach'sche Kreis des Dreiecks $B_1 B_2 B_3$ berührt einen die drei Seiten in $A_1 A_2 A_3$ berührenden Kreis in jenem Punkte T, welcher die Eigenschaft hat, dass seine Gerade σ bezüglich $A_1 A_2 A_3$ parallel der Euler'schen Geraden dieses letztern Dreiecks ist. Ferner wird eine Formel für das Kreisviereck und umschriebene Vierseit hergeleitet. H.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Dreieck und Viereck von Cochez, N. H. Capel, A. L. Selby, E. Rutter, H. G. Day, D. Eastwood, J. Openshaw, W. J. C. Miller, H. Murphy, J. O'Regan, J. M. Fauré, Lannes, A. Leinekugel, E. Fauquembergue, W. P. Casey finden sich Educ. Times XXXIII. 29-31, 42, 43-44, 83, 112; Nouv. Ann. (2) XIX. 473-475, 508-510, 514-517, 557-558; Analyst VII. 120.

O.

A. Pánek. Bemerkungen zur Lehre vom Viereck. Casopis IX. 43. (Böhmisch.)

Aus gewissen Flächenbeziehungen wird schliesslich Platon's Construction rationaler Dreiecke abgeleitet. Std.

G. Dostor. Les trois quadrilatères convexes d'Albert Girard, qui ont mêmes côtés, même surface et sont inscriptibles dans le même cercle. Grunert Arch. LXVI. 27-32.

Sind die Seiten gegeben, so giebt es nur einen Kreis, in den sie sich als Sehnen eintragen lassen; durch Vertauschung je zweier Sehnen ergeben sich drei Vierecke, der Inhalt bleibt

ffenbar bei der Vertauschung der anstossenden Seiten derselbe; r ist

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

o p die halbe Summe der Seiten a, b, c, d ist. Der Radius es Kreises ist

$$R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}.$$

H.

CHLOSSER. Vom Studirtische. Bair. Bl. XVI. 106.

Bekanntes vom Sehnenviereck. Gr.

. SAILER. Geometrische Aufgabe. Bair. Bl. XVI. 70-71.

Wie findet man die beiden Diagonalen eines Vierseites, essen vier Ecken unzugänglich sind? Die eine der beiden mitetheilten Lösungen bedient sich eines festen Kreises, die andere los des Lineales. Gr.

. MILLER. Einige neue Beziehungen im regulären Zehneck. Bair. Bl. XVI. 269-271.

Geometrische Interpretation gewisser Zahlenresultate, welche ich bei Auflösung der Gleichungen

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1, \quad x - y = 4$$

erausstellen. Gr.

. LEDERER. Einige neue Beziehungen im regulären Zwölfeck. Bair. Bl. XVI. 417-420.

Wir haben soeben gesehen, dass Miller eine Theorie des egelmässigen Zehneckes auf die beiden simultanen Gleichungen

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1, \quad x - y = 4$$

gegründet hat. Indem Herr Lederer dieses System durch ei
anderes, nämlich

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2},\quad x+y=4,$$

ersetzt, gelangt er zu ähnlichen Ergebnissen für das regelmässig
Zwölfeck. Gr.

F. Englert. Die Anzahl S_n der innerhalb eines n-Eck fallenden Schnittpunkte seiner Diagonalen. Grunert Arch LXV. 446-447.

Es ergiebt sich:

$$S_n=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.$$

H.

J. W. L. Glaisher. Theorem connected with a certai figure inscribed in a circle. Messenger (2) IX. 133.

Einem Kreis mit dem Radius r sei ein geschlossene Polygon von n Seiten umgeschrieben. $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ mögen di Längen der Geraden bezeichnen, welche die Ecken mit der Mittelpunkt des Kreises verbinden. Wenn man dann in einem Kreise mit dem Durchmesser $\frac{\lambda}{r}$ (λ willkürlich) Sehnen von de Längen $\frac{\lambda}{\alpha}, \frac{\lambda}{\beta}, \frac{\lambda}{\gamma}, \dots$ so zieht, dass jede am Endpunkt de vorhergehenden beginnt, so wird die so gebildete Figur für ei grades n ein geschlossenes Polygon sein. Ist dagegen n eine ur grade Zahl, so ist das Ende der letzten Sehne vom Anfang de ersten um die halbe Peripherie entfernt. Glr. (O.)

R. Hoppe. Planimetrische Aufgabe. Grunert Arch. LXIV. 44

Die Aufgabe: Von zwei gegebenen Punkten ausserhalb eine gegebenen Kreises zwei gleiche Secanten zu ziehen, deren End

punkte einen der Grösse nach gegebenen Bogen begrenzen, wird trigonometrisch gelöst, und das Resultat construirt. H.

G. Dostor. Extension du théorème d'Hippocrate et détermination du centre de gravité de ses lunules. Grunert Arch. LXV. 193-203.

Um die Hypotenuse und die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks als Durchmesser sind bezw. die Kreise M, m, m' beschrieben. Ausserhalb M innerhalb erst m, dann m' liegen die convex-concaven Bogenzweiecke, „die Monde," innerhalb m und m' das biconvexe Bogenzweieck, „das Segment", innerhalb M ausserhalb m und m' „das Bogendreieck." Nach Hippokrates ist die Summe der Monde gleich dem Urdreieck. Der Verfasser findet nun weiter: Die Differenz des Bogendreiecks und des Segments ist auch gleich dem Urdreieck. Das Bogendreieck ist gleich der Summe der Monde und des Segments. Die Summe der Abschnitte von M über den Katheten ist gleich der Summe der Abschnitte von m und m' über der Hypotenuse und des biconvexen Segments. Die Höhe des Schwerpunkts der vereinigten Monde über der Hypotenuse ist $\frac{1}{8}$ des Kreises M. Hieraus ergiebt sich der Inhalt des von den Monden durch Rotation um die Hypotenuse erzeugten Körpers. Der Abstand desselben Schwerpunkts vom Höhenloth des Urdreiecks ist gleich der halben Differenz der Stücke der Hypotenuse. Dies wird angewandt auf Rotationskörper für verticale Axen, namentlich die äussersten verticalen Tangenten des Doppelmondes. Aehnliche Schwerpunktsbestimmungen für die Differenz des Bogendreiecks und biconvexen Segments ergeben gleichfalls einfache Ausdrücke. H.

C. H. Craneiro Lopes. Solution d'un problème de géométrie élémentaire. Teixeira J. II. (Portugiesisch).

Gegeben sind drei Kreise, von denen zwei eine gemeinsame Sehne $J\mathfrak{J}$ haben. Man soll durch $\mathfrak{J}$ eine Transversale, welche

die Kreise in den Punkten x, y, z schneidet, so ziehen, dass xz und xy in einem gegebenen Verhältnis $m:n$ stehen. Herr Lopes giebt zur Lösung des Problems folgenden Satz: "Schneiden sich zwei Kreise und zieht man durch einen der Schnittpunkte Gerade, so ist der geometrische Ort der Punkte, welche die von den Kreisen auf der Geraden bestimmten Segmente in constantem Verhältnis theilen, ein Kreis, der durch die Schnittpunkte geht und dessen Mittelpunkt die Centrale in demselben Verhältnis theilt.

Tx. (O.)

A. Schiappa Monteiro. Solution d'un problème au moyen de la méthode des équipollences. Teixeira J. II. (Portugiesisch).

Gegeben seien zwei sich schneidende Kreise und ein beliebiger dritter. Man soll durch einen der Schnittpunkte der ersten Kreise eine Gerade ziehen, welche die drei Kreise in den Punkten X, Y, Z so schneidet, dass $XY:XZ = m:n$, wo $m:n$ ein gegebenes Verhältnis ist. Das Problem ist aufgestellt von Steiner und gelöst von Clausen, Fergola, Laisant und Bellavitis (von letzterem mit Hülfe der Aequipollenzen); aber diese Geometer gingen von der Voraussetzung aus, dass sich die drei Kreise in einem Punkte schneiden. Diese Beschränkung ist hier fortgelassen.

Tx. (O.)

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über den Kreis und Kreisfiguren von W. J. C. Miller, J. A. Kealy, F. D. Thomson, Scott, A. Droz finden sich Educ. Times XXXIII. 21-22, 55, 99; Nouv. Ann. (2) XIX. 470-472.

O.

E. Bergold. Ebene Trigonometrie mit einer kurzen Geschichte dieser Disciplin, einer Aufgabensammlung und erläuternden Bemerkungen. Leipzig und Heidelberg, Winter.

Der Inhalt dieses Werkes entspricht der Titelangabe. Hervorzuheben ist noch, dass es für Schüler einer Obersecunda oder Unterprima berechnet ist, und demgemäss nicht mehr enthält, als mit solchen Schülern zu erreichen ist; es fehlt aber auch nichts, was auf dieser Stufe verlangt werden muss. Die einzelnen Theile des Buches sind völlig geschieden. Den Anfang macht die Geschichte der ebenen Trigonometrie, welche manches Wissenswerthe enthält. Dann kommt der eigentliche theoretische Kern der Disciplin: Die Winkelfunctionen und ihre Relationen. Hier werden die bekannten Dinge klar und einfach — auch mit Bezug auf das Coordinatenaxensystem — definirt, und dann weiter behandelt. Zahlreiche Formeln, auch Summen und Differenzen von Winkeln und Winkelfunctionen betreffend, werden entwickelt. Am Schlusse dieses Theils finden sich Sätze über complexe Grössen.

Es folgt nun die Anwendung der Winkelfunctionen zur Auflösung von Dreiecken (Trigonometrie im engeren Sinne). Es werden der Sinussatz, Cosinussatz und Tangentensatz bewiesen, und die Anwendung dieser Sätze auf die elementarsten trigonometrischen Aufgaben und die, welche beim Unterricht diesen zunächst zu kommen pflegen, wird gezeigt. Endlich findet sich eine reiche Sammlung von Aufgaben aus der Goniometrie und aus der Trigonometrie, wobei letztere auf Planimetrie, Stereometrie, Astronomie und Physik anzuwenden ist. Mz.

D. Besso. Elementi di trigonometria piana. Nebst Appendice: Tavolo di seni e coseni. Roma-Torino. Löscher.

Das Buch enthält die ebene Trigonometrie nebst der Auflösung der Dreiecke nach den Hauptaufgaben. Angefügt ist eine Note über die Grösse der Annäherung und Genauigkeit bei numerischen Rechnungen, und eine Tafel mit den natürlichen Cosinus und Sinus von 10 zu 10 Min., von 5 zu 5′ bis 20°, etc.

O.

J. W. Stringham. On vector ratios considered as trigonometric functions of angles. J. Hopkins circ. 1880.

Führt man den Quaternionen-Cosinus $cq\,\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha}$ des Winkels zwischen den Vectoren α und β, und den Quaternionen-Sinus $sq\,\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\beta}$ desselben Winkels ein, wo α, β, δ die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks sind, so lässt sich für diese Functionen eine der gewöhnlichen Trigonometrie ganz analoge aufbauen. M.

G. Dostor. Relations entre les lignes trigonométriques des angles d'un triangle. Grunert Arch. LXV. 188-192.

Der Herr Verfasser bemerkt zu Anfang, dass die Relationen unter den trigonometrischen Functionen dreier Winkel, deren Summe zwei Rechte beträgt, wohl verdienen gekannt zu werden. Sie drücken nämlich einerseits eine besondere Eigenschaft des Dreiecks aus, andrerseits gestatten sie oft bedeutende Abkürzungen in der Rechnung und zeigen den Nutzen, der mit der Anwendung von Logarithmen bei der Auflösung der Dreiecke verbunden ist. Er glaubt demnach, dass es nicht ohne Interesse ist, wenn er einige dieser Relationen, die seiner Kenntnis nach noch nicht bemerkt worden sind, giebt. Unter der Voraussetzung, dass

$$A + B + C = \pi,$$

hat man bekanntlich Relationen, wie:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

und manche andere. Von diesen geht der Herr Verfasser aus und leitet viele andere her, z. B.

$$\cot\frac{A}{2} - \operatorname{tg}\frac{B}{2} - \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Er giebt dann auch den Satz, dass in jeder Relation unter den

inkeln A, B, C eines Dreiecks diese Winkel einmal durch die omplemente ihrer Hälften, und das andere Mal durch die Supplemente ihrer doppelten Werthe ersetzt werden dürfen. Denn, enn:

$$A+B+C=\pi,$$

ist auch

$$\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}=\pi$$

d

$$\pi-2A+\pi-2B+\pi-2C=\pi.$$

Mz.

. Dostor. Formules de réduction trigonométriques. Nouv. Ann. (2) XIX. 362-367.

Im Wesentlichen ist diese Arbeit von der vorstehenden nicht rschieden. Es sind nur einige andere Formeln noch darin, z. B.

$$\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A = 2\sin B\sin C\cos A,$$

$$\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{A}{2} = 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2},$$

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C} = \cot A+\cot B+\cot C,$$

$$\frac{2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

lle diese Formeln sind jedoch ohne besondere Vorbereitung öchst einfach zu verificiren. Mz.

I. Baker. Discussion of a geometrical problem, with bibliographical notes. Wash. Bull. III. 55-65.

Es wird die Aufgabe behandelt, ein rechtwinkliges Dreieck u bestimmen, für welches die Winkelhalbirenden der beiden pitzen Winkel gegeben sind. Zunächst wird darauf hingewiesen, ass diese Aufgabe nicht durch die Elemente der Geometrie, . h. durch alleinige Anwendung von gerader Linie und Kreis isbar ist. Es werden zuerst trigonometrische, dann algebraische

Lösungen, dann Constructionen — in denen ein Kegelschnit Parabel oder Hyperbel vorkommt — gegeben. Am Schluss finden sich noch einige bibliographische Notizen. Zur Orient rung in Betreff der Behandlungsweise diene Folgendes: Sin α, β die gegebenen Winkelhalbirenden, A der spitze Winkel, de durch α halbirt wird, so führt eine elementare Betrachtung z der Gleichung:

$$\mathrm{tg}^3 \frac{A}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{A}{2} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{8}-1\right) \mathrm{tg} \frac{A}{2} - 1 = 0.$$

Als Beispiel wird behandelt:

$$\alpha = 40, \quad \beta = 50,$$

woraus folgt:

$$\mathrm{tg} \frac{A}{2} = 0{,}49788;$$

$$A = 52^0\ 56'\ 8'',67; \quad B = 37^0\ 3'\ 51'',33; \quad C = 90^0;$$

und die Seiten des Dreiecks

$$a = 47{,}407275 \text{ etc.}$$

Mz.

J. W. L. Glaisher. Note on a trigonometrical identit involving products of four sines. Rep. Brit. Ass. 1880.

Die Identität heisst:

$$\begin{aligned}\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sin\delta &- \sin(\alpha+\lambda)\sin(\beta+\lambda)\sin(\gamma+\lambda)\sin(\delta+\lambda)\\ &+ \sin\lambda \sin(\alpha+\delta+\lambda)\sin(\beta+\delta+\lambda)\sin(\gamma+\delta+\lambda)\\ &- \sin\delta\sin\lambda\sin(\delta+\lambda)\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2\lambda) = 0,\end{aligned}$$

wo α, β, γ, δ, λ fünf beliebige Winkel sind. Csy. (O.)

H. Hart. A trigonometrical identity. Messenger (2) I 191-192.

H. Hart. Addition. Messenger (2) X. 63-64.

Die Identität heisst:

$$(c_1^{\frac{4}{3}} s^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}} s_1^{\frac{2}{3}})^2 + (s_1^{\frac{4}{3}} c^{\frac{2}{3}} - s^{\frac{4}{3}} c_1^{\frac{2}{3}})^2 = (s^{\frac{2}{3}} c^{\frac{2}{3}} - s_1^{\frac{2}{3}} c_1^{\frac{2}{3}})^3,$$

n s, s_1 und c, c_1 resp. die Sinus und Cosinus zweier beliebiger Winkel bezeichnen. In dem Zusatz wird bemerkt, dass es einen itten Winkel geben müsste, dessen Sinus und Cosinus (s_2, c_2) n Gleichungen genügen

$$(1) \qquad \begin{cases} c_1^{\frac{4}{3}} s^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}} s_1^{\frac{2}{3}} = c_2^{\frac{2}{3}} (s^{\frac{2}{3}} c^{\frac{2}{3}} - s_1^{\frac{2}{3}} c_1^{\frac{2}{3}}), \\ s_1^{\frac{4}{3}} c^{\frac{2}{3}} - s^{\frac{4}{3}} c_1^{\frac{2}{3}} = s_2^{\frac{2}{3}} (s^{\frac{2}{3}} c^{\frac{2}{3}} - s_1^{\frac{2}{3}} c_1^{\frac{2}{3}}), \end{cases}$$

s welchen Gleichungen

$$(c, c_1, c_2)^{\frac{2}{3}} + (s, s_1, s_2)^{\frac{2}{3}} = 1$$

lgen würde. Man würde dann aus der Symmetrie dieser Gleiung schliessen, dass es zwei andere Paare, ähnlich wie (1), be, so dass man aus einem die fünf anderen herleiten könnte.

Glr. (O.)

. W. L. Glaisher. On algebraical expansions of which the fractional series for the cotangent and cosecant are the limiting formes. Rep. Brit. Ass. 1880.

Die im Titel genannten Entwickelungen entstehen aus den tionalen Brüchen

$$\frac{1}{x(1^2-x^2)(2^2-x^2)\dots(n^2-x^2)}$$

nd

$$\frac{(1^2-2^2x^2)(3^2-2^2x^2)\dots((2n-1)^2-2^2x^2)}{x(1^2-x^2)(2^2-x^2)\dots(n^2-x^2)}.$$

Csy. (O.)

. W. L. Glaisher. Theorems in elementary trigonometry. Proc. of Cambr. III. 319-324.

. W. L. Glaisher. Addition to a previous paper on some theorems in trigonometry. Proc. of Cambr. III. 383-387.

. W. L. Glaisher. Trigonometrical theorems involving the products of four sines or four cosines. Messenger (2) X. 26-34.

Alle drei Arbeiten beziehen sich auf denselben Gegenstan nämlich auf trigonometrische Sätze, in denen die Argumente d beliebigen Grössen a, b, c, d sind und acht andre $a', \dots, a'', \dots$ welche mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} a' &= \tfrac{1}{2}(-a+b+c+d), & a'' &= \tfrac{1}{2}(a+b+c+d) \\ b' &= \tfrac{1}{2}(a-b+c+d), & b'' &= \tfrac{1}{2}(a+b-c-d) \\ c' &= \tfrac{1}{2}(a+b-c+d), & c'' &= \tfrac{1}{2}(a-b+c-d) \\ d' &= \tfrac{1}{2}(a+b+c-d), & d'' &= \tfrac{1}{2}(a-b-c+d) \end{aligned}$$

hergeleitet werden. Als Beispiel möge dienen

$$(1)\quad \begin{cases} \sin a \sin b \sin c \sin d + \cos a \cos b \cos c \cos d \\ \qquad = \sin a' \sin b' \sin c' \sin d' + \cos a' \cos b' \cos c' \cos \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \sin a \sin b \sin c \sin d \\ \qquad = \sin a' \sin b' \sin c' \sin d' + \sin a'' \sin b'' \sin c'' \sin \end{cases}$$

Die meisten Resultate sind aus entsprechenden Formeln für d elliptischen Functionen hergeleitet. In der ersten Arbeit find sich auch einige algebraische Formeln, in denen eine Functi von a, b, c, d derselben Function von a', b', c', d' gleich i Auch der Zusatz enthält einige algebraische Identitäten, welc aus trigonometrischen Sätzen sich ergeben. Glr. (O.)

A. Cayley. A theorem in spherical trigonometry.
Proc. L. M. S. XI. 48-50.

Sind in einem sphärischen Dreieck a, b, c die Seiten u A, B, C die ihnen resp. gegenüberliegenden Winkel, so ist:

$$-\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\sin(A-B) = \operatorname{tg}\frac{b}{2}\sin A - \operatorname{tg}\frac{a}{2}\sin B$$

und ferner:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos(A-B)\right) = \operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos A + \operatorname{tg}\frac{a}{2}\cos B.$$

Beide Formeln sind in der einen Gleichung enthalten:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}(\cos B - i\sin B) = \frac{\operatorname{tg}\frac{c}{2} - \operatorname{tg}\frac{b}{2}(\cos A + i\sin A)}{1+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}(\cos A + i\sin A)}.$$

Es werden diese Sätze nun bewiesen, wobei die bekannten Formeln:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \quad \text{u. s. w.}$$

als Ausgangspunkt dienen, und elementare trigonometrische Beziehungen zur Anwendung kommen. Mz.

S. Günther. Die merkwürdigen Linien im sphärischen Dreieck. Hoffmann Z. XI. 421-427.

Der Herr Verfasser sagt zu Anfang, dass, wenn auch in den bessern Lehrbüchern zahlreiche Uebungen im Bereiche der sphärischen Trigonometrie gefunden werden, doch eine besondere Art von Aufgaben bisher geringe Beachtung gefunden hat. Diese besondere Art bezieht sich im sphärischen Dreiecke auf das, was im ebenen Dreiecke die sogenannten merkwürdigen Linien, wie Transversalen, Winkelhalbirende, Höhen u. s w. sind. Es wird nun gezeigt, wie sich diese Dinge auch beim sphärischen Dreieck mit ganz einfacher elementarer Rechnung behandeln lassen, wie man auch hier sehr elegante und für logarithmische Berechnung geeignete Ausdrücke auffinden kann, wie ferner der Uebergang zu den analogen Linien und Punkten des ebenen Dreiecks sich in leichter und durchsichtiger Weise vollzieht. Zum Schluss wird auch auf den Nutzen hingewiesen, der guten Schülern aus der Beschäftigung mit derartigen Aufgaben erwächst. Mz.

Meissel. Lösung einer Classe von Aufgaben der Sphärik. Grunert Arch. LXV. 429-433.

Sind a, b, c die Seiten und α, β, γ die ihnen resp. gegenüberliegenden Winkel eines sphärischen Dreiecks, so wird die Aufgabe gelöst, aus den drei Daten:

$$\alpha + \varepsilon a = 2A, \quad \beta + \varepsilon' b = 2B, \quad \gamma + \varepsilon'' c = 2C,$$

wo ε, ε', ε'' die Werthe $+1$ oder -1 haben, und A, B, C ge-

gebene Grössen sind, das Dreieck zu finden. Hierzu wird ei Gleichung für k, wo

$$k = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

ermittelt, indem zunächst die Hülfsgrössen φ, η, ϑ durch die Gl chungen:

$$\alpha = A + \varphi, \quad \beta = B + \eta, \quad \gamma = C + \vartheta$$

eingeführt werden, woraus dann folgt:

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1-\varepsilon k}{1+\varepsilon k}\operatorname{tg} A, \quad \operatorname{tg}\eta = \dfrac{1-\varepsilon' k}{1+\varepsilon' k}\operatorname{tg} B, \\ \operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{1-\varepsilon'' k}{1+\varepsilon'' k}\operatorname{tg} C. \end{cases}$$

Hierauf wird die Gleichung von Cagnioli:

$$\cos a \cos b \cos\gamma + \cos\alpha \cos\beta \cos c = \sin\alpha \sin\beta - \sin a \sin b$$

angewandt, indem

$$\alpha = A + \varphi, \quad a = \varepsilon(A - \varphi) \text{ etc.}$$

gesetzt werden. Die resultirende Gleichung enthält die Gröss A, B, C, φ, η, ϑ und wird durch die Gleichungen (1) so umg formt, dass sie nur noch A, B, C, k enthält, und daher z Bestimmung von k dienen kann. Mit Einführung von

$$\delta = \frac{A+B+C}{2} - \frac{\pi}{4}$$

ergiebt sich dann ein für logarithmische Rechnung geeignet Ausdruck, aus dem k gefunden wird; das Andere ist dann leich

Mz.

A. Enneper. Ueber ein Problem aus der Lehre vo Maximum und Minimum. Schlömilch Z. XXV. 41-43.

Im „Leipziger Magazin für reine und angewandte Math matik“, von Bernoulli und Hindenburg herausgegeben, find sich im Jahrgang 1786 auf Seite 241 „Leichte Auflösung ein Problems aus der höheren sphärischen Trigonometrie, v Nik. Fuss.“ Das Problem lautet: Aus zwei in dem grösst Kreise EF gegebenen Punkten A und B, auf der Kugelfläche e

Dreieck ABC zu zeichnen, dessen Spitze C in einen andern gegebenen grössten Kreis falle und dessen Inhalt ein Maximum sei. Die Auflösung ist: Aus A beschreibe man senkrecht auf AB den Bogen AG, und aus der Mitte D der Grundseite AB den Bogen DG, so dass er dem Bogen DE gleich sei. Alsdann schneide man auf dem grössten Kreise ECF aus F den Bogen $FC = AG$ ab, und vereinige die Punkte A und B mit C durch Bogen grösster Kreise; dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Der von Fuss gegebene Beweis wird durch eine geschickte Combination von Geometrie und Analysis geführt. Es wird dabei bemerkt, dass man auf dem gewöhnlichen Wege zu Formeln kommen würde, vor denen der muthigste Rechner erschrecken müsste.

Herr Enneper zeigt nun, wie das von Fuss gefundene Resultat ohne besondere Schwierigkeiten oder Weitläufigkeiten durch die bekannte analytische Methode erhalten wird, und fügt noch ein paar Anmerkungen hinzu. Mz.

W. W. Johnson, A. S. Christie and E. B. Seitz. Solutions of a problem. Analyst VII. 31, 59-66.

Wenn ABC und $A'B'C'$ zwei sphärische Dreiecke mit drei rechten Winkeln sind (die Buchstaben nach der Rotation geordnet), so ist

$$\cos AA' = \cos BB' \cos CC' - \cos B'C \cos BC'.$$

Glr. (O.)

Websky. Ueber die Berechnung der Elemente einer monoklinischen Crystallgattung. Berl. Monatsber. 1880. 239-257. Mz.

A. Schiappa Monteiro. Sur l'aire latérale et volume d'un coin conique. Teixeira J. II. (Portugiesisch.)

Zweck der Arbeit ist die Lösung des folgenden Problems: Elementar zu berechnen die Oberfläche und das Volumen einer

conischen Ecke, die bestimmt ist durch den Schnitt eines Umdrehungskegels mit zwei Ebenen, von denen die eine senkrecht zur Umdrehungsaxe ist. Durch Einschreibung regulärer Pyramiden erhält man zuerst allgemeine Formeln, deren Discussion dann für die verschiedenen Lagen, welche die Ebenen einnehmen können, folgt. Glr. (O.)

H. Wittek. Ueber den Begriff der geraden Pyramide. Zeitschr f. d. Realsch. V. 142-147.

Zahlreiche Verweise auf die bekanntesten Lehrbücher lassen erkennen, dass allerdings betreffs der Definition einer „geraden" Pyramide eine ganz heillose Confusion herrscht. Auf Grund einer theils sachlichen, theils philologischen Vorprüfung wird als geeignetste Definition diese vorgeschlagen: „Eine Pyramide heisst gerade, wenn der Fusspunkt ihrer Höhe ein Centrum des Grundflächenpolygons ist." Eine gerade Pyramide kann „gleichschenklig", „gleichgeneigt" und „regelmässig" sein, je nachdem das Grundflächenpolygon nach den Ecken oder nach den Seiten oder nach beiden zugleich centrisch ist.

Zusagender noch dürfte die seitens der Redaction von Prof. M. Kuhn in Vorschlag gebrachte Fassung sein: „Eine Pyramide heisst gerade, wenn ihre Grundfläche ein centrisch-symmetrisches Polygon ist und wenn ihre Höhe durch das Centrum der Grundfläche geht."

Seite 287-290 behandelt E. Seewald die gleiche Frage in ähnlichem Sinne. Gr.

H. J. S. Smith. On the distribution of circles on a sphere. Rep. Brit. Ass. 1880.

Csy.

Chéfik-Bey. Solution des exercices sur le tétraèdre proposés par M. Genty. Nouv. Ann. (2) XIX. 403-411.

Es wird ein Tetraeder besprochen, bei welchem je zwei

Gegenkanten gleiche Länge haben. Die Medianen-Geraden, welche die Mitten je zweier Gegenkanten verbinden, sind zugleich die kürzesten Linien zwischen je zwei Gegenkanten und paarweise zu einander senkrecht; die Winkel je zweier Tetraederflächen sind denen der beiden übrigen gleich. Ferner werden Formeln für das Volumen und die Radien der dem Tetraeder umschriebenen und der eingeschriebenen Kugel angegeben. Es finden sich aber auch einige Unrichtigkeiten vor; so wird einmal bei einem Nachweise gefordert, durch eine Tetraederkante eine zur Gegenkante lothrechte Ebene zu legen; und am Schlusse wird behauptet, die Gerade aus einer Ecke des Tetraeders nach dessen Schwerpunkt sei zugleich die Höhe des Körpers. Im Uebrigen sind jedoch die Resultate richtig. Mz.

E. Lemoine. Quelques théorèmes sur les tétraèdres dont les arêtes opposées sont égales deux à deux et solution de la question 1272. Nouv. Ann. (2) XIX. 133-138.

Es werden mehrere einfache Sätze, welche sich auf Tetraeder mit paarweise gleichen Gegenkanten beziehen, bewiesen; so unter Anderem, dass der Schwerpunkt des Tetraeders zugleich Centrum der umschriebenen und auch Centrum der eingeschriebenen Kugel ist, dass ferner der Schwerpunkt auch Centrum einer Kugel ist, die die Höhen des Tetraeders berührt; und dass dasselbe Centrum einer Kugel angehört, die die in den respectiven Höhenschnitten der Seitenflächen zu letzteren errichteten Lothe berührt, u. a. m. Auch werden einige Formeln, die hierher gehören, entwickelt. Mz.

E. Hain. Ueber das Gesetz der Säulenverjüngung. Grunert Arch. LXV. 443-449.

Mz.

J. Neuberg. Sur le nombre des sphéres qui touchent quatre plans donnés. N. C. M. VI. 8-18.

Es sei V das Volumen eines Tetraeders, α, β, γ, δ die Inhalte seiner Flächen, a, b, c, d die Entfernungen derselben von einem beliebigen Punkt J. Für jeden inneren Punkt des Tetraeders ist

$$3V = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta.$$

Ist $a = b = c = d$, so existirt also eine eingeschriebene Kugel mit einem Radius

$$\varrho = 3V:(\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

Wenn J in dem unendlichen Trieder, aber ausserhalb des Tetraeders, liegt, in dem die Seite δ sich findet, so ist

$$3V = a\alpha + b\beta + c\gamma - d\delta.$$

Man findet also eine aussen-eingeschriebene Kugel vom Radius

$$\varrho_\delta = 3V:(\alpha + \beta + \gamma - \delta) \text{ für } a = b = c = d.$$

Ebenso verhält es sich mit den andern Triedern, so dass es vier aussen-eingeschriebene Kugeln giebt. Die Verlängerungen der Seiten bestimmen sechs Dieder. Die Kugel, welche dem von den Verlängerungen der Seiten γ und δ gebildeten Dieder eingeschrieben ist, hat zum Radius $3V:(\alpha + \beta - \gamma - \delta)$, die, welche dem entgegengesetzten von den Verlängerungen von α und β gebildeten Dieder eingeschrieben ist, hat zum Radius

$$3V:(\gamma + \delta - \alpha - \beta).$$

Nur eine von diesen beiden Kugeln ist reell. Es giebt also höchstens drei dieser doppelt aussen-eingeschriebenen Kugeln. Wenn $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ ist, so reduciren sie sich auf zwei. Wenn ferner $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, woraus $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$ folgt, so giebt es nur noch eine. Ist endlich $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, so verschwinden alle drei. Die Untersuchung ist rein geometrisch und enthält eine specielle Discussion der Fälle, wo es weniger als acht Kugeln giebt.

Mn. (O.)

L. Maleyx. Sur l'évaluation de certains volumes.
Nouv. Ann. (2) XIX. 529-551.

Der Herr Verfasser giebt zu Anfang selbst den Plan dieser Arbeit an, indem er sagt, dass sie sich auf die verschiedenen

Ausdrücke des Volumens bezieht, welches zwischen irgend einer Fläche und zwei parallelen Ebenen enthalten ist, wobei die Voraussetzung besteht, dass der Flächeninhalt einer Figur, die von einer veränderlichen Ebene, die den vorgenannten parallel ist, auf der Fläche ausgeschnitten wird, eine ganze rationale Function n^{ten} Grades der Entfernung eines festen Punktes von dieser variablen Ebene ist. Durch einfache Integration oder eine diese ersetzende elementare Grenzbetrachtung wird der fragliche Rauminhalt sofort gefunden. Es handelt sich dann darum, die Coefficienten jener ganzen rationalen Function aus ebenso vielen besonderen Werthen des Arguments nebst ihren zugehörigen Functionalwerthen auszudrücken und durch besondere Voraussetzungen Vereinfachungen eintreten zu lassen. Das Nähere hierüber lässt sich nicht wohl im Auszuge angeben. Mz.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Trigonometrie und Stereometrie von C. Morgan, Genese, Cochez, A. McMurchy, G. Eastwood, E. B. Elliott, Wolstenholme, W. Wilkins, Moret-Blanc, A. Leinekugel finden sich Educ. Times XXXIII. 20-21, 105, 111-112; Nouv. Ann. (2) XIX. 464-467, 513-514.

O.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

H. Drasch. Ueber die Stellung der synthetischen Geometrie zur darstellenden Geometrie. Zeitschr. f. d. Realsch. V. 393-401.

Bemerkenswerthe Reflexionen über das innige Verhältnis der beiden genannten Disciplinen, sowie auch über die Mittel, durch deren Anwendung diesem Verhältnis beim Schulunterricht

Rechnung getragen werden kann. Aus pädagogischen Gründen glaubt der Verfasser dem alten Monge'schen Verfahren vor der Centralprojection den Vorzug geben zu sollen. Gr.

Lazarski. Studien über verschiedene Probleme der darstellenden und neueren Geometrie. Pr. Stanistawow.

Dn.

Lazarski und Rembach. Linearperspective. Erster Theil. Lemberg.

Dn.

C. Pelz. Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie. Wien. Ber. LXXXI. 300-330.

Der Verfasser giebt die Lösung einer Reihe stereometrischer Elementaraufgaben unter alleiniger Zugrundelegung des Axenkreuzes, d. h. der Orthogonalprojection von drei durch einen Punkt gehenden und zu einander senkrecht stehenden Coordinatenaxen auf eine Bildebene, ohne dass die Constructionen durch Uebertragung auf die gewöhnliche Orthogonalprojection gewonnen werden.

Soll z. B. zu einer Geraden in einer Coordinatenebene eine zu ihr rechtwinklige in dieser Ebene gezogen werden, so betrachte man die Rechtwinkelinvolution dieser Ebene, welche den Ursprung zum Centrum hat. Von ihrem axonometrischen Bilde kennt man zwei Strahlenpaare, 1) die Bilder der in der Ebene liegenden Axen, 2) das Bild der dritten Axe und die zu ihr normale Gerade, wodurch zu jedem beliebig gegebenen Strahle der zugeordnete bestimmt ist.

Gelegentlich der Abbildung von Kreisen werden einfache Constructionen von Kegelschnitten hervorgehoben.

Der Verfasser stellt weitere Publicationen über diesen Gegenstand in Aussicht. Rg.

J. STREISSLER. Zur orthogonalen Axonometrie.
Grunert Arch. LXV. 208-212.

Die Arbeit enthält nur Bekanntes. Rg.

TESAŘ. Der orthogonal-axonometrische Verkürzungskreis. Wien. Ber. LXXXI. 453-478.

Es wird der folgende Satz bewiesen: Dreht sich ein Kreis um einen Durchmesser d, und projicirt man die von einem seiner Endpunkte ausgehenden Sehnen auf eine feste den Durchmesser enthaltende Ebene, so liegen die Endpunkte der Sehnen, welche beim Projiciren in demselben Verhältnisse verkürzt werden, auf einem und demselben Kreise. Mit Hülfe dieses „orthogonalen Verkürzungskreises" wird aus gegebenen Theilen des Spurendreiecks einer axonometrischen Projection die vollständige Figur construirt, indem man eine oder mehrere der gegebenen Seiten zu Durchmessern d nimmt. Rg.

CH. WIENER. Die Abhängigkeit der Rückkehrelemente einer unebenen Curve von der Curve selbst.
Schlömilch Z. XXV. 95-98.

Lässt man auf einer gewundenen Curve einen Punkt (P) hingleiten, mit ihm die zugehörige Tangente (t) ohne Gleiten hinrollen und die Schmiegungsebene (S) sich mitdrehen, so führt der Punkt eine Bewegung auf der Tangente gegen einen festen Punkt derselben, die Tangente eine Drehung gegen eine feste Gerade der Schmiegungsebene und die Schmiegungsebene eine Drehung um die augenblickliche Tangente gegen eine Ebene aus, welche durch diese Tangente und einen festen auf keiner der Tangenten liegenden Punkt des Raumes geht. In einem Punkte der Curve kann jedes der drei Elemente, Punkt, Tangente, Schmiegungsebene seinen Sinn beibehalten oder umkehren. Dieses Verhalten soll sein Character heissen und derselbe im ersten Falle positiv, im zweiten negativ genannt werden. Dann treten folgende acht Fälle auf:

	1	2	3	4	5	6	7	8
P	+	+	+	+	−	−	−	−
t	+	+	−	−	+	+	−	−
S	+	−	+	−	+	−	+	− .

Im Allgemeinen sind in der Projection diese Charactere die selben wie bei dem entsprechenden Elemente der Originalcurve Gehen jedoch die Tangente oder die Schmiegungsebene durch das Projectionscentrum und dann in demselben Sinne weiter, so is der Character des Punkts (P') und der Tangente (t'), bezw. in der Projection der entgegengesetzte

$$P' = -P, \quad t' = -t.$$

Aendern aber Tangente oder Schmiegungsebene ihren Sinn, so hat man

$$P' = P, \quad t' = t.$$

Beide Fälle sind also zusammengefasst in der Gleichung

$$P' = -t.P, \quad t' = -t.S,$$

wo für t, P, S die bez. Zeichen zu setzen sind.

Nach diesem Principe sind die Charactere für die Projectionen der Curve auf die Schmiegungsebene (P', t'), die Normalebene (P'', t'') und die zu beiden senkrechte rectificirende Ebene (P''', t''') bestimmt:

	1	2	3	4	5	6	7	8
P'	+	+	+	+	−	−	−	−
t'	+	+	−	−	+	+	−	−
P''	−	−	+	+	+	+	−	−
t''	+	−	+	−	+	−	+	−
P'''	+	+	+	+	−	−	−	−
t'''	−	+	+	−	−	+	+	− .

Für die Charactere der Schnittcurve der Tangentenfläche mit der Normalebene (P_1 t_1) findet man

$$P_1 = P''; \quad t_1 = t''.$$

Der Verfasser hat Modelle über die acht Fälle der Curven und ihrer drei „Hauptprojectionen“ ausführen lassen. Die Curven sind sauber aus Messingdraht hergestellt und mit ihren Endpunkten an drei Brettchen befestigt, welche die Projectionsebenen

vorstellen. Die Modelle zeigen alles, was sie zeigen sollen, und sind den descriptiven Geometern auf's Beste zu empfehlen. Ref. macht noch darauf aufmerksam, dass man durch geringe Abweichung von der vorgeschriebenen Projectionsrichtung sich die Entstehung einer Singularität aus einer niederen auf sehr anschauliche Art klar machen kann. Rg.

C. L. Landré. Over de perspectief van den bol. Nieuw Arch. VI. 203-207.

Analytische Behandlung der Perspective der Kugel, welche jeder der drei Kegelschnitte sein kann. Die Bedingungen, unter welchen sie in jeden der drei übergeht, werden abgeleitet.

G.

Röllner. Ueber Reflexe auf Kreisen oder die Umkehrung des Normalenproblems. Wien. Ber. LXXXII. 1129.

Dieses schon mehrfach bearbeitete Problem (von Pelz und Niemtschik in den Wien. Ber.) behandelt die Aufgabe, den Berührungspunkt eines gegebenen Kegelschnitts mit einem Kreise, von welchem nur der Mittelpunkt O bekannt ist, zu finden; und umgekehrt, den Berührungspunkt eines gegebenen Kreises K mit einem Kegelschnitt, von dem nur die Brennpunkte bekannt sind, zu bestimmen. W. St.

C. Pelz. Zur Construction der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Flächen zweiten Grades unter Voraussetzung centraler Beleuchtung. Prag. Ber. 1879. 514-534.

Es werden Methoden entwickelt, nach welchen man in orthogonaler Projection die Hauptaxen der Schattencurven 2ter Ordnung, nämlich die Schattengrenze, den Schlagschatten auf die beiden Projectionsebenen und den Schlagschatten, den die ebene Begrenzungscurve in die Fläche selbst wirft, direct bestimmen

kann. Die Hauptebenen der Fläche werden parallel den Projectionsebenen angenommen. Rg.

G. H. A. Kröhncke. Handbuch zum Abstecken von Curven. Leipzig. Teubner. 1878.

Eine Recension dieses Werkes findet sich Z. d. Ing. XXIII p. 91. Rg.

D. Sidersky. Neuer Ellipsograph. Grunert Arch. LXV. 420-42

Beschreibung eines zum Zeichnen einer Ellipse dienenden Instrumentes, dessen Construction auf der Constanz der Summe der Fahrstrahlen eines Curvenpunkts von den beiden Brennpunkten beruht. Rg.

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

F. Buchbinder. Behandlung der Kegelschnitte an Schulen in synthetischer Form nach Steiner. (Schluss) Pr. Pforta.

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der vom Verfasser im Jahr 1878 mit gleichem Titel (s. F. d. M. X. 1878. p. 367) veröffentlichten. Die Theorie der Kegelschnitte ist auf elementarem Weg ausführlich dargestellt. Ein reichhaltiges Uebungsmaterial schliesst sich an. W. St.

W. Gallenkamp. Synthetische Geometrie I. und II. Iserlohn. Bädecker.

Auf der 33ten Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner (1878) erklärte die mathematische Section durch ei

stimmigen Beschluss die Aufnahme der Kegelschnitte in den Lehrplan des Gymnasiums für möglich und wünschenswerth und sprach sich in diesem Falle für die synthetische Behandlung aus. Ebenso wurde betont, dass auch auf den Realschulen neben der in ihnen nothwendigen analytischen Behandlung die synthetische nicht vernachlässigt werden möchte. Dem dadurch ausgesprochenen Bedürfnisse soll das vorliegende Lehrbuch entgegenkommen, welches der Verfasser seit 12 Jahren bei seinem Unterrichte in der Unterprima der Friedrich-Werderschen Gewerbeschule benutzt und erprobt hat. Das Buch, welches den 4ten Theil der von dem Verfasser veröffentlichten „Elemente der Mathematik" bildet, zerfällt in zwei getrennt erschienene Abtheilungen, von denen die erste für Realschulen und Gymnasien, die zweite Abtheilung dagegen nur für Realschulen bezw. Gewerbeschulen bestimmt ist.

Die erste Abtheilung entwickelt die Eigenschaften der Kegelschnitte nach einer Methode, die man elementar-synthetisch nennen könnte. Zunächst werden Ellipse und Hyperbel durch die Constanz der Entfernungssumme resp. Entfernungsdifferenz ihrer Punkte von den beiden Brennpunkten definirt. Dann wird gezeigt, dass der Ort der Centra aller Kreise, welche durch einen gegebenen festen Punkt gehen und einen gegebenen festen Kreis berühren, eine Ellipse ist, wenn der Punkt innerhalb des Kreises, eine Hyperbel, wenn der Punkt ausserhalb des Kreises liegt. Bei der letztgenannten Erzeugung der Kegelschnitte entsteht die Parabel dadurch, dass der Kreis zu einem Strahle wird. Es folgt dann die Lösung der quadratischen Aufgabe, die beiden Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitte zu finden, und mehrerer anderer Aufgaben, wobei immer der Kegelschnitt als durch den erwähnten Punkt und Kreis gegeben betrachtet wird. Hieran schliessen sich viele Sätze und Oerter, welche grösstentheils auf die Brennpunkte und Leitlinien Bezug nehmen, und bei denen die Kegelschnitte auch als Träger ihrer Tangenten aufgefasst werden. Die zweite Hälfte der ersten Abtheilung des Buches definirt die Kegelschnitte von neuem als die ebenen Schnittcurven eines Umdrehungskegels und entwickelt die Defi-

nition und Eigenschaften von Pol und Polare. Den Schluss bilden die Sätze von Pascal und Brianchon.

Die zweite Abtheilung entwickelt nach dem Vorgange Reye's rein lage-geometrisch die Eigenschaften der Grundgebilde, Kegelschnitte und Flächen 2ter Ordnung. Die projective Beziehung zweier Grundgebilde wird in bekannter Weise als eine solche definirt, bei welchen je vier harmonischen Elementen des einen Gebildes vier harmonische des andern entsprechen. Diese bei dem Aufbau der reinen Lage-Geometrie unvermeidliche Definition ruft drei Fragen hervor; erstens, wie die harmonische Lage unabhängig von Massbestimmungen zu definiren ist, zweitens, wie man von drei Elementen eines Gebildes ausgehend durch harmonische Elemente zu allen Elementen gelangt, drittens, in wiefern bei einer solchen Definition der projectiven Beziehung sich dieselbe als ein-eindeutig erweist. Diese drei Fragen werden ähnlich wie in Reye's Geometrie der Lage erledigt. Das zweite Capitel wendet sich dann zu der Erzeugung und den Fundamentaleigenschaften der Gebilde 2ter Ordnung, und zwar derjenigen, welche durch projective Grundgebilde in incidenter Lage entstehen, also entweder in derselben Ebene oder in demselben Strahlenbündel liegen. Das dritte Capitel entwickelt die Eigenschaften der polar zugeordneten Elemente und das vierte die der involutorischen Lage, wobei auch die Kegelschnittbüschel, Kegelschnittschaaren und Brennpunkte in rein geometrischem Kleide auftreten. Das fünfte Capitel steigt zu den Erzeugnissen nicht-incidenter projectiver gerader Punktreihen und Ebenenbüschel, also zu den Regelschaaren und Regelflächen auf. Das sechste Capitel macht auch die Eigenschaften der Collineation und Reciprocität der ebenen Systeme Schülern zugänglich. Im siebenten Capitel werden die Flächen 2ter Ordnung als Erzeugnisse zweier reciproker Strahlenbündel resp. zweier reciproker Strahlenfelder aufgefasst. Das achte Capitel ist den Polar-Eigenschaften der Flächen 2ter Ordnung gewidmet. Das neunte Capitel definirt die Collineation räumlicher Systeme und wendet die Ergebnisse auf die Bestimmung der Fläche 2ter Ordnung für gewisse Fälle an.

Das Hauptverdienst des Buches liegt darin, dass es die Methode und die wichtigsten Resultate der Lage-Geometrie auch Primanern in einer Weise zugänglich macht, bei welcher wissenschaftliche Strenge und Fasslichkeit sich paaren. Es wird daher den Lehrern vieler Realschul-Primen gewiss willkommen sein.

Scht.

Laguerre. Sur la géométrie de direction. Bull. S M. F. VIII. 196-208.

Es handelt sich hier um einen neuen Zweig der ebenen Geometrie, in welchem als Elemente „Direction“ und „Cyklus“ eingeführt werden. Eine Direction ist eine Gerade, welche nicht allein durch ihre Lage, sondern auch durch den Sinn, in welchen man sie durch einen Punkt beschrieben denkt, bestimmt ist. Jede Gerade der Ebene enthält zwei entgegengesetzte Directionen $+\varDelta$ und $-\varDelta$.

Ein Cyklus ist ein Kreis, welcher nicht nur durch seine Lage, sondern auch durch den Sinn, in dem ihn ein Punkt durchläuft, bestimmt ist. Jeder Kreis enthält zwei Cyklen. Eine Direction ist Tangente an einem Cyklus, wenn die Gerade der ersten den Kreis des Cyklus berührt und in den Berührungspunkten die Richtungen ihrer Elemente übereinstimmen. So kann parallel einer Direction nur eine Tangente an einen Cyklus gelegt werden. Zwei Cyklen haben nur zwei gemeinschaftliche Tangenten und einen Aehnlichkeitspunkt.

Ein „Büschel von Directionen“ ist ein System von Directionen, deren Gerade durch einen Punkt gehen. Ein „Netz von Directionen“ ein System von solchen, welche einen Cyklus berühren.

Das anharmonische Verhältnis von vier Directionen A, B, C, D wird in folgender Weise definirt. Man ziehe an einen beliebigen Cyklus vier zu den Directionen parallele Tangenten, so ist das anharmonische Verhältnis der vier Berührungspunkte auf dem Kreis gleich dem anharmonischen Verhältnis der gegebenen Directionen. Vier Directionen heissen harmonisch, wenn ihr an-

harmonisches Verhältnis gleich -1 ist und sie einem Netze angehören.

Hierdurch ergeben sich auch die Definitionen von involutorischen Büscheln und Netzen. Ein involutorischer Büschel hat zwei Doppeldirectionen, eine Doppelgerade, deren entgegengesetzte Directionen ein Paar bilden, und eine Axe.

Ausser dem Doppelverhältnis von vier Directionen ist noch eine zweite Beziehung derselben von Wichtigkeit.

Sind vier Directionen gegeben und bezeichnet man durch α, β, γ, δ die Schnitte von A mit B, von B mit C, von C mit D und von D mit A, so ist die Strecke $\alpha\beta - \beta\gamma + \gamma\delta - \delta\alpha$ nach absolutem Werthe und Vorzeichen vollständig bestimmt. Diese Strecke heisst „Länge" der vier Directionen und wird bezeichnet durch: $L\ (A, B, C, D)$.

Vier Directionen eines Netzes haben die Länge Null; und haben vier Directionen die Länge Null, so gehören sie einem Netze oder Büschel an.

Zwei Gruppen von vier Directionen heissen projectivisch, wenn ihre anharmonischen Verhältnisse sowie ihre Längen einander gleich sind.

Zwei Systeme von Directionen heissen projectivisch, wenn irgend vier Directionen des einen und die entsprechenden des andern projectivisch sind. Alle Sätze, welche in Bezug auf zwei projectivische Punktreihen gelten, gelten auch für zwei projectivische Systeme von Directionen. In projectivischen Systemen entsprechen Netze einander. Die Länge der gemeinsamen Tangenten zweier Cyklen des einen Systems und die Länge der gemeinsamen Tangenten der entsprechenden Cyklen sind einander gleich.

Nun kommt der Verfasser zu einer wichtigen Transformation, welche er „Transformation durch reciproke Directionen" nennt, und welche viele Analogien zu der bekannten „Transformation durch reciproke Radien" bietet.

Sind P und P' zwei gegebene Directionen einer Ebene, so kann zu jeder Direction D eine zweite D' der Art bestimmt werden, dass DD' und PP' ein harmonisches System bilden. Zwei

solche Directionen D und D' heissen conjugirte Directionen. P und P' sind Doppelelemente und können auch imaginär sein. Jeder Cyklus hat als reciproke Figur einen Cyklus oder Punkt. Die reciproken Systeme sind projectivisch. Die beiden Systeme in Eins zusammengefasst führen den Namen eines involutorischen Systems von Directionen.

Zwei besondere Fälle dieser Transformation sind beachtenswerth. Erstens: P und P' sind entgegengesetzte Directionen einer Geraden. Dann sind reciproke Figuren symmetrisch in Bezug auf diese Gerade. Zweitens: P und P' sind imaginär und isotrope Directionen.

Ist O der Schnittpunkt von P und P', so sind reciproke Figuren symmetrisch in Bezug auf O.

Versteht man unter einer Curve ein Aufeinanderfolgen von Punkten in bestimmtem Sinne, so hat jede Curve M eine reciproke. Die Curve M ist in Involution, wenn ihre Tangenten paarweise conjugirt sind und heisst dann ein „Hypercyklus.“

Da nun folgender Satz gilt: „In einem involutorischen System von Directionen bilden die conjugirt harmonischen Directionen von irgend zwei gegebenen Directionen in Bezug auf die Paare der Involution zwei projectivische Systeme“, so kann ein Hypercyklus M durch folgende Elemente bestimmt werden: Durch die Fundamentaldirection P und P', durch eine feste Direction A und einen Cyklus K, welcher eingehüllt ist von den conjugirt harmonischen Directionen zu A in Bezug auf conjugirte Tangenten von M. Der Cyklus K heisst der Polarcyklus der Direction A. Ist K der Polarcyklus von A in Bezug auf M, so berührt der Polarcyklus jeder Tangente von K die Direction A.

Eine Fortsetzung dieser neuen und fruchtbaren Betrachtungen wird angekündigt. W. St.

F. Klein. Ueber die geometrische Definition der Projectivität auf den Grundgebilden der ersten Stufe. Clebsch Ann. XVII. 52-55.

G. Darboux. Sur le théorème fondamental de la géométrie projective. Clebsch Ann. XVII. 55-62.

F. Schur. Ueber den Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie. Clebsch Ann. XVIII. 252. 1881.

In seiner Geometrie der Lage p. 49 definirt v. Staudt: „Zwei einförmige Grundgebilde sind projectivisch, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass jedem harmonischen Gebilde des einen ein harmonisches Gebilde des andern entspricht.“ Weiter wird dann pag. 50 der Satz aufgestellt: „Wenn zwei einförmige projectivische Grundgebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.“ Herr Klein machte zuerst in Clebsch Ann. VI. 132 (s. F. d. M. V. 1873. p. 272) auf eine Lücke in v. Staudt's Beweisführung des „Fundamentalsatzes“ aufmerksam, zu deren Beseitigung ihm Ergänzungen zur Definition nothwendig erschienen. Die Herren Lüroth und Zeuthen zeigten jedoch später in brieflichen Mittheilungen an Herrn Klein, dass diese Zusätze einer Reduction fähig seien. Gelegentlich der Darlegung seiner neuen hierdurch gewonnenen Anschauung Clebsch Ann. VII. 537 hält Herr Klein jedoch an der einen Forderung fest, dass einer Folge von vier Elementen immer eine Folge der entsprechenden Elemente zukomme.

Nun zeigt Herr Darboux, dass auch diese Forderung als Satz aus der Staudt'schen Definition sich ableiten lasse, indem er bemerkt, dass andernfalls die Punkte der ersten Reihe sich stets derart in zwei Paare zerlegen lassen, so dass ein zu beiden harmonisches Punktpaar existirt, welches reell ist, während dieses in der zweiten Reihe imaginär ist. Das darf jedoch nicht sein, weil dann einem reellen Paar ein imaginäres entspräche, und damit ist der Beweis erbracht.

In der ersten Note legt Herr Klein die geschichtliche Entwickelung des Beweises für den Fundamentalsatz dar und bringt am Schlusse den aus brieflichen Mittheilungen entnommenen Darboux'schen Beweis von der Folge.

Die zweite Note enthält diesen Beweis noch einmal in etwas anderer Fassung. Ihm voran geht jedoch ein anderer analytischer. Sind auf zwei in einander liegenden projectivischen Punktreihen drei Punkte mit den Coordinaten

$$0,\ 1,\ \infty$$

gegeben, welche mit ihren entsprechenden coincidiren, und definirt man die Verwandtschaft durch die Functionalgleichung

$$x' = \varphi(x),$$

so hat man zunächst die drei Gleichungen

$$0 = \varphi(0),\quad 1 = \varphi(1),\quad \infty = \varphi(\infty),$$

aus denen sich unter Berücksichtigung der projectivischen Eigenschaften die Gleichung

$$\varphi(x') = x$$

ergiebt, welche aussagt, dass jeder Punkt sich selbst entspricht.

Endlich wird, anknüpfend an die Lüroth-Zeuthen'schen Erörterungen, noch ein indirecter Beweis angestrebt, welcher nicht correct und zudem, wie Herr Schur in der dritten Arbeit bemerkt, überflüssig ist, da der Satz von der Folge leicht den directen Beweis liefere. (Verbesserungen von den Herren Küpper und Bobeck theilt übrigens Herr Klein in einer Fussnote der Arbeit des Herrn Schur mit.) Da jedoch die Lüroth-Zeuthen'schen Betrachtungen gewisser Grenzelemente bedürfen und also Irrationalitäten in die Betrachtung einführen, so möchte der Verfasser den Thomae'schen Beweis auf p. 12 von dessen „Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung etc." vorziehen. Es ist richtig, wenn der Satz von der Folge vorangeht, dürfen die Thomae'schen Ueberlegungen benutzt werden, wenn auch dessen Definition von der v. Staudt'schen abweicht. Schliesslich deutet der Verfasser darauf hin, dass die v. Staudt'sche Definition viel an Natürlichkeit gewinne, wenn man von collinearen Systemen ausgeht, da sie sich dann in Folge von Vierecksconstructionen von selbst einstellt. Rg.

Em. Weyr. Beiträge zur Curvenlehre. Wien. Hölder.

In diesem vier Druckbogen umfassenden Werkchen behandelt der Verfasser ausführlich die $(m-n)$-deutigen Beziehungen zwischen zwei rationalen Elementensystemen. Eine solche Beziehung wird durch eine Gleichung $F(x,y) = 0$ zwischen den Parametern der Systeme hergestellt.

Der Inhalt zerfällt in sieben Theile.

I. Zuerst wird gezeigt, dass zwischen $(m+1)(n+1)$ Elementenpaaren zweier $(m-n)$-deutiger Gebilde eine von deren Lage unabhängige Beziehung statt finden muss. Ein Verzweigungselement eines Systems ist ein solches, dem zwei zusammenfallende Elemente des anderen entsprechen. Das n-deutige System hat $2n(m-1)$ Verzweigungselemente. Man erhält eine Involution n^{ten} Grades für den Fall $m=1$. Für conlocale Systeme wird dann der Chasles'sche Satz bewiesen. Zwei conlocale $(m-n)$-deutige Systeme besitzen $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}$ involutorische Elementenpaare, die sich wechselweise entsprechen. Die Betrachtung wird anschaulich gemacht durch Verlegung beider Systeme auf einen und denselben Kegelschnitt. Die Einhüllende der entsprechende Punkte verbindenden Geraden heisst die Directionscurve. Sie ist von der $(m+n)^{\text{ten}}$ Classe und $2mn^{\text{ten}}$ Ordnung; sie besitzt $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}$ Doppeltangenten und keine Wendetangenten, woraus sich die übrigen Singularitäten ergeben. Die Directionscurve schneidet den Kegelschnitt in den Verzweigungspunkten beider Systeme und berührt ihn in den $m+n$ gemeinsamen Elementen.

II. Ist die Gleichung $F(x,y)=0$ symmetrisch in Bezug auf x und y und haben die Gebilde denselben Träger, so stellen sie zusammen ein symmetrisches Elementensystem n^{ten} Grades dar. Die Elementensysteme sind identisch, wenn sie $\frac{n(n+3)}{2}$ unabhängige Paare gemein haben. Doppelelemente erster Art sind solche, von denen jedes sich selbst entspricht. Ihre Zahl ist $2n$. Doppelelemente zweiter Art sind solche, welche durch Zusammenfallen zweier einem und demselben Elemente entsprechenden Elemente entstehen. Ihre Zahl ist $2n(n-1)$; sie entsprechen der gleichen Zahl von Verzweigungselementen. Die Directionscurve D ist hier eine allgemeine Curve n^{ter} Classe, welche die $2n$ Tangenten des Kegelschnittes an den Doppelpunkten erster Art berührt; sie geht durch die $2n(n-1)$ Verzweigungspunkte

und hat in ihnen die Verbindungsgeraden derselben mit den zugehörigen Doppelpunkten zweiter Art zu Tangenten.

Eine Involution m^{ten} Grades ist ein specielles symmetrisches Elementensystem $(m-1)^{ten}$ Grades und ist durch zwei Gruppen von je m Elementen bestimmt. Die Directionscurve ist in diesem Falle von der $(m-1)^{ten}$ Classe und heisst Involutionscurve; sie hat weder Doppel- noch Wendetangenten, ist aber doch nicht allgemeiner Natur. Die $m(m-1)$ Seiten zweier vollständigen einem Kegelschnitte eingeschriebenen m-Ecke berühren eine Curve $(m-1)^{ter}$ Classe, welcher unendlich viele vollständige m-Ecke umschrieben sind, die dem Kegelschnitt gleichzeitig eingeschrieben sind. Für das allgemeine symmetrische System findet folgende Betrachtung statt. Sind y, y' zwei von den Elementen, welche dem Elemente x entsprechen, so bilden y, y' Paare eines abgeleiteten symmetrischen Systems von dem $n(n-1)^{ten}$ Grade; es hat die Doppelelemente zweiter Art des ursprünglichen Systems zu Doppelelementen erster Art. Die Directionscurve des abgeleiteten Systems ist von der $n(n-1)(2n-3)^{ten}$ Ordnung und hat $n(n-1)^2(n-2)$ Doppeltangenten.

Das aus einem symmetrischen System zweiten Grades abgeleitete System ist ebenfalls vom zweiten Grade. Hieraus ergeben sich Sätze, deren Urheber Poncelet ist, und welche im Theile III entwickelt werden.

III. Wenn ein variables Polygon einem festen Kegelschnitt C_2 eingeschrieben ist und alle seine Seiten, mit Ausnahme einer einzigen, einen zweiten festen Kegelschnitt C_2' berühren, so berührt die letzte Seite ebenfalls einen Kegelschnitt D_2, welcher durch alle Schnittpunkte von C_2 und C_2' geht.

Wenn ein Polygon von n Seiten einem Kegelschnitt eingeschrieben und einem zweiten umschrieben ist, so giebt es unendlich viele solcher Polygone von n Seiten, welche dem ersten Kegelschnitt eingeschrieben, dem zweiten umschrieben sind.

IV. Wenn zwei Systeme x, y in zwei-zweideutiger Beziehung sind, so kann man das eine auf vier verschiedene Arten auf das andere so linear projiciren, dass die Doppelelemente des einen

in die Doppelelemente des andern und die Verzweigungselemente des einen in jene des andern fallen.

V. Sind die Elemente eines rationalen Trägers in solcher Wechselbeziehung, dass durch Annahme von k Elementen weitere $n-k$ Elemente bestimmt sind und in dem Bereiche der n Elemente vollkommene Vertauschungsfähigkeit herrscht, so heisst diese Art der Verwandtschaft eine Involution n^{ten} Grades k^{ter} Stufe und wird mit J_n^k bezeichnet. Eine Involution k^{ter} Stufe ist bestimmt, wenn man von ihr $k+1$ von einander unabhängige Gruppen kennt.

Gehören k Elemente einer Involution k^{ter} Stufe zwei Gruppen an, so gehören sie zu einfach unendlich vielen Gruppen und bilden eine neutrale Gruppe.

VI. Dieser Theil betrachtet die Erzeugnisse mehrdeutiger Grundgebilde erster Stufe. Es findet sich unter andern: Zwei $(m-n)$-deutige Ebenenbüschel, deren Axen sich nicht schneiden, erzeugen eine Regelfläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer m-fachen und einer n-fachen Leitgeraden. Von besonderer Wichtigkeit ist die reducirte Lage der mehrdeutigen Gebilde, eine der projectivischen Lage projectivischer Gebilde entsprechende Lagenbeziehung. Wenn zwei $(m-n)$-deutige in derselben Ebene liegende Strahlenbüschel so beschaffen sind, dass der ihnen gemeinsame Strahl sich r-mal selbst entspricht, so sagt man, dass sich die beiden Büschel in reducirter Lage r^{ter} Ordnung befinden.

Zwei von der r^{ten} Ordnung reductionsfähige $(m-n)$-deutige Strahlenbüschel erzeugen eine Curve $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem m-fachen, einem n-fachen und einem r-fachen Punkte.

Zwei projectivische Strahleninvolutionen n^{ten} Grades, in deren gemeinsamen Strahlen zwei einander entsprechende n-fache Strahlen beider Involutionen vereinigt sind, erzeugen eine Curve n^{ter} Ordnung und $n(n-1)^{\text{ter}}$ Classe. Jede durch die n^2 Schnittpunkte zweier n-strahligen Büschel gehende Curve n^{ter} Ordnung kann als Erzeugnis zweier projectivischen Involutionen angesehen werden. Eine solche Curve ist von $n(n-1)^{\text{ter}}$ Classe, aber doch specieller Natur mit Ausnahme von $n=1, 2, 3$.

VII. Es wird hier speciell die ein-zweideutige Beziehung

betrachtet. Das zweideutige Gebilde ist eine quadratische Involution, welche projectivisch auf eine einfache Reihe von Elementen bezogen ist. Die constructive Ausführung dieser Beziehung wird in bekannter Weise angegeben.

Zum Schlusse wird in einer Anmerkung eine Anwendung auf die Construction der Hauptkrümmungshalbmesser einer Fläche gemacht, auf Grund folgenden Satzes: Die Tangenten einer Fläche in einem (nicht singulären) Punkte bilden einen Strahlenbüschel, welcher mit den Krümmungsmittelpunkten der zugehörigen Normalschnitte in ein-zweideutiger Beziehung steht, und zwar ist die Reihe der Krümmungsmittelpunkte eindeutig und der Büschel der Tangenten zweideutig.

Die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte sind die Verzweigungspunkte der eindeutigen Reihe und die ihnen entsprechenden Doppelstrahlen sind die beiden Hauptkrümmungstangenten.

W. St.

E. Weyr. Ueber Polargruppen. Wien. Ber. LXXXI. 841.

Die Theorie der harmonischen Mittelpunkte verschiedener Grade kann von der geraden Punktreihe auf rationale Curven übertragen werden. Hat man ein festes Punktsystem von n Elementen a_1, a_2, ... a_n und sind y_1, y_2, ... y_r die harmonischen Mittelpunkte r^{ten} Grades von x bezüglich der ersten Gruppe, so folgt: Gehört y der Polargruppe r^{ten} Grades von x an, so gehört x der $(n-r)^{\text{ten}}$ Polargruppe von y an.

Betrachtet man je zwei Elemente y_1, y_2, welche derselben Polargruppe r^{ten} Grades angehören, als einander entsprechende Elemente, so erhält man ein symmetrisches Elementensystem vom Grade $(r-1)$ $(n-r)$ und daher: „Die sämmtlichen Polargruppen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades bilden eine Involution $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche projectivisch ist zu der Punktreihe x.“ Es wird nun speciell ein Fundamentaltripel a_1, a_2, a_3 auf einem Kegelschnitte K betrachtet und die constructive Lösung folgender Aufgabe gegeben: Zu irgend einem Punkte x von K die zugehörige Polargruppe y_1, y_2 zweiten Grades und den die Polargruppe ersten Grades dar-

stellenden Punkt y' zu construiren. Die Untersuchung führt auf folgenden zum Theil bekannten Satz: „Construirt man zu den Elementen x bezüglich des Fundamentaltripels a_1, a_2, a_3 die quadratische Polargruppe y_1, y_2, so erhält man eine ein-zweideutige Beziehung. Die Doppelelemente des zweideutigen Gebildes sind die dreifachen Elemente einer kubischen Involution, welche durch das Fundamentaltripel bestimmt erscheint; zugleich stellen diese beiden Doppelelemente die Verzweigungselemente des eindeutigen Systems dar, so zwar, dass jedes der beiden Elemente, als Doppelelement aufgefasst, dem andern, wenn man dieses als Verzweigungselement auffasst, entspricht. Die drei gemeinsamen Elemente sind a_1, a_2, a_3."

Für Curven 3[ter] Ordnung mit Doppelpunkt ergiebt sich: Legt man aus einem Punkte x der Curve die beiden Tangenten, so stellen die Berührungspunkte y_1, y_2 die quadratische Polargruppe von x bezüglich der drei Inflexionspunkte a_1, a_2, a_3 dar.

W. St.

H. Schubert. Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden. Clebsch Ann. XVII. 457.

Drei einstufige Grundgebilde g, g', g'' sollen zu einander trilinear heissen, wenn ihre Elemente einen derartigen Zusammenhang haben, dass man erst auf zweien von den drei Grundgebilden je ein Element willkürlich annehmen muss, um dadurch auf dem dritten Grundgebilde ein einziges entsprechendes Element hervorzurufen, und wenn ausserdem dieser Zusammenhang algebraisch ist, d. h. durch eine Gleichung von der Form

$$xx'x''+ax'x''+a'x''x+a''xx'+bx+b'x'+b''x''=C$$

dargestellt werden kann, wo a, a', a'', b, b', b'', C sieben Constante und wo x, x', x'' drei Veränderliche sind, welche beziehungsweise auf den Grundgebilden g, g', g'' die Lage der veränderlichen Elemente bestimmen.

Der einfachste Fall einer trilinearen Beziehung entsteht auf drei geraden Punktreihen dadurch, dass man ausserhalb derselben

einen festen Punkt annimmt und als zusammengehörig immer solche drei Punkte betrachtet, deren Verbindungsebene durch diesen festen Punkt geht. Liegen insbesondere die Reihen in einer Ebene, so ist die Wahl des festen Punkts beliebig: Drei entsprechende Punkte liegen stets auf einer Geraden, und die Beziehung soll daher geradlinig genannt werden. Sie kann als das Analogon der perspectivischen Lage bei zwei projectivischen Gebilden aufgefasst werden und giebt ebenso wie diese das bequemste Mittel an die Hand, um allgemeinere Beziehungen festzusetzen. Während die projectiven Beziehungen im Allgemeinen Gebilde zweiten Grades erzeugen, führen die trilinearen Beziehungen zu Gebilden dritten Grades. Z. B. erzeugen drei trilineare Ebenenbüschel durch die Schnittpunkte entsprechender Tripel eine Fläche 3ter Ordnung. Man hat die August'sche Erzeugungsweise vor sich.

In jeder trilinearen Beziehung giebt es sechs singuläre Elemente,

$$p,\ q \text{ auf } g$$
$$p',\ q' \text{ auf } g'$$
$$p'',\ q'' \text{ auf } g'',$$

welche sich derart zu sechs singulären Paaren

$$pq',\ p'q'',\ p''q,$$
$$qp',\ q'p'',\ q''p$$

gruppiren, dass einem Paar alle Punkte der dritten Geraden entsprechen.

Diese sechs Punktpaare und ein beliebig anzunehmendes Tripel a, a', a'' bestimmen die trilineare Beziehung, ein jedes weitere Tripel b, b', b'' wird aus der Doppelverhältnisgleichung

$$(pqab)\,.\,(p'q'a'b')\,.\,(p''q''a''b'') = 1$$

erhalten. Im Allgemeinen müssen n Tripel und $7-n$ singuläre Paare zur Bestimmung gegeben sein, doch ist diese dann nicht immer eine eindeutige, wie bei der angegebenen Annahme.

Mit Hülfe der geradlinigen Beziehung, deren Kennzeichen zunächst entwickelt werden, gewinnt der Verfasser dann lineare Constructionen neuer Tripel entsprechender Elemente und damit insbesondere die Erzeugung einer Fläche 3ter Ordnung, deren

Zahl sich als neunzehn ergiebt und sie als punkt-allgemein erkennen lässt.

Schliesslich werden noch drei ausgeartete trilineare Beziehungen von der Constantenzahl sechs untersucht, welche aus speciellen Lagen der Träger einer zu Grunde gelegten geradlinigen Beziehung hervorgehen. Sie führen bez. zu einer Fläche dritter Ordnung mit drei C_2, einer Fläche zweiter Ordnung in Verbindung mit einer Ebene und drei Ebenen. Als Constantenzahl dieser Gebilde ergiebt sich folglich achtzehn, und so entspringen aus den Definitionen der drei ausgearteten trilinearen Beziehungen die genauen Definitionen der angeführten Ausartungen der punktallgemeinen Fläche dritter Ordnung.

Rg.

J. Keller. Die einander doppelt-conjugirten Elemente in reciproken Systemen. Wolf Z. XXV. 1-44.

Die Arbeit zerfällt in zwei Theile, von welchen der erste einen Specialfall der quadratischen Transformation der Ebene, der zweite eine entsprechende rationale cubische Transformation des Raumes behandelt. Die quadratische Transformation wird vom Verfasser geometrisch definirt, indem er die in doppelter Hinsicht conjugirten Punkte zweier vereinigt liegenden reciproken ebenen Systeme einander entsprechend setzt. (Im Wesentlichen dieselbe Definition wie in Reye, Geometrie der Lage, Bd. 2 Vorl. 13.)

In ähnlicher Weise erhält der Verfasser die betreffende Transformation des Raumes durch reciproke räumliche Systeme.

Es werden die Gebilde näher untersucht, welche die Transformirten von Geraden und Kegelschnitten resp. von Ebenen sind, und die angestellten Betrachtungen finden Anwendung auf den unter dem Namen der reciproken Radien bekannten Specialfall der quadratischen Transformation resp. auf einen analogen Specialfall der räumlichen Transformation. Hz.

[. J. S. SMITH. On inverse figures in geometry.
Rep. Brit. Ass. 1880.

Csy.

———

:. BONSDORFF. Ueber cyklisch-projectivische Systeme.
Act. Soc. Fenn. XI.

M.-L.

———

. S. VANĚČEK. Ueber die Verschiebung geometrischer Gebilde. Jičin. (Böhmisch.)

Die Schrift hat den Zweck, die neuesten Arbeiten auf diesem ebiete, wie sie namentlich von Chasles und Mannheim geliefert orden sind, einem weiteren Kreise zugänglich zu machen.

Std.

———

:. HUNYADY. Der Satz von Desargues über perspectivische Dreiecke. Borchardt J. IXC. 79-81.

Siehe Abschnitt II. Cap. 3. p. 116.

———

. WEDEKIND. Lagenbeziehungen bei ebenen perspectivischen Dreiecken. Clebsch Ann. XVI. 209-244.

Unter Anwendung von Dreieckscoordinaten wird die Figur on sechs Geraden, welche sich paarweise in drei Punkten einer eraden schneiden und also vier perspectivische Dreiecke bilden, ntersucht.

Eine kurze Darlegung der analytischen Entwickelung ist der ielen zu definirenden Bezeichnungen wegen nicht wohl möglich. Wir müssen uns daher auf die Bemerkung beschränken, dass ls Hauptergebnis der Arbeit eine Reihe von Sätzen, welche as Pascal'sche Sechseck betreffen, anzusehen ist. Auf diese igur wird man nämlich sofort geführt, da die sechs gegebenen eraden auf vier den einzelnen Dreieckspaaren entsprechenden Weisen sich zu einem solchen Sechseck combiniren lassen. Von

den mitgetheilten Sätzen führen wir die folgenden an: „Die 45 Pascal'schen Punkte liegen 180-mal zu vieren mit zwei Ecken des Sechsecks („Fundamentalpunkten") auf einem Kegelschnitt. Jedes Paar Fundamentalpunkte gehört gleichzeitig zwölf, jeder Pascal'sche Punkt sechszehn solchen Kegelschnitten an."

„Die Kirkmann'schen Punkte liegen 180-mal zu vieren mit zwei einfachen Schnittpunkten Pascal'scher Linien auf einer Curve 2ter Ordnung."

„Von den drei auf einer Cayley-Salmon'schen Geraden gelegenen Kirkmann'schen Punkten gehen neun Pascal'sche Linien aus, die sich ausser auf jener Geraden noch in siebenundzwanzig Punkten schneiden. Diese siebenundzwanzig Punkte liegen in jedem Fall 108-mal zu sechsen auf einem Kegelschnitt."

Rg.

R. O. Consentius. Ueber die Bestimmung der schiefen Lage zweier projectivischer Strahlenbüschel in der Ebene. Schlömilch Z. XXV. 122-125.

Es wird die Frage behandelt: Unter welchen Umständen haben zwei projectivische, gleichlaufende und concentrische Strahlenbüschel reelle Doppelelemente. Die Beantwortung stimmt mit der in der „Theorie der Kegelschnitte" von Schröter gegebenen überein; die Fassung des betreffenden Satzes ist aber bei Schröter weit übersichtlicher. W. St.

G. Dostor. Théorie générale des polygones étoilés. Liouville J. (3) VI. 344-386.

Nach einer kurzen historischen Uebersicht des Entwickelungsganges der Theorie der Sternpolygone als Einleitung wird die Construction der verschiedenen Arten dieser Figuren bei gegebener Eckenzahl n mitgetheilt. Denkt man sich die n Ecken als aufeinanderfolgende Punkte einer convexen Curve, so erhält man alle Polygone, wenn man von einem beliebigen ersten Punkt um

p (p relativ prim zu n) Punkte weiter geht, diesen Endpunkt mit dem ersten verbindet und diese Operation so lange fortsetzt, bis das Polygon sich schliesst, was stets geschehen muss.

Ein solches Polygon wird von der Species p genannt. Die convexen Polygone wären also von der ersten Species.

Die spätere Untersuchung erstreckt sich auf die Ermittelung der Winkelsummen und Flächeninhalte. Den regulären Polygonen ist ein besonderes Capitel gewidmet. Rg.

F. Kessler. Beiträge zur Geometrie des Zirkels.
Pr. Bochum.

Bekanntlich (Mascheroni, Geometria del compasso) lassen sich von den herkömmlichen fünf Postulaten der elementaren Constructionsaufgaben der Ebene gewisse zwei auf zwei andere zurückführen. Es lassen sich nämlich die beiden Aufgaben, welche die Auffindung des gemeinsamen Punktes zweier Strahlen und der beiden gemeinsamen Punkte eines Strahls und eines Kreises verlangen, auf die beiden Aufgaben zurückführen, welche die Auffindung der Schnittpunkte zweier Kreise und die Herstellung aller Punkte verlangen, welche von einem gewissen Punkte ebensoweit entfernt sind, wie der Abstand zweier gegebener Punkte beträgt. Durch diese Zurückführung ist natürlich bewiesen, dass jede durch die fünf Postulate lösbare Aufgabe, welche nicht die Herstellung eines Strahls verlangt, durch die erwähnten zwei Postulate lösbar sein muss. Jedoch gestaltet sich bei vielen Aufgaben die Construction wesentlich einfacher, wenn man dieselbe direct auf jene zwei Postulate zurückführt, als wenn man sie zunächst in herkömmlicher Weise auf die fünf Postulate, und dann vermittels der Mascheroni'schen Constructionen indirect auf jene zwei Postulate zurückführt. Derartig vereinfachte Constructionen hat nun Herr Huth in Brandenburg in einer kleinen Schrift, betitelt „Die Mascheroni'schen Constructionen" mitgetheilt. Die vorliegende Arbeit schliesst sich an die Huth'sche Schrift an, giebt aber einige Constructionen, welche von denen Huth's abweichen und theilweise einfacher sind. Scht.

R. Mehmke. Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene. Diss. Tübingen.

Diese Arbeit bildet eine Fortsetzung der in Bd. XI. 1879 S. 478 dieses Jahrbuches besprochenen. Anknüpfend an Nr. 394 der „Ausdehnungslehre von 1862" entwickelt der Verfasser zuerst die Rechnungen mit Kreisfunctionen. Neu ist namentlich die Auffassung des in der Discriminante von $f+hg$ (wo f und g Kreisfunctionen sind) auftretenden Coefficienten von $2h$ als inneres Product zweier Kreise. Dieser Begriff erweist sich als ungemein fruchtbar, und es werden mittels desselben in höchst eleganter Weise zahlreiche Sätze über Kreisnetze, Kreisbüschel, Doppelverhältnisse von Kreisen abgeleitet, wobei auch die Ausartungen sorgfältig berücksichtigt werden. Den Schluss bilden verschiedene Anwendungen auf Sätze und Aufgaben der Kreisgeometrie, worunter die Lösungen einiger von Steiner gestellten Aufgaben besonders interessant sind. Die Bedeutung der Arbeit liegt vorzüglich in dem Umstande, dass sie zeigt, wie Beziehungen zwischen Kreisen sich mit gleicher Leichtigkeit und Einfachheit darstellen und auffinden lassen, wie es die Ausdehnungslehre von den Beziehungen zwischen Punkten lehrt. Schg.

Talayrach. Extrait d'une lettre. Nouv. Ann. (2) XIX. 280-287.

Der Brief enthält einen geometrischen Beweis des Poncelet'schen Satzes: „Gegeben sind zwei Kreise. Nimmt man auf einem derselben einen Punkt a_1 an und zieht der Reihe nach die Tangenten $a_1 a_2$, $a_2 a_3, \dots a_{n-1} a_n$ an den zweiten, so hüllt die Gerade $a_1 a_n$, welche das Polygon schliesst, einen Kreis ein, dessen Mittelpunkt mit denen der beiden gegebenen auf derselben Geraden liegt." An diesen Beweis werden weitere Folgerungen geknüpft. O.

C. Taylor. On Gaskin and Plücker's properties of the orthocycle. Quart. J. XVII. 134-137.

Als „Orthocyle“ wird der Kreis bezeichnet, welcher von den Scheiteln der rechten Winkel gebildet wird, deren Schenkel einen Kegelschnitt berühren. Auf geometrischem Wege werden die folgenden Sätze bewiesen:

1. Ist *PQR* ein Polardreieck eines Kegelschnitts mit Mittelpunkt, so schneidet der Kreis den „Orthogonalkreis“ rechtwinklig.

2. Wenn ein Kegelschnitt mit Mittelpunkt vorliegt, so haben die Kreise, deren Durchmesser die beiden Diagonalen eines dem Kegelschnitt umschriebenen Vierecks sind, mit dem Orthogonalkreis dieselbe Radicalaxe. Analytisch sind beide Sätze in dem Gaskin'schen Werke „Geometrical construction of a conic section etc.“ Cambridge 1852 bewiesen; einen anderen Beweis des letztern giebt Plücker in seinen „Analytisch-Geometrischen Entwickelungen“ Vol. II. p. 198 (1831).

Der Satz 2) lässt sich auch so aussprechen: Alle Kegelschnitte, welche einem Viereck einbeschrieben sind, haben Orthogonalkreise derselben Radicalaxe.

Die Mittheilung eines von Pendlebury gegebenen analytischen Beweises des entsprechenden stereometrischen Satzes: Alle „Orthogonalkugeln“ der Flächen 2ter Ordnung, welche acht Ebenen berühren, haben eine und dieselbe Radicalebene“, bildet den Schluss der Note. Rg.

J. Petersen. Die Steiner'sche Lösung der Malfatti'schen Aufgabe. Borchardt J. IXC. 127-136.

Bekanntlich gelang es zuerst Herrn Schröter für die Steiner'sche Lösung des Malfatti'schen Problems eine Analysis zu finden, welche nur von solchen geometrischen Betrachtungen Gebrauch macht, wie sie Steiner der Mittheilung seiner Lösung vorangeschickt hat (Borchardt J. LXXVII. p. 230-245, F. d. M. VI. 1874). Dieser Anforderung entsprechen auch die beiden hier mitgetheilten, sehr geschickt angelegten Analysen, von denen der Verfasser die eine schon in seinem schul-geometrisch bedeutenden Buche „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben“ (Kopenhagen, 1879, deutsch

von Fischer-Benzon, Jahrbuch d. F. d. M. Bd. XI. 1879. p. 372) mitgetheilt hat. Die andere Analysis gestaltet sich dadurch sehr durchsichtig, dass zwei Hülfssätze vorangeschickt werden. Der erste Hülfssatz setzt ein von vier Kreisbogen gebildetes, einem Kreise einbeschreibbares Viereck voraus und behauptet, dass auch diejenigen vier Punkte auf einem Kreise liegen, in welchen sich die vier Kreisbogen, in derselben Reihenfolge betrachtet, zum zweiten Male schneiden. Der zweite Hülfssatz behauptet, dass ein einem Kreise umbeschreibbares Viereck entsteht, wenn man auf zwei gleichnamigen gemeinsamen Tangenten zweier Kreise je einen Punkt beliebig annimmt und von jedem der so gewählten beiden Punkte aus die beiden noch möglichen Tangenten zieht. Eine verständliche Mittheilung der beiden Analysen des Herrn Petersen würde hier fast denselben Raum einnehmen, wie die Abhandlung selbst und muss deshalb unterbleiben.

Scht.

Anonyme. Composition mathématique pour l'admission à l'école polytechnique en 1880. Exposition sommaire d'une solution géométrique. Nouv. Ann. (2) XIX. 337-340.

Man bestimme für jeden Punkt Q eines Kreises die Polare in Bezug auf eine feste gleichseitige Hyperbel und verbinde immer den Punkt Q mit den beiden Punkten, in welchen seine Polare von dem Kreise geschnitten wird, so beschreiben die beiden Verbindungslinien zwei Strahlbüschel, während der Punkt Q die Peripherie des Kreises durchläuft. Der eine dieser Strahlbüschel ist ein Parallelstrahlenbüschel. Scht.

M. Weil. Théorème sur les polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux circonférences. Nouv. Ann. (2) XIX. 57-60.

Liegen zwei Kreise so, dass sich ein Polygon construiren lässt, welches dem einen Kreise einbeschrieben, dem andern um-

beschrieben ist, so giebt es bekanntlich ∞^1 solcher Polygone. Dividirt man den Inhalt jedes dieser Polygone durch den Inhalt des Polygons, welches aus den auf seinen Seiten liegenden Berührungspunkten gebildet wird, so bekommt man stets dieselbe Zahl. Für das Dreieck ergiebt sich speciell, dass sein Inhalt mittlere Proportionale ist zwischen dem Inhalte des Dreiecks, das aus den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises besteht, und dem Inhalte des Dreiecks, dessen Ecken die Mittelpunkte der drei anbeschriebenen Kreise sind.

Scht.

A. Schiappa Monteiro. Recherche sur le cercle variable assujetti à couper continuellement deux cercles donnés sous des angles donnés. Teixeira J. II. (Portugiesisch.)

Der Zweck dieser Abhandlung ist, einen grossen Theil der Lehre von den Kegelschnitten von dem Gesichtspunkte ihrer cyklofocalen Erzeugung aus darzustellen, eine Methode, die sehr leicht nicht nur zu den gewöhnlichen Sätzen, sondern auch zu einer Reihe neuer Sätze führt. Die Untersuchungen können von dem Fall ausgehen, dass die Directrixkreise nicht concentrisch sind. Einfacher aber ist es, sie zuerst als concentrisch zu betrachten. Man kann dann zu dem allgemeineren Fall übergehen mit Hülfe der Transformation der Figuren, die aus der elementaren synthetischen Lösung des Problems, einen Kreis zu finden, der zwei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet, hergeleitet ist (siehe Teixeira J. I. p. 174).

Tx. (O.)

A. Ribaucour. Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères. N. C. M. VI. 1-7.

S. F. d. M. XI. 1879. p. 423-424.

Mn.

G. Gribodo. Nota sopra una proprietà dei poli di un fascio di rette in involuzione. Atti di Torino XV. 617.

Bezieht man die Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels perspectivisch auf einen durch seinen Mittelpunkt S gehenden Kreis, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Kreispunkte durch einen Punkt, welcher Pol der Involution in Bezug auf den Kreis heissen soll. Es wird dann bewiesen: Dreht sich der Kreis um das Centrum S der Involution, so liegen die Pole auf einer Ellipse, deren Hauptaxen die Rechtwinkelstrahlen der Involution sind.

Bei variabelem Halbmesser des Kreises erhält man ein System homothetischer Ellipsen.

Ein solches System hängt nur von der Natur der Involution ab. Für eine Involution mit rechtwinkligen Doppelstrahlen zieht sich das ganze System in die unendlich ferne Gerade; einer Circularinvolution entspricht ein System concentrischer Kreise.

Bewegt sich ferner der Mittelpunkt des Kreises auf einem Strahl der Involution, so beschreibt der Pol den conjugirten Strahl. Bei beliebiger Bewegung des Centrums werden von diesem und dem zugeordneten Pole Curven derselben Art beschrieben.

Rg.

W. Binder. Ueber Projectiv-Constructionen der Curven zweiter Ordnung. Wien. Ber. LXXXI.

Die Hülfsmittel der projectiven und collinearen Verwandtschaft führen den Verfasser zu einer elementaren Construction aller Punkte eines Kegelschnitts, wenn für denselben die Endpunkte F und G eines Durchmessers, sowie die Endpunkte P und Q einer diesem Durchmesser conjugirten Sehne gegeben sind. Am einfachsten gelangt man dann zu der Construction der Kegelschnittpunkte auf folgende Weise: Man zeichne den Kreis, welcher PQ zum Durchmesser hat, bestimme auf diesem Kreise die Punkte F_1 und G_1, welche mit P und Q ein Quadrat bilden, suche den Schnittpunkt C_1 von FF_1 und GG_1, sowie auch

den Schnittpunkt C_2 von GF_1 und FG_1. Nimmt man dann auf dem Kreise irgend zwei zu PQ symmetrisch liegende Punkte A_1 und A_2 an, so ist sowohl der Schnittpunkt von A_2C_1 mit A_1C_2 wie von A_1C_1 mit A_2C_2 ein Punkt des gesuchten Kegelschnitts.

Scht.

C. Taylor. On a section of Newton's Principia in relation to modern geometry. Proc. of Cambr. III. 359-360.

Die Arbeit enthält Notizen über Section V des ersten Buches von Newton's „Principia." Namentlich wird darauf aufmerksam gemacht, dass Newton in einem Corollar zu Lemma 25 folgenden Satz beweist: „Wenn die Seiten JM, ML, LK, KJ eines festen Parallelogramms, das einem gegebenen Kegelschnitt umschrieben ist, durch irgend eine fünfte Tangente in den Punkten E, F, H, Q, geschnitten werden, so ist $KQ.ME$ = Const. = $KH.MF$, so dass (wenn K und M feste Punkte auf den von einem festen Punkt J gezogenen Tangenten sind) irgend zwei feste Tangenten an einen Kegelschnitt homographisch durch eine variable Tangente geschnitten werden." Das ist aber die anharmonische Eigenschaft der Tangenten an einen Kegelschnitt. Glr. (O.)

C. Taylor. On Newton's organic description of curves. Proc. of Cambr. III. 381-383.

Der Verfasser bemerkt, dass die Newton'sche Erzeugung der Kegelschnitte wohl bekannt sei, nicht aber, dass Newton dieselbe auf höhere Curven ausgedehnt habe. Diese giebt er in seinen: „Theoremata de curvarum descriptione organica", welche einen Theil seiner „Enumeratio linearum tertii ordinis" bilden. Die Erweiterung umschliesst Chasles' Verallgemeinerung der Erzeugung von Kegelschnitten. (Aperçu historique. 1875. p. 337). Glr. (O.)

J. A. Grunert. Ueber Newton's Methode zur Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte. Grunert Arch. LXIV. 337-350.

J. A. Grunert. Ueber Newton's Methode zur Beschreibung eines Kegelschnitts, welcher durch vier gegebene Punkte geht und eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt. Grunert Arch. LXV. 1-19.

Die erste Methode Newton's zur Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte wird durch den folgenden Satz gegeben: „Es seien A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 fünf Punkte. Durch A_4 lege man zwei den Verbindungsgeraden $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ parallele Gerade, welche $A'_1 A'_2$ und $A'_2 A'_3$ heissen mögen. $A'_1 A'_2$ möge $A_1 A_5$ in B_1, $A'_2 A'_3$ möge $A_3 A_5$ in B_3 schneiden. Zieht man nun eine beliebige $B_1 B_3$ parallele Gerade, welche $A'_1 A'_2$ in B'_1 und $A'_2 A'_3$ in B'_3 schneidet, und zieht endlich die Geraden $A_1 B'_1$ und $A_3 B'_3$, welche sich in A_6 schneiden mögen, so liegen die sechs Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 immer auf einem Kegelschnitte.“ Diese Construction begründet Herr Grunert durch Rechnung in der ersten Abhandlung. In der zweiten Abhandlung wird ebenfalls durch Rechnung eine von Newton angegebene Construction begründet, bei welcher die beiden Punkte gefunden werden, in denen eine gegebene Gerade von einem durch vier gegebene Punkte gehenden Kegelschnitte berührt wird. Diese Construction, deren genaue Mittheilung hier zu viel Raum kosten würde, verlangt mehrfach die Construction der mittleren Proportionale zweier Strecken, und demgemäss die Anwendung des Zirkels. Trotzdem betont Herr Grunert fortwährend, dass die Construction „linear“ sei, und gründet auf diesen Irrthum sogar einen Angriff gegen Herrn Fiedler als den Verfasser der deutschen Bearbeitung von Salmon's „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“, indem er Herrn Fiedler's Bemerkung „die Aufgabe habe zwei Auflösungen, eine Construction durch lineare Operationen sei desshalb nicht zu erwarten“ „voreilig oder unüberlegt“ schilt, und sich diese Bemerkung nur dadurch erklären kann, dass Herr Fiedler bei dem Niederschreiben derselben von Newton's berühmtem und wahrhaft unsterblichem Werke gar keine nähere Kenntnis gehabt haben könne. Hierbei kann Referent zweierlei nicht unterdrücken. Erstens sein Bedauern darüber,

dass Grunert gestorben ist, ohne zu einem Verständnis des Unterschieds zwischen „elementarer“ und „linearer“ Construction gelangt zu sein, und ohne eingesehen zu haben, dass eine zwei Lösungen liefernde Aufgabe nicht linear construirt werden könne. Zweitens seine Entrüstung darüber, dass ein Mann, der den Grundgedanken der modernen geometrischen Forschung verständnislos gegenübergestanden zu haben scheint, in blindem Selbstbewusstsein lieber die Worte eines bedeutenden Gelehrten für unüberlegt erklärt, als dass er sich die Mühe giebt, zu einem Verständnis dieser Worte zu gelangen. Scht.

F. Amodeo. Teorema di geometria projettiva. Battaglini G. XVIII. 15-17.

Ist ein Kegelschnitt durch fünf Tangenten gegeben, so soll eine sechste Tangente construirt werden durch einen Punkt, der auf einer bekannten siebenten Tangente liegt. Die Lösung ist etwas allgemeiner, aber nicht einfacher, als sie sonst durch den Satz von Brianchon gegeben wird. W. St.

E. Wiskočil. Stereometrische Begründung der zwölf Constructionsaufgaben der Geometrie der Lage von der Bestimmung der Curven zweiter Ordnung aus fünf reellen Elementen. Zeitschr. f. d. Realsch. V. 321-334.

Sollen Kegelschnitte gezeichnet werden, welche irgend fünf Bedingungen genügen, also durch gegebene Punkte gehen, von gegebenen Geraden berührt werden u. s. w., so bedient sich die neuere Geometrie gewöhnlich der collinearen oder involutorischen Punktreihen, des Pascal'schen und Brianchon'schen Satzes und ähnlicher planimetrischer Hülfsmittel. Verfasser zeigt nun, dass man mittels der descriptiven Geometrie zu ganz denselben Ergebnissen gelangen kann, indem man die zu construirende Curve als Schnitt eines gewissen Kreiskegels auffasst. Gr.

E. Hunyady. Ueber die von Möbius gegebenen Kriterien in der Theorie der Kegelschnitte. Borchardt J. LXXXIX. 70-79.

H. Durège. Ueber die von Möbius gegebenen Kriterien für die Art eines durch fünf Punkte oder fünf Tangenten bestimmten Kegelschnittes. Wien. Ber. LXXXII.

Herr Hunyady leitet die im Titel genannten Kriterien nach den Methoden der analytischen Geometrie durch geschickte Behandlung der Determinanten ab. Herr Durège weist nach, dass die Ausführungen des Herrn Hunyady ungenau sind, und giebt bei dieser Gelegenheit eine correcte Ableitung der Möbius'schen Kriterien. Diese erhalten bei Durège für den Fall der gegebenen fünf Tangenten die folgende Form. Man lege an beliebige vier unter den gegebenen Geraden die sie berührende Parabel. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Erstens, die fünfte Gerade schneidet die Parabel nicht. Dann ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, wenn eine ungrade Anzahl der sechs Ecken des aus den vier bevorzugten Geraden entstehenden vollständigen Vierseits auf derselben Seite der fünften Geraden liegt. Zweitens, die fünfte Gerade schneidet die Parabel. Dann ist „ungrade“ zu sagen, wo eben „grade“ gesagt war, und umgekehrt.

Scht.

C. Pelz. Zur Construction der Schnittpunkte von Geraden mit Kegelschnitten. Grunert Arch. LXVI. 1-17.

Sind für die Bestimmung eines Kegelschnitts fünf Punkte gegeben, durch die er gehen soll, so findet man seine beiden Schnittpunkte mit einer gegebenen Geraden am einfachsten, indem man dieselben als die beiden Doppelpunkte der projectiven Punktreihen auffasst, von welchen auf der Geraden drei Paare entsprechender Punkte dadurch bestimmt sind, dass man aus irgend zweien der gegebenen fünf Punkte Strahlen nach den übrigen drei zieht, und die so entstandenen drei Strahlenpaare mit der Geraden zum Schnitt bringt. Es lassen sich dann die

beiden Doppelpunkte nach einer von Steiner angegebenen Construction mit Benutzung eines Hülfskreises leicht finden. In dem Fall, dass statt der fünf Punkte die beiden Axen des Kegelschnitts gegeben sind, hat Steiner für die beiden Schnittpunkte mit einer Geraden eine Construction gegeben, welche aus derjenigen Definition des Kegelschnitts entspringt, bei welcher seine Punkte als die Mittelpunkte aller Kreise erscheinen, die durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis berühren. Diese und viele andere Constructionen hatte Herr Peschka in Grunert Arch. LIX. ausführlich erörtert.

Der Verfasser des vorliegenden Aufsatzes giebt für den Fall, dass der Kegelschnitt durch seine beiden Axen oder durch zwei conjugirte Durchmesser gegeben ist, eine neue Construction seiner beiden Schnittpunkte mit der gegebenen Geraden, indem er auf jener Geraden nicht die beiden erwähnten projectiven Punktreihen, sondern die Involution studirt, welche durch die ∞^1 Paare von polar-conjugirten Punkten entsteht und die gesuchten Schnittpunkte zu Doppelpunkten hat. Alle besonderen Fälle der Aufgabe werden eingehend behandelt. Scht.

J. Carnoy. Théorèmes sur les coniques. N. C. M. VI. 448-449.

J. Carnoy. Propriétés descriptives nouvelles des coniques. Ann. Soc. scient. Brux. IV. B. 260-272.

P. Mansion et C. le Paige. Rapports sur ce mémoire. Ann. Soc. scient. Brux. IV. A. 60-61, 62-64.

Der Hauptsatz lautet: Wenn fünf Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind und man nimmt vier davon als Ecken eines Vierecks $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0$ und zieht durch den fünften zwei beliebige Gerade $\varepsilon = 0$, $\xi = 0$, so bilden die Verbindungsgerade $\eta = 0$ der Punkte $(\varepsilon\beta)$, $(\xi\alpha)$ und die Verbindungsgerade $\theta = 0$ der Punkte $(\varepsilon\delta)$, $(\xi\gamma)$ mit den gegenüberliegenden Seiten des ersten Vierecks $\alpha = 0$, $\gamma = 0$; $\beta = 0$, $\delta = 0$ zwei neue Vierecke $\alpha, \eta, \gamma, \theta = 0$ und $\beta, \theta, \delta, \eta = 0$, deren Diagonalen sich in vier Punkten schneiden,

von denen der eine ($s\xi$) ist, und welche alle auf dem Kegelschnitt liegen. Daraus wird der correlative Satz hergeleitet und die Construction eines gegebenen Kegelschnitts aus fünf Punkten, aus vier Punkten und der Tangente in einem von ihnen, aus drei Punkten und den Tangenten an zweien von ihnen. Ebenso wird auch das correlative Problem gelöst. Mn. (O.)

F. Gräfe. Einige Notizen über das Pascal'sche Sechseck. Schlömilch Z. XXV. 215-216.

F. Gräfe. Erweiterungen des Pascal'schen Sechsecks und damit verwandter Figuren. Wiesbaden. Limbarth.

Der Verfasser hatte schon in seiner Dissertation (Bern, 1879) darauf aufmerksam gemacht, dass einem gegebenen Pascal'schen Sechseck 180 ebensolche Sechsecke in folgender Weise zugehören. Wenn 1, 2, 3, 4, 5, 6 sechs Punkte eines Kegelschnitts, also

12, 23, 34, 45, 56, 61

die sechs Seiten eines Pascal'schen Sechsecks sind, so sind auch

12, 23, 61, 45, 56, 34,

und 12, 56, 34, 45, 23, 61

und 12, 56, 61, 45, 23, 34

jedesmal sechs Seiten von drei neuen Pascal'schen Sechsecken. Nun kann man aber bekanntlich durch die sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 im ganzen sechszig Pascal'sche Sechsecke legen, deren jedes diese sechs Punkte zu Ecken hat. Da nun jedes dieser 60 Sechsecke noch drei neue Pascal'sche Sechsecke in der eben angegebenen Weise liefert, so erzeugt das ursprüngliche Pascal'sche Sechseck 1, 2, 3, 4, 5, 6 im ganzen 180 neue solche Sechsecke. Von diesen haben immer gewisse zwölf mit dem gegebenen Sechseck zwei Ecken gemein.

In den beiden vorliegenden Abhandlungen, von denen die erste einige Resultate der zweiten ohne Beweis kurz darstellt, werden nun viele interessante Eigenschaften des Systems der erwähnten 180 Sechsecke entwickelt. Namentlich werden dieselben mit den auf das Pascal'sche Sechseck bezüglichen Lage-

Sätzen von Steiner, Hesse, Kirkmann, Salmon, Cayley in Zusammenhang gebracht. Die Natur des Gegenstandes macht es jedoch unmöglich, die hier gelieferten Resultate über das System der 180 Sechsecke kurz darzustellen. Scht.

Weil. Note sur le triangle inscrit et circonscrit à deux coniques. Nouv. Ann. (2) XIX. 253-261.

Der Verfasser beweist durch ganz elementare Hülfsmittel theils bekannte, theils neue Lehrsätze, von denen folgende hier Platz finden mögen. Wenn ein Dreieck sich so bewegt, dass es einem Kreise einbeschrieben und einem Kegelschnitte umbeschrieben bleibt, so beschreibt der Mittelpunkt seines Feuerbach'schen Kreises einen Kreis, der dem Kegelschnitt concentrisch ist. Ebenso beschreibt dann der Schnittpunkt der drei Höhen, sowie der Schwerpunkt des Dreiecks einen Kreis. Liegt speciell der eine Brennpunkt des Kegelschnitts, dem das Dreieck umbeschrieben bleibt, im Mittelpunkt des durch die Ecken des Dreiecks gehenden Kreises, so bleibt der Höhenpunkt stets der zweite Brennpunkt des Kegelschnitts. Ebenso bleibt dann der Feuerbach'sche Kreis constant, sowie auch die Summe der Quadrate der Seiten.

Wenn ein Polygon, dessen Seitenzahl 3.2^p ist, sich so bewegt, dass es einem festen Kegelschnitt einbeschrieben bleibt, so beschreibt sein Schwerpunkt einen Kegelschnitt. Scht.

M. Genty. Constructions diverses et solutions de problèmes graphiques relatifs aux coniques. Nouv. Ann. (2) XIX. 216-224.

Aus den Lösungen der beiden bekannten Aufgaben (vgl. z. B. Steiner-Schröter „Vorlesungen über synthetische Geometrie“ 2ter Theil, 2te Auflage, p. 238 ff.):

„Gegeben sind zwei gemeinschaftliche Punkte zweier Kegelschnitte und von jedem drei weitere; gesucht die Verbindungslinie der beiden übrigen Schnittpunkte“,

„Gegeben sind drei Schnittpunkte zweier Kegelschnitte und von jedem zwei weitere Punkte; gesucht der vierte Schnittpunkt“, werden Constructionen abgeleitet, welche sich auf die Bestimmung der Hauptaxen, des Krümmungsmittelpunktes in einem gegebenen Punkte eines durch fünf Bedingungen definirten Kegelschnitts beziehen. Von andern Beispielen heben wir als interessant hervor die Bestimmung der Durchschnittssehne eines Kegelschnitts mit einem seiner Punkte, sofern man diesen als unendlich kleinen Kreis auffasst. Rg.

G. DE LONGCHAMPS. Sur le centre de rayon de courbure en un point d'une conique. Nouv. Ann. (2) XIX. 68-71.

Zieht man durch einen Punkt M eines Kegelschnitts die beiden Parallelen zu den beiden Axen und darauf denjenigen Strahl durch M, welcher rücksichtlich dieser beiden Axen symmetrisch liegt zu der Tangente des Punktes M, so schneidet dieser Strahl den Kegelschnitt in einem Punkte L, welcher der vierte Schnittpunkt des Kegelschnitts mit dem Krümmungskreise des Punktes M ist. Diese bekannte Eigenschaft verwerthet der Verfasser zu der folgenden Construction des Krümmungsmittelpunktes für einen Kegelschnitt-Punkt. Man fälle von dem Punkte M die Senkrechte MP zur Focalaxe, verlängere MP über P hinaus um sich selbst bis M', suche den Schnittpunkt A der Tangente in M mit der Focalaxe, mache $PA' = PA$ und verbinde einerseits M mit A', andrerseits M' mit dem Mittelpunkt des Kegelschnitts. Errichtet man dann in dem Schnittpunkt K dieser beiden Verbindungslinien die Senkrechte zu KM, so schneidet diese Senkrechte die Normale des Punktes M in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkte.

Eine zweite Construction basirt der Verfasser darauf, dass der Krümmungsradius eines Kegelschnittpunktes die vierte Proportionale zu den folgenden drei Strecken ist, erstens der Strecke zwischen dem Kegelschnitte und dem Schnittpunkte seiner Tangente mit der Focalaxe, zweitens der Strecke zwischen demselben Punkte und dem Schnittpunkte seiner Tangente mit der Neben-

axe, drittens dem senkrechten Abstande des Kegelschnittmittelpunkts von der Tangente.

Für die Parabel, bei welcher diese Construction illusorisch wird, werden noch besondere Constructionen angeführt.

Scht.

W. Marx. Synthetischer Nachweis des Euler'schen Satzes über Krümmungsradien. Clebsch Ann. XVII. 100-115.

Der Verfasser giebt zuerst eine einfache Construction des Krümmungsradius, der zu einem Kegelschnittpunkte gehört, und darauf eine neue Ableitung der Euler'schen Relation

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{\cos^2(\alpha\sigma)}{\varrho_\sigma} + \frac{\cos^2(\alpha\sigma_1)}{\varrho_{\sigma_1}},$$

wo ϱ_α den Krümmungsradius in einem beliebigen Normalschnitt, ϱ_σ und ϱ_{σ_1} die Hauptkrümmungsradien bedeuten. Es erscheint diese Relation als specieller Fall der Beziehung:

$$\frac{\sin^2(\beta\beta_1)}{\varrho_\alpha} = \frac{\sin^2(\alpha\beta_1)}{\varrho_\beta} + \frac{\sin^2(\alpha\beta)}{\varrho_{\beta_1}},$$

welche für Flächen 2ten Grades bewiesen wird. Hier bedeuten β und β_1 zwei Paare entsprechender Strahlen derjenigen in einem Flächenpunkte entstehenden Strahlen-Involution, welche die beiden diesem Punkte angehörigen auf der Fläche liegenden Geraden zu Doppelstrahlen hat; ferner bedeutet α eine beliebige andere Tangente, und ϱ_α, ϱ_β, ϱ_{β_1} die den Strahlen α, β, β_1 zugehörigen Krümmungsradien. Schliesslich wird gezeigt, weshalb die für Flächen 2ten Grades bewiesene Euler'sche Relation auf beliebige Flächen übertragbar ist. Scht.

C. Pelz. Die Krümmungshalbmesser-Constructionen der Kegelschnitte als Corollarien eines Steiner'schen Satzes. Prag. Ber. 1879. 205-246.

Unter Zugrundelegung des Steiner'schen Satzes: „Die Tangente und Normale in einem beliebigen Punkte p eines Kegel-

schnitts C bestimmen mit den Kegelschnittaxen vier Tangenten einer Parabel Π, welche die Normale im Krümmungsmittelpunkte berührt," werden auf synthetischem Wege (unter hauptsächlicher Benutzung des Brianchon'schen Satzes) eine Reihe einfacher Constructionen des Krümmungsmittelpunkts oder der Länge des Krümmungshalbmessers abgeleitet. Eine Reihe derselben ist jedoch bereits durch Rechnung in Schellbach's Werk „Die Kegelschnitte für den Gebrauch in Gymnasien und Realschulen" gefunden.

Von neuen Methoden greifen wir aus der grossen Anzahl nur die folgenden heraus, welche zugleich den Charakter der übrigen bezeichnen mögen:

Errichtet man in den Schnittpunkten der Axen einer Hyperbel mit der Normale eines beliebigen Punktes p derselben die Senkrechten I., II. auf diese Axen, so geht die vom Schnittpunkt b dieser Senkrechten auf den Durchmesser op gefällte Normale III durch den Krümmungsmittelpunkt von p.

Der Krümmungsmittelpunkt m eines beliebigen Ellipsenpunktes p ist der Pol des Durchmessers qq_1, welcher dem nach p gehenden conjugirt ist, in Bezug auf einen um p als Mittelpunkt mit dem Radius $\frac{qq_1}{2}$ beschriebenen Kreis K.

Schneiden die Normale und Tangente eines beliebigen Parabelpunktes p die Axe der Parabel in resp. a, c und trifft die in c auf der Axe errichtete Senkrechte die Normale in g, so ist ag die Länge des Krümmungshalbmessers des Punktes p.

Als Anwendung auf die darstellende Geometrie wird schliesslich eine Aufgabe der Schattenlehre behandelt. Nach Dupin erhält man die Tangente der Schattengrenze einer Oberfläche Ω im Punkte p folgendermassen: Man construire eine Fläche zweiter Ordnung O, welche Ω in p osculirt. Dann ist die gesuchte Tangente die Axe des Ebenenbüschels der Polarebenen aller Punkte des durch p gehenden Lichtstrahls in Bezug auf O. Durch zwei derselben, von denen eine die Tangentialebene sein kann, ist demnach die Tangente bestimmt. Mit Hülfe der mitgetheilten Construction wird die Construction von O für einige Rotationsflächen geleistet. Rg.

E. G. Démonstration géométrique d'une propriété des foyers extérieurs au plan d'une conique. Nouv. Ann. (2) XIX. 120.

W. St.

C. LADD. The nine-line conic. Analyst VII. 147-149.

Mittels der Reciprocität werden Eigenschaften des Neun-Linien-Kegelschnitts aus denen des Neun-Punkt-Kreises hergeleitet. Dieselben sind zum Theil bekannt, zum Theil, wie der Verfasser glaubt, neu.

Glr. (O.)

J. STREISSLER. Zur Transformation der Kegelschnitte. Zeitschr. f. d. Realsch. V. 461-467.

Die Transformationsmethoden von Stevin und Mydorge einerseits und von Gregorius a St.-Vincentio andererseits (so drückt sich der Autor aus; geschichtlich correcter würde sie dem Albrecht Dürer zugeschrieben), haben den gemeinsamen Zweck, die Ellipse aus dem Kreise abzuleiten. Verfasser tadelt es, dass man diese schönen Sätze gewöhnlich nur auf descriptivem oder analytisch-geometrischem Wege ableite, und entwickelt deshalb einige elegante Beweismethoden, die blos auf projectivischen Betrachtungen beruhen. Als einen Ausfluss der Lehre von der Collineation ebener Systeme hat übrigens bereits Gretschel (Organische Geometrie, S. 223) diese Umformungen abgehandelt.

Gr.

V. JEŘÁBEK. Beitrag zur Theorie der confocalen Kegelschnitte. Casopis IX. 109. (Böhmisch.).

Enthält einige Constructionsaufgaben, namentlich die Axen der Ellipse betreffend, wenn die Hyperbelasymptoten und ein Durchschnittspunkt gegeben sind.

Std.

MARX. Ueber einige geometrische Oerter. Pr. Friedland.

Dieser Aufsatz enthält die Beantwortung von Fragen, wie die folgende: Welches ist der geometrische Ort für den Scheitel eines harmonischen Strahlenbüschels, dessen vier Strahlen durch die Ecken eines gegebenen Rechtecks gehen. Später werden den Ecken eines Rechtecks die eines gleichschenkligen Trapezes und auch noch andere Punkte substituirt. Alle diese Fragen erledigen sich durch den bekannten Satz, dass der Ort der Scheitel eines Büschels von vier Strahlen, die durch je einen festen Punkt gehen und ein constantes anharmonisches Verhältnis haben, ein Kegelschnitt ist, der durch die vier festen Punkte geht. Die Durchführung der Fragen in speciellen Fällen hat daher nur für Schüler ein gewisses Interesse, und hat auch der Herr Verfasser diesen Zweck, wie er im Eingang sagt, besonders im Auge gehabt.

Mz.

W. JEŘÁBECK. Anmerkung zu dem Aufsatze: „Beitrag zur Ellipse“ in Bd. 63, p. 443. Grunert Arch. LXV. 215-218.

Herr Sinram hatte es für interessant gehalten, analytisch-geometrisch eine bekannte Construction der Aufgabe zu begründen, dass eine Ellipse gezeichnet werden soll, welche vier paarweis parallele Strahlen berührt. Dass diese Aufgabe zunächst unbestimmt ist und bei Hinzufügung einer Bedingung sich auf die fundamentale Construction reducirt, welche bei zwei projectiven Grundgebilden aus drei Paaren entsprechender Elemente ein viertes Paar findet, dürfte inzwischen Herrn Sinram bekannt geworden sein. Auch Herr Jeràbeck unternimmt es, Herrn Sinram darauf aufmerksam zu machen, dass die von ihm bewiesene Construction aus der projectiven Beziehung gewisser zwei Strahlbüschel folgt.

Scht.

FR. TOMEŠ. Ellipsenconstructionen. Casopis IX. 275. (Böhmisch).

Behandelt die Bestimmung der Axen von Ellipsen, von denen der Mittelpunkt und ausserdem noch andere Elemente gegeben sind.

Std.

Fr. Tomeš. Das Sechseck mit eingeschriebenem und umschriebenem Kegelschnitt. Casopis IX. 277. (Böhmisch.).
Std.

T. N. Thiele. En Konstruktion af Ellipsens Axer ved et Par konjugerte Diametre. Zeuthen Tidsskr. (4) IV. 1-3.

Aus dem Endpunkte φ des einen Halbmessers einer Ellipse wird auf den conjugirten Halbmesser eine Senkrechte gefällt, und von φ ausgehend wählt man auf dieser zwei Punkte ϱ und σ, deren Abstände von φ den halben conjugirten Durchmessern gleich sind. Dann sind, wenn o den Mittelpunkt der Ellipse bezeichnet, die Entfernungen $o\varrho$ und $o\sigma$ gleich bezw. der Differenz und Summe der Halbaxen, und die Richtung der grossen Axe halbirt den Winkel $\varrho o \sigma$, welcher selbst das Doppelte der excentrischen Anomalie des Punktes φ ist. Die Construction wird mittels der Theorie der complexen Zahlen bewiesen. Gm.

Anonym. Solution d'une question pour l'admission, (en 1879) à l'école polytechnique. Nouv. Ann. (2) XIX. 5-12.

Enthält eine synthetische Behandlung der Aufgabe, die folgendermassen lautet: Gegeben ist ein Kegelschnitt, bezogen auf seine Axen $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$ und ein Punkt M auf demselben. Durch die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers der Curve und durch den Punkt M wird ein Kreis gelegt. Der Ort der Mittelpunkte dieses Kreises ist ein Kegelschnitt (K), der durch den Coordinatenanfangspunkt geht. Am Schluss werden noch einige Eigenschaften dieser beiden Kegelschnitte ohne Beweis mitgetheilt. O.

C. Taylor. On the directrix of a parabole inscribed in a triangle. Messenger (2) IX. 192.

Der Verfasser beweist durch Anwendung der Involution,

dass die Directrix einer einem Dreieck eingeschriebenen Parabel durch den Höhenschnittpunkt geht. Glr. (O.)

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus dem Gebiete der synthetischen Geometrie der Ebene von GENESE, H. T. GERRANS, T. W. OPENSHAW, SCOTT, WOLSTENHOLME, CLIFFORD, F. TIRELLI, D. EDWARDES, J. O'REGAN, E. RUTTER, J. S. JENKINS, A. ANDERSON, TOWNSEND, L. H. ROSENTHAL, A. L. SELBY, LIEBER, H. MURPHY, E. PRESSON, DUFAURE, MORET-BLANC finden sich Educ. Times XXXIII. 45, 50-51, 54, 58-59, 62, 67, 96, 98, 100, 103; Nouv. Ann. (2) XIX. 331-332, 475-478, 479.

O.

S. KANTOR. Metrische Formeln für das Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten. Wien. Ber. LXXVIII.

Die Formeln beziehen sich auf den von den Mittelpunkten der Büschelcurven gebildeten Kegelschnitt, auf die in dem Büschel enthaltene gleichseitige Hyperbel, auf diejenige Ellipse des Büschels, welche dem Kreise am nächsten kommt, und diejenige Hyperbel, welche von der gleichseitigen Hyperbel am meisten unterschieden ist, schliesslich auf die beiden im Büschel vorkommenden Parabeln.

Von den letzteren werden die Parameter berechnet, während für die übrigen Kegelschnitte die Axenlängen, Asymptotenwinkel und diejenigen Halbmesser bestimmt werden, welche den Seiten des von den Basispunkten gebildeten Vierecks parallel sind. Die expliciten Ausdrücke für diese Grössen enthalten ausser den Seitenlängen des genannten Vierecks noch die Radien der durch je drei Basispunkte gehenden Kreise. Aus dem Vergleich der erhaltenen Formeln fliessen mehrere die metrischen Bestimmungsstücke der in Betracht gezogenen Kegelschnitte betreffende Sätze.

Hz.

M. Trebitscher. Ueber Beziehungen zwischen Kegelschnittbüscheln und rationalen Curven dritter Classe. Wien. Ber. LXXXI.

Der Verfasser fasst den Ort der Axen der Kegelschnitte eines Büschels als das Erzeugnis der Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier ein-zweideutig auf einander bezogenen Punktreihen auf, von denen die eine die unendlich ferne Gerade ist und die zweite der von den Centren aller Kegelschnitte des Büschels erzeugte Kegelschnitt U_2 ist. Jeder Punkt von q_2 ist nämlich Centrum eines einzigen Kegelschnitts, und dessen beide Axen schneiden die unendlich ferne Gerade in zwei Punkten, welche dem auf U_2 gewählten Punkte zugeordnet werden. Da jeder der beiden auf U_2 liegenden unendlich fernen Punkte bei dieser Zuordnung sich selbst entspricht, so nehmen auch zwei Parallel-Strahlenbüschel an dem gesuchten Orte Theil. Es sind dies die Parallelen zu den Axen der beiden in dem Büschel liegenden Parabeln. Die übrigen Strahlen des Ortes, also die eigentlichen Axen der Kegelschnitte des Büschels, bilden eine rationale Curve dritten Ranges, welche die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente hat. Von diesem Gesichtspunkte aus lassen sich die Beziehungen zwischen dem Kegelschnittbüschel und seinem Axenort mit Leichtigkeit auffinden. Speciell sei erwähnt, dass, wenn der Axenort eine Steiner'sche Hypocycloide ist, der Mittelpunktskegelschnitt ein Kreis wird und das Büschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln bestehen muss.

In ähnlicher Weise studirt der Verfasser auch die Umhüllungscurve der Asymptoten, und, indem er statt der unendlich fernen Geraden eine beliebige Gerade setzt, die Umhüllungscurve der Tangenten, welche sich zu den Kegelschnitten des Büschels in deren Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden ziehen lassen. Scht.

R. Sturm. Ueber die ebenen Curven dritter Ordnung. Borchardt J. XC. 85-102.

Bekanntlich haben Curven dritter Ordnung die Eigenschaft,

dass, wenn es Punkte auf ihnen giebt, von denen vier reelle Tangenten ausgehen, es auch solche Punkte giebt, bei denen diese Tangenten sämmtlich imaginär sind. Zu diesem Satze, welcher von Durège in einer Abhandlung des 75ten Bandes des Borchardt J. mit Heranziehung ferner liegender Hülfsmittel bewiesen war, giebt Herr Sturm im ersten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung einen Beweis, welcher nichts anderes voraussetzt, als die Chasles'sche Erzeugung der Curve durch Strahl- und Kegelschnittbüschel. Der zweite Abschnitt ergänzt den Salmon'schen Beweis für die Constanz des Doppelverhältnisses der vier von einem Punkte der Curve ausgehenden Tangenten dahin, dass die Constanz des Doppelverhältnisses auch für solche zwei Punkte nachgewiesen wird, welche auf verschiedenen Zügen der Curve liegen.

Im dritten und vierten Kapitel werden geometrische Betrachtungen angestellt, welche zu einfacheren naturgemässen Beweisen von grösstentheils bekannten Sätzen führen, die sich auf die Realität der Wendepunkte, Beziehung zwischen Berührungspunkt und Tangentialpunkt, Realität der Tangenten etc. beziehen. Dabei werden auch die Fälle berücksichtigt, dass die Curve einen isolirten Doppelpunkt, einen eigentlichen Doppelpunkt oder einen Rückkehrpunkt besitzt. Scht.

A. Milinowski. Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung. Borchardt J. IXC. 136-151.

In dem Aufsatz des Herrn R. Sturm: „Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung (Borchardt J. LXXXVIII. 213-241 cfr. F. d. M. XI. 447) hat Herr Sturm eine rein geometrische Polarentheorie für diese Flächen im Anschluss an frühere Arbeiten von Herrn Milinowski entwickelt. Da sich aber diese Theorie ohne Weiteres auf ebene Curven übertragen lässt, und da andererseits die von Herrn Cremona angestellten Untersuchungen nicht rein geometrisch geführt sind, so hat der Herr Verfasser hier eine rein geometrische Theorie der Polaren der ebenen Curven dritter Ordnung ausgearbeitet, welche sich einfach auf Flächen dritter

Ordnung übertragen lässt. Den Ausgangspunkt bilden folgende Sätze: „Alle Punkte, welche durch eine Curve dritter Ordnung von einem festen Punkte P harmonisch getrennt werden, liegen auf einer Curve dritter Ordnung P^3, welche die harmonische Polarcurve von P heisst (cfr. Reye, Geometrie der Lage, II. 2te Aufl. S. 203)."

„Sind vier Punkte α, β, γ, P auf einer Geraden gegeben, so giebt es auf derselben ein und nur ein Tripel α, β, γ der Art, dass je zwei der letzteren durch P und je einen der Punkte α_1, β_1, γ_1 harmonisch getrennt sind."

„Sind P^3 und Q^3 die harmonischen Polarcurven von P und Q in Bezug auf C^3, so geht die harmonische Polarcurve eines jeden ihrer Durchschnittspunkte durch P und durch Q."

„Ist P ein Punkt von C^3, so ist die harmonische Polarcurve aufgelöst in die Tangente p durch P und einen Kegelschnitt P^2, welcher C^3 in P berührt."

„Sind A, B, C die Schnittpunkte einer Geraden p mit C^3, und A^3, B^3, C^3 ihre harmonischen Polarcurven, welche bezüglich in die drei Tangenten in A, B, C und in die Kegelschnitte A^2, B^2, C^2 zerfallen, so gehen diese drei Kegelschnitte durch vier Punkte P, P_1, P_2, P_3 und diese vier Punkte heissen die vier Pole von p, p dagegen heisst die zweite oder gerade Polare eines jeden der vier Punkte P."

Da ferner C^3 und P^3 drei Punkte einer Geraden gemein haben, so müssen nach einem bekannten Satze ihre sechs anderen Schnittpunkte auf einem Kegelschnitt liegen. Dieser wird definirt als die erste oder conische Polare des Punktes P. Hiermit sind die geometrischen Elemente festgestellt, auf denen sich nun die weitere Theorie der Polaren aufbaut.

Die Grundlage für die Polartheorie der Flächen wird folgendermassen gewonnen.

Es seien A, B, C die Schnittpunkte einer Geraden p mit der Fläche F^3; ihre drei harmonischen Polarflächen zerfallen in die drei Tangentialebenen a, b, c und die drei Flächen zweiter Ordnung A^2, B^2, C^2, welche, wie bewiesen wird, einem Büschel angehören. Legt man durch A eine zweite Gerade γ, welche F^3 noch in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$

schneidet, so sind die harmonischen Polarflächen von 𝔅 und ℭ aufgelöst in die Tangentialebenen 𝔟 und 𝔠, und die Kegelschnitte $𝔅^2, ℭ^2$, und auch die drei Kegelschnitte $A^2, 𝔅^2, ℭ^2$ gehören einem Büschel an. Die Grundcurven der Büschel A^2, B^2, C^2 und $A^2, 𝔅^2, ℭ^2$ sind zwei Raumcurven vierter Ordnung ϱ^4 und ϱ_1^4 auf A^2, welche sich in acht Punkten P schneiden, die harmonische Polarfläche eines dieser acht Punkte P geht durch die fünf Punkte $A, B, C, 𝔅, ℭ$, und es lässt sich weiter zeigen, dass sie durch den Durchschnitt der Ebene $p\gamma$ oder π mit der Fläche F^3 geht. Die Ebene π heisst die Polarebene von P, die Curve ϱ^4 heisst die erste Polare von p. Die Flächen P^3 und F^3 müssen ausser der ebenen Curve in π noch eine Raumcurve 6ten Grades gemein haben, durch welche noch eine Fläche 2ten Grades P^2 geht, welche die erste Polarfläche von jedem der acht Punkte heisst. Auf dieser Grundlage werden nun die weiteren Polareigenschaften entwickelt. A.

R. Heger. Eine Construction von Curven dritter Ordnung aus conjugirten Punkten. Schlömilch Z. XXV. 100-103.

Wenn zwei Strahlbüschel zwei-zweideutig auf einander bezogen sind, so bilden die Schnittpunkte von je zwei einander entsprechenden Strahlen eine Curve vierter Ordnung, welche in den Scheiteln der beiden Strahlbüschel Doppelpunkte besitzt. Entspricht die Verbindungslinie dieser Scheitel sich selbst, so zerfällt die Curve vierter Ordnung in diese Verbindungslinie und und eine Curve dritter Ordnung. Die beiden einander entsprechenden Strahlenpaare, zu welchen die Verbindungslinie gehört, enthalten dann ausserdem noch die beiden Tangenten der Curve dritter Ordnung, und da ihr Schnittpunkt auf der Curve liegt, so haben die Strahlbüschel-Scheitel A_1 und A_2 einen und denselben Tangentialpunkt A_3. Hierauf gründet der Verfasser eine lineare Construction der Curve dritter Ordnung, wenn für dieselbe fünf beliebige Punkte und die beiden Berührungspunkte zweier Tangenten gegeben sind, die von einem dieser fünf Punkte ausgehen.

Ebenso leitet der Verfasser dann noch aus der Construction

der entsprechenden Strahlen zweier zwei-zweideutig bezogener Strahlbüschel in allgemeiner Lage die Construction einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten ab, wenn für dieselbe die beiden Doppelpunkte, vier beliebige Punkte und noch vier solche Punkte gegeben sind, die mit den beiden Doppelpunkten zusammen die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits bilden.

Scht.

Em. Weyr. Ueber Projectivitäten und Involutionen auf ebenen rationalen Curven dritter Ordnung. Wien. Ber. 1880.

Jeder von den ∞^1 Kegelschnitten, welcher die drei Wendetangenten J_1, J_2, J_3 einer Plancurve C_3^4 dritter Ordnung, vierten Ranges und eine willkürlich angenommene Gerade A berührt, hat, da jede der Wendetangenten doppelt zählt, noch $8-3.2=2$ Tangenten mit der C_3^4 gemeinsam. Der Geraden A werden so ∞^1 Tangentenpaare oder eine quadratische Tangenteninvolution zugeordnet. Die auf diese Weise den sämmtlichen ∞^2 Geraden der Ebene eindeutig zugeordneten quadratischen Tangenten-Involutionen unterwirft Herr Weyr hier einer eingehenden Untersuchung. Namentlich werden auch die ∞^2 die C_3^4 dreifach berührenden Kegelschnitte behandelt. Herr Weyr hatte nämlich schon im Jahre 1879 in den Wien. Ber. LXXX. (siehe F. d. M. XI. 1879. p. 514) nachgewiesen, wie jede auf einer C_3^4 gegebene quadratische Involution einen dreifach berührenden Kegelschnitt eindeutig bestimmt, und wie umgekehrt jeder solcher Kegelschnitt eine einzige quadratische Involution der Punkte und also auch der Tangenten der C_3^4 hervorruft. Deshalb gewinnt Herr Weyr hier eine ein-eindeutige Zuordnung der ∞^2 Geraden A der Ebene mit den ∞^2 eine C_3^4 dreifach berührenden Kegelschnitten. Wird die Gerade A die die drei Wendepunkte enthaltende Gerade, so ist die ihr zugeordnete Involution die der conjugirten Punkte, d. h. das System der Punktepaare, deren Tangentenpaare sich auf der Curve schneiden. Unter den vielen Resultaten, welche sich dem Verfasser mit Leichtigkeit ergeben, heben wir den Satz hervor, dass die beiden Kegelschnitte, welche durch

den Doppelpunkt gehen, die drei Wendetangenten und den Wend punktstrahl berühren, im Doppelpunkte auch die beiden Dopp punkttangenten berühren.

Mit Benutzung analytischer Hülfsmittel werden die drei In volutionen betrachtet, welche als Doppelelemente zwei Punk besitzen, deren Tangenten durch Wendepunkte gehen. Eben kommt der Verfasser nur auf analytischem Wege den drei Inv lutionen bei, deren Involutionscurven die sechspunktig-berühre den Kegelschnitte sind.

Unter den auf der C_3^4 auftretenden Projectivitäten werd besonders diejenigen studirt, für welche die Nachbarpunkte d Doppelpunktes Doppelelemente sind. Nach einigen Sätzen üb cubische Punkt-Involutionen der C_3^4 wendet sich Herr We schliesslich zu den Punktgruppen, welche einen gemeinschaftlich n^{ten} Tangentialpunkt besitzen, und beleuchtet dadurch von neu die Frage nach den der C_3^4 gleichzeitig ein- und umbeschrieb nen einfachen Polygonen. (Cfr. Durège, Ueber fortgesetz Tangentenziehen u. s. w. in den Prag. Ber. 1869, s. F. d. M. 1870. p. 507). Scht.

Em. Weyr. Ueber Involutionen bei Curven dritt Grades. Casopis IX. 145. (Böhmisch.)

Enthält die Ableitung der Bedingungen, wann ein Keg schnitt in Bezug auf eine Curve dritten Grades als Involutio Kegelschnitt auftritt, was durch Einführung des eindeutig Parameters u und entsprechende Vereinfachung der Curv gleichung sehr einfach effectuirt wird. Std.

C. Le Paige. Ueber eine Relation zwischen den si gulären Elementen cubischer Involutionen. Wien. B LXXXI.

Em. Weyr. Bemerkung über Herrn C. Le Paige's Ab handlung: „Ueber eine Relation zwischen den singu lären Elementen cubischer Involutionen.“ Wien. Be LXXXI.

Entsprechen in einer einstufigen Mannigfaltigkeit nullten Geschlechtes jedem Elemente zwei Elemente, so wird dadurch eine Verwandtschaft festgestellt, welche unter dem Namen „cubische Involution“ von Herrn Weyr in den Prag. Ber. 1874 (s. F. d. M. VII. 1875. p. 364) ausführlich behandelt ist. Aus dem Correspondenzprincip ergiebt sich, dass jede cubische Involution vier Doppelelemente besitzen muss. Das Element, dem ein Doppelelement entspricht, heisst Verzweigungselement. Zwischen den vier Doppelelementen und den vier Verzweigungselementen besteht eine Relation, welche Herr Weyr in den Wien. Ber. von 1876 abgeleitet hat. Mit Hinweis auf diese Relation beweist nun Herr Le Paige in der ersten der vorliegenden Abhandlungen auf algebraischem Wege den Satz, dass bei zwei cubischen Involutionen mit gemeinschaftlichen vier Doppelelementen, die zweimal vier Verzweigungselemente und die Doppelelemente selbst drei Quadrupel einer biquadratischen Involution bilden.

Die Anwendungen, welche Herr Weyr von diesem Satze des Herrn Le Paige in der zweiten Abhandlung macht, gehen davon aus, dass die vier Doppelelemente einer cubischen Involution zugleich Doppelelemente einer ganz bestimmten zweiten cubischen Involution sind, so dass in dieser Weise jeder cubischen Involution eine zweite beigeordnet ist. Namentlich betrachtet Herr Weyr die beigeordneten Involutionen, welche zwischen den Punkten eines Kegelschnitts und den Punkten einer Plancurve C_4^3 vierter Ordnung dritten Ranges festgestellt werden können. Auf einer C_4^3 entstehen zwei beigeordnete cubische Involutionen dadurch, dass man die beiden einfachen Schnittpunkte s' und s'' der Tangente in irgend einem Punkte s aufsucht und alle möglichen Punkttripel bestimmt, welche der C_4^3 angehören und mit s', resp. s'' in gerader Linie liegen. Die beiden so erzeugten einstufigen Systeme von Punkttripeln sind beigeordnete cubische Involutionen, und ihre vier gemeinsamen Doppelpunkte fallen in den Punkt s und in die drei Rückkehrpunkte.

Scht.

Em. Weyr. Ueber biquadratische Involutionen zwei Stufe und ihre typischen Curven. Wien. Ber. LXXXI.

Als der Träger der hier betrachteten Punktsysteme wird ei Curve vierter Ordnung C_4 mit drei Doppelpunkten und ein m ihr in eindeutiger Beziehung stehender Kegelschnitt K zu Grun gelegt. Diese Abbildung kann in bekannter Weise durch ei geometrische Verwandtschaft zweiten Grades ausgeführt werd

Sechs quadratische Fundamentalinvolutionen auf C_4 ergeb sich: 1) durch die Punktepaare, deren Verbindungslinien dur je einen Doppelpunkt gehen. 2) durch die benachbarten Punk eines Doppelpunktes als Ordnungselememente.

Die drei ersten Involutionen heissen central, die ande nicht central. Vier Punkte von C_4, welche in einer Gerad liegen, bilden eine gerade Punktgruppe. Alle geraden Punk gruppen bilden eine Involution vierten Grades zweiter Stufe. D Abbildung eines solchen Quadrupels auf dem Kegelschnitt K e giebt vier Punkte, welche mit drei festen ausserhalb K lieg den Punkten O_1, O_2, O_3 auf einem zweiten Kegelschnitte lieg Die Berührungspunkte einer Doppeltangente bilden ein beson res Quadrupel, für welches man folgenden Satz hat: „Legt m aus den drei Doppelpunkten einer ebenen Curve vierter Ordnung die drei Tangentenpaare an die Curve und lässt man die Berührungspunkte eines jeden Paares einander projectivisch entsprechen, so erhält man vier projectivische Punktsysteme auf der Curve. Die Berührungspunkte jeder der vier Doppeltangenten sind die Doppelpunkte einer jener vier projectivischen Punktsysteme.“

„Die Osculationspunkte der sechs durch O_1, O_2, O_3 gehenden und K osculirenden Kegelschnitte sind die Bilder der sechs Wendepunkte von C_4.“

Für die Berührungspunkte der vier Doppeltangenten Δ un der sechs Wendetangenten T findet sich der Satz:

„Die Berührungselemente irgend zweier von den zehn Gera den Δ, J (wenn der Berührungspunkt von Δ als ein Paar, de von J als ein Doppelelement einer Involution aufgefasst wird

bestimmen eine quadratische Punktinvolution; die übrigen acht Geraden und die Tangenten in irgend zwei Punkten eines Paares der Involution sind zehn Tangenten einer Curve dritter Classe.“ Die Zahl dieser quadratischen Involutionen ist 45.

Allgemeine quadratische Involutionen auf C_4 werden durch ein Kegelschnittbüschel ausgeschnitten, dessen Grundpunkte die drei Doppelpunkte und ein beliebiger nicht auf C_4 liegender Punkt sind. Ein beliebiges Punktpaar x, x' auf C_4 bestimmt ein zweites Punktepaar ξ, ξ', das mit dem ersten auf einer Geraden liegt. ξ, ξ' heisst das x, x' begleitende Punktepaar. Eine quadratische Involution wird von einem symmetrischen Punktsystem begleitet. Jedes symmetrische Punktsystem zweiten Grades auf C_4, welchem auch die benachbarten Punkte der Doppelpunkte als Paare angehören, begleitet eine quadratische Involution.

Halbfundamentale Punktinvolutionen auf C_4 sind solche, für welche die Nachbarpunkte eines Doppelpunktes ein Paar bilden. Es giebt daher drei Systeme solcher halbfundamentaler Involutionen. Jede halbfundamentale Involution wird von einer zweiten Involution desselben Systems begleitet. Die Involutionscurven dieser Punktinvolutionen auf C_4 sind Kegelschnitte, welche C_4 vierfach berühren. W. St.

Em. Weyr. Ueber vollständig eingeschriebene Vielseite.
Wien. Ber. LXXXI.

Es werden hier sogenannte Involutionscurven betrachtet, welche der Ort der Schnittpunkte solcher Tangentengruppen eines Kegelschnittes sind, welche eine Involution n^{ten} Grades auf ihm bilden. Die Curve ist von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, aber nicht allgemeiner Natur. Es ergeben sich folgende Sätze: „Soll eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung Involutionscurve bezüglich eines gegebenen Kegelschnittes sein, so zählt dies für $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ die Curve beschränkende Bedingungen.“ Da nun

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 2(n-1),$$

so folgt: „Eine Involution n^{ten} Grades ist bestimmt durch $2(n-1)$ Elementenpaare.“ Die Bestimmung ist nicht eindeutig, sobald $n>2$. Eine Involutionscurve $(n-1)^{ter}$ Ordnung ist (nicht eindeutig) durch $2(n-1)+5$ Bedingungen bestimmt. Dabei ist zu bemerken, dass der Trägerkegelschnitt als mitgegeben erscheint. Für $n-1=4$ folgt: Unter den Curven vierter Ordnung, welche dreizehn gegebenen Bedingungen genügen, giebt es nur eine bestimmte Anzahl, welche Involutionscurven sind. Einer Curve vierter Ordnung lässt sich im Allgemeinen kein vollständiges Fünfseit einschreiben; giebt es jedoch ein solches, so giebt es unendlich viele, welche alle einem und demselben Kegelschnitt umschrieben sind.

Wenn eine Curve C_4 einen Doppelpunkt von der Beschaffenheit besitzt, dass seine Tangenten mit den nach den Berührungspunkten einer Doppeltangente gehenden Strahlen ein harmonisches Büschel bilden, dann ist C_4 eine Involutionscurve.

W. St.

S. Kantor. Ueber gewisse Curvenbüschel dritter und vierter Ordnung. Wien. Ber. LXXIX.

Der Verfasser unterwirft diejenigen Curvenbüschel dritter und vierter Ordnung rein synthetischen Betrachtungen, bei welchen einer oder mehrere von den Basispunkten für sämmtliche Curven des Büschels Inflexions-, bezüglich Undulationspunkte sind.

Die Basispunkte dieser speciellen Curvenbüschel gruppiren sich in bestimmter Weise auf Geraden und Kegelschnitten bez. auf Geraden, Kegelschnitten und Curven dritter Ordnung. Es wird einerseits gezeigt, wie man diese Gruppirungen constructiv herstellt, andererseits erschliesst der Verfasser, wesentlich mit Hülfe dieser Lagenverhältnisse der Basispunkte, mehrere interessante auf Curven dritter und vierter Ordnung bezügliche Sätze. Von diesen seien die folgenden als Beispiele angeführt:

„Sind drei nicht in gerader Linie liegende Scheitel eines

Büschels von Curven dritter Ordnung für alle Curven Inflexionspunkte, so besitzen gleich alle Scheitel des Büschels diese Eigenschaft und das Büschel ist ein sycigetisches."

„Sind für die Curven eines Büschels vierter Ordnung drei Scheitel gemeinsame Undulationspunkte, so hat stets ein vierter Scheitel dieselbe Eigenschaft."

„Die sechzehn Inflexionspunkte, welche jede Büschelcurve ausser den vier Undulationspunkten hat, bilden auf ihr die Basis eines Curvenbüschels vierter Ordnung."

Den Schluss der Note bilden einige ohne Beweis angegebene Sätze ähnlichen Charakters. Hz.

C. Andréef. Ueber die Construction der Polaren in Bezug auf die geometrischen ebenen Curven. Chark. Nachr. 1880.

Der Verfasser behandelt in diesem Aufsatze verschiedene Aufgaben aus der Polarentheorie im Zusammenhange mit der Construction der durch eine genügende Anzahl von Punkten gegebenen Curve. Unter anderem wird bewiesen, dass, wenn eine Curve n^{ter} Ordnung durch eine genügende Anzahl von Punkten gegeben ist, die Bestimmung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Polare eines Punktes in Bezug auf diese Curve sich mittels ganz bestimmter Constructionen, mit Hülfe des Lineals allein, durchführen lässt. Von diesem Satze werden Anwendungen auf die Construction der Curve selbst gemacht. P.

C. Dewulf. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XIX. 428-429.

Der Brief giebt eine von der gewöhnlichen abweichende Methode zur Construction einer Tangente an ein Descartes'sches Oval. O.

B. Räumliche Gebilde.

F. Aschieri. Sulle forme collineari e reciproche nell' ordinaria geometria. Mem. di Bologna (4) I. 145-151.

Die Definition der collinearen und reciproken Beziehung von Grundgebilden der zweiten und dritten Stufe wird hier in etwas anderer Weise, als sonst üblich ist, aufgestellt im Anschlusse an die von Cremona gegebene Definition der projectivischen Beziehung von Grundgebilden der ersten Stufe. Hiernach sind zwei Gebilde erster Stufe als projectivisch zu bezeichnen, wenn ihre entsprechenden Elemente durch eine endliche Zahl von Operationen, d. h. Projectionen und Schnitten auf einander gebracht werden können.

Der Verfasser definirt demgemäss: „Zwei Grundgebilde zweiter Stufe heissen collinear, wenn das eine auf das andere, Element für Element, durch eine endliche Anzahl von Projectionen aus einem Centrum und Schnitten mit einer Ebene geführt werden kann.“ Und weiter: „Zwei Grundgebilde zweiter Stufe heissen reciprok, wenn das eine auf das andere, Element für Element, gebracht werden kann durch ein Polarsystem in Bezug auf einen Kegelschnitt und eine endliche Anzahl der ebengenannten Operationen.“

Es wird in der That folgender Satz bewiesen: „Durch eine endliche Zahl von Operationen kann man auf unendlich viele verschiedene Weisen von jeder Ecke eines Viereckes (Q) oder Seite eines Vierkantes (q) zu der entsprechenden und bestimmten Ecke eines andern Viereckes (Q') oder Seite eines Vierkantes (q') gelangen.“ Damit ist gezeigt, dass die Collineation zweier Grundgebilde zweiter Stufe stets herstellbar ist, sobald man vier Paare entsprechender Elemente kennt. Ohne die Sätze über harmonische Elemente scheint es dem Referenten aber weder bei der projectivischen Beziehung von Grundgebilden erster Stufe noch bei der collinearen derjenigen zweiter Stufe möglich, die Eindeutigkeit der Beziehung nachzuweisen, wenn

drei, resp. vier Paare entsprechender Elemente gegeben sind. Zudem setzt die Definition der reciproken Beziehung die Kenntnis der Polarentheorie voraus, welche doch sonst erst als specieller Fall der ersten aufgefasst wird, hier aber aus der Theorie der Kegelschnitte vorher entwickelt werden muss. Die gegebenen Definitionen sind deshalb wohl nicht einfacher, als die bekannten, jedoch als Unterrichtsmittel von Werth.

Nachdem weiter die räumliche Perspective oder Projection erklärt worden ist, giebt der Verfasser für die Beziehungen der Grundgebilde dritter Stufe folgende Definitionen.

„Zwei Grundgebilde dritter Stufe heissen collinear, wenn das eine auf das andere, Element für Element, durch eine endliche Zahl von räumlichen Projectionen übergeführt werden kann."

Und ferner: „Zwei Gebilde dritter Stufe heissen reciprok, wenn das eine auf das andere, Element für Element, durch ein Polarsystem und eine endliche Zahl von räumlichen Projectionen übergeführt werden kann."

Diese Definitionen werden auf Grund des vorher bewiesenen Satzes aufgestellt: „Durch eine endliche Zahl von Raumprojectionen kann man auf unendlich verschiedene Weisen aus fünf Punkten A, B, C, D, E oder fünf Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ der Reihe nach zu fünf anderen analogen Punkten A', B', C', D', E' oder fünf analogen Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$ gelangen." W. St.

P. E. Neumayr. Ueber die Begründung der projectiven Beziehung der reellen Elemente zweier Grundgebilde erster Stufe in der reinen Geometrie und die Einführung der Zahlen in die reine Geometrie.
Innsbr. Ber. IX.

In den letzten Jahren sind gegen die Form, in welcher v. Staudt das grundlegende Capitel der reinen Geometrie behandelt hat, Bedenken geäussert. Diese Bedenken veranlassten den Verfasser zu der vorliegenden Arbeit. Es sind darin die Winke, welche Klein, Lüroth, Zeuthen und andere in dieser Richtung gegeben haben, berücksichtigt. Bemerkt mag hier werden, dass

der Verfasser die Stetigkeit eines Stückes einer Geraden durch das folgende Axiom definirt. „Zerfallen alle Punkte eines Stückes einer Geraden in zwei Classen von der Art, dass jede Classe für sich wieder ein Stück derselben Geraden ist, so existirt immer ein und nur ein Punkt, der diese Eintheilung der Punkte in zwei Classen hervorbringt.“ Die sich hieran anschliessende Definition der Grenzpunkte einer Punktreihe (cfr. Klein, Clebsch Ann. VII. 536, s. F. d. M. VII. 1875. p. 310) bereitet dann die auf die harmonische Lage Bezug nehmende Definition der projectiven Verwandtschaft vor.

Der zweite Theil der Abhandlung untersucht die Grundlage für die Anwendung der reinen Mathematik auf geometrische Probleme. Der Verfasser betont, dass der Begriff der Grösse kein der allgemeinen Arithmetik wesentlich angehöriger Begriff ist, dass es vor Staudt nicht gelungen sei, ein reales Substrat der Zahlenlehre zu finden, welches nicht den Begriff der Grösse mit sich brächte, dass aber das von Staudt erfundene Rechnen mit Würfen dies leiste. Es wird dann das Rechnen mit Würfen ausführlich erörtert. Scht.

G. Kilbinger. Problem der homologen Kreise in collinearen Räumen. Diss. Strassburg.

Bekanntlich lassen sich zwei collineare Räume im Allgemeinen nicht in perspectivische Lage bringen. Es giebt in collinearen Räumen stets zwei einander entsprechende unendlich ferne Gerade, für welche folgender Satz bewiesen wird. „Die Räume Σ und Σ_1 lassen sich nur dann und zwar auf zweifache Weise in perspectivische Lage bringen, wenn die beiden homologen unendlich fernen Punktreihen derselben projectivisch gleich sind.“

Es wird dann die Frage erörtert, welche Lage haben die Kreise in Σ, denen in Σ_1 wiederum Kreise entsprechen, und es ergeben sich folgende Resultate: „Sind zwei collineare Räume Σ und Σ_1 nicht affin und lassen sie sich nicht in perspectivische Lage bringen, so gehen durch jeden Punkt P

des Raumes Σ doppelt unendlich viele Kreise, denen wieder Kreise in Σ_1 entsprechen. In einem ebenen Systeme E in Σ, welches zu dem homologen E_1 in Σ_1 nicht affin ist, geht durch jeden Punkt ein und nur ein Kreis, dem ein solcher in Σ_1 entspricht; dagegen enthalten zwei homologe affine ebene Systeme von Σ und Σ_1 keine entsprechenden Kreise. Jene Kreise in E bilden einen Kreisbüschel, dessen Potenzaxe in der Gegenebene von Σ liegt; sie haben keinen reellen Punkt mit einander gemein, und ihre Mittelpunkte liegen auf einer Geraden m, welche auf der Gegenaxe von E senkrecht steht. Jeder solcher Kreis von Σ wird von unendlich vielen analogen Kreisen in Punktpaaren geschnitten. Die Ebenen dieser Kreise in Σ schneiden die Gegenebenen von Σ in parallelen Geraden. Die Ebene E enthält zwei Punktkreise, denen solche in E_1 entsprechen. Diese Punktkreise sind die resp. Mittelpunkte der beiden homologen projectivisch gleichen Strahlenbüschelpaare von E und E_1. Jeder Punkt von Σ, der ausserhalb der Gegenebene von Σ liegt, ist Mittelpunkt von zwei und nur zwei Strahlenbüscheln, denen in Σ_1 projectivisch gleiche Strahlenbüschel entsprechen."

„Zwei collineare nicht affine Räume können dann und nur dann in perspectivische Lage gebracht werden, wenn in ihnen homologe Kugelflächen existiren."

Lassen sich die Räume Σ und Σ_1 in perspectivische Lage bringen, so ergiebt sich hinsichtlich der Lage homologer Kreise folgendes: „Jedem Kreise des Raumes Σ, dessen Ebene zu der Gegenebene von Σ_1 parallel läuft, entspricht ein Kreis in Σ_1. Durch jeden Punkt P von Σ können im Allgemeinen zwei Ebenen gelegt werden, so dass E ein Punktkreis desselben wird. In Σ ist ein Kugelbüschel K vorhanden, dem wieder ein Kugelbüschel K_2 in Σ_1 entspricht; auf ihnen liegen die sämmtlichen nicht affinen homologen Kreise der beiden Räume; zwei der Kugeln reduciren sich auf einen Punkt."

Zum Schlusse werden die analogen Sätze für affine Systeme aufgestellt. W. St.

P. H. Schoute. Over het projecteeren op oppervlakke
Nieuw Arch. VI. 19-48.

Die Frage nach der Zahl der Normalen einer algebraische Curve und einer algebraischen Oberfläche, welche durch ein gegebenen Punkt gehen, wird hier nochmals ausführlich be handelt.

Zunächst wird eine geschichtliche Uebersicht der Aufga gegeben und nachgewiesen, wie besonders Steiner durch Anwe dung der synthetischen Methode ein neues Licht auf den Geg stand geworfen und ihm grosse Ausbreitung und wichtige B deutung gegeben hat. Auch Herr R. Sturm hat sich mit d Aufgabe der Normalen beschäftigt und sie so allgemein w möglich gefasst. Darauf geht der Verfasser zu seinem eige lichen Gegenstande über und entwickelt nach und nach auf sy thetischem Wege verschiedene Sätze über das Projiciren ein Curve auf eine Oberfläche. Hierbei führt er einen neuen Begr ein, nämlich die Socia der Projection, und definirt dieselbe die Curve, welche mit der Projection den vollständigen Durc schnitt der Oberfläche mit der projicirenden Oberfläche bild Verschiedene Eigenschaften dieser Socia werden auseinand gesetzt und in Verbindung mit dem Projiciren von Punkten u Linien auf Oberflächen gebracht. G.

H. Schröter. Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Gebilde. Nach Jacob Steiner's Principien auf synthetischem Wege abgeleitet. Leipzig. Teubner

Dieses umfangreiche Werk kann als Fortsetzung der vo demselben Verfasser bearbeiteten (bereits in zweiter Auflag erschienenen) Steiner'schen Vorlesungen über Kegelschnitte be trachtet werden; in weiterer Verfolgung des von Steiner in de Vorrede zu der „systematischen Entwickelung" angekündigten aber nicht zur Verwirklichung gebrachten Planes, in einem folgen den (fünften) Theile auf Grund der von ihm aufgestellten Prin-

cipien eine ausführliche Behandlung der Curven und Flächen zweiten Grades zu liefern, hat Herr Schröter unter (alleiniger) Voraussetzung der in seinem früheren Werke für die ebenen Gebilde gewonnenen Resultate die einfachsten Erzeugnisse projectivischer Gebilde im Raume in sehr eingehender Weise nach Steiner'schen Principien behandelt. Hierzu stand ausser der in der „systematischen Entwickelung" gegebenen Grundlage für die Behandlung der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung und den von Herrn Geiser in Borchardt J. LXVIII. 191 ff. veröffentlichten Manuscripten von Seiten Steiner's nichts zu Gebote; dagegen hat der Herr Verfasser den durch andere Geometer wie Chasles, Seydewitz, Möbius, Cremona, von Staudt u. A. aufgesammelten Schatz von Resultaten über die genannten räumlichen Gebilde, ebenso wie von ihm selbst herrührende, theils anderweitig veröffentlichte, theils in seinen Universitätsvorlesungen vorgetragene Ergebnisse nach Steiner's Principien einheitlich und ihrem naturgemässen Zusammenhange nach geordnet, so dass das Buch namentlich auch für die Einführung in dies Gebiet geometrischer Forschung geeignet ist, umsomehr, als die Darstellung ganz elementar gehalten ist und an passender Stelle literarische Hinweise gegeben sind.

Das Werk ist in zwei (fast gleich starke) Abschnitte getheilt, von denen der eine der Behandlung der Elementargebilde erster Stufe, der andere der der Elementargebilde zweiter Stufe gewidmet ist. Demgemäss beginnt der erste Abschnitt mit der Untersuchung desjenigen Gebildes von einfacher Mächtigkeit, welches zu den beiden Grundgebilden der ebenen Geometrie, der geraden Punktreihe und dem Strahlbüschel, im Raume als neues hinzutritt, nämlich des Ebenenbüschels, behandelt die perspectivische Lage und dann die projectivische Beziehung zweier Ebenenbüschel im Allgemeinen und in coaxialer Lage, speciell die Ebeneninvolutionen und die Construction der Doppelelemente, im Anschluss hieran die besonderen Aufgaben: eine elliptische Ebeneninvolution in einer orthogonalen Strahleninvolution und einer gleichseitig hyperbolischen Strahleninvolution zu schneiden, deren Lösung es ermöglicht, projectivische Ebenen- und Strahlenbüschel in perspec-

tivische Lage zu bringen. Und nun wendet sich die Untersuchung den Erzeugnissen je zweier projectivischer beliebig' im Raum gelegener Grundgebilde erster Stufe zu, zunächst dem Kegel zweiten Grades als Erzeugnis sowohl von Punktreihe und Strahlenbüschel, als von zwei Ebenenbüscheln mit sich schneidenden Axen; seine perspectivische Beziehung zum Kegelschnitt und der charakteristische Unterschied von demselben in dem Verhalten zu den unendlich fernen Gebilden, sowie andererseits sein duales Verhältnis zu demselben, sofern der Kegelschnitt hier in der Geometrie des Raumes in der neuen Erzeugungsweise durch Strahlenbüschel und Ebenenbüschel auftritt, werden allseitig erörtert.

Gleichwie in der Theorie der Kegelschnitte das ebene Polarsystem von den reellen Gebilden zu erweiterten Begriffen führt, ist es dasselbe Princip der Polarität, das durchgehend vom Verfasser benutzt wird, um auch den räumlichen Erzeugnissen projectivischer Gebilde allgemeinere zu substituiren, welche auch die imaginären Fälle umfassen. An Stelle des Kegels tritt daher das Polarbündel, dessen Eigenschaften aus den Elementen der projectivischen Gebilde, welche den Kegel erzeugen, direct hergeleitet werden. Als einfachster Fall eines elliptischen Polarbündels wird das orthogonale hervorgehoben; hieran schliesst sich einerseits die Frage nach denjenigen Strahlen des allgemeinen Polarbündels, dessen Polarebenen zu ihnen rechtwinklig sind, welche auf die Hauptaxen und -ebenen, deren Realität nachgewiesen wird, führt, andererseits die Frage nach den orthogonalen Ebenen- und Strahleninvolutionen des Bündels, welche auf die Brennstrahlen und Kreisebenen führt. Sodann werden Eigenschaften des Kegels abgeleitet, welche den Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte analog sind, und als Analoga zu Kreis und gleichseitiger Hyperbel der orthogonale und der gleichseitige Kegel und der Zusammenhang des letzteren mit einer speciellen Art von Tetraeder einer eingehenden Betrachtung unterworfen.

Es folgt die Theorie des einfachen Hyperboloids. Der Herstellung des einfachen Hyperboloids aus drei Geraden, der Erörterung der hyperboloidischen Lage von vier Geraden und der

Eigenschaften des Mittelpunkts und Asymptoten-Kegels des Hyperboloids folgen lineare Constructionen desselben; die Behandlung der Berührungsebenen bereitet die Betrachtung des räumlichen Polarsystems vor, dessen Construction unmittelbar aus den Elementen der projectivischen Gebilde, welche das Hyperboloid erzeugen, nach einer Digression über das auf dem Hyperboloid liegende Sechseck, gegeben wird. Um das räumliche Polarsystem zur Vermittelung des Ueberganges von der geradlinigen zur nichtgeradlinigen und imaginären Fläche 2ter Ordnung zu verwenden, muss dann dasselbe aus einer gewissen Anzahl seiner eigenen Elemente (ohne Hinzuziehung von incidenten) construirt werden, was für eine Reihe verschiedener Fälle geschieht. Eine Untersuchung des Charakters des Polartetraeders führt dann umgekehrt zur Sonderung der Fälle, in denen ein Polarsystem eine reelle, eine geradlinige oder eine reelle nicht-geradlinige Kernfläche besitzt. Der letzte Fall erfordert eine neue Construction der Kernfläche, welche unabhängig davon ist, ob dieselbe gerade Linien enthält oder nicht; da diese Construction auf reciproke Gebilde zweiter Stufe führt, so wird die weitere Behandlung des Polarsystems auf den zweiten Abschnitt verschoben. Ebenso wie die Theorie des Kegels wird auch die des einfachen Hyperboloids mit der Betrachtung einiger wichtiger Specialfälle geschlossen, nämlich mit der des orthogonalen und des gleichseitigen Hyperboloids. An jenes knüpfen sich metrische Relationen, die mit dem Nachweis seiner Identität mit dem Orte sämmtlicher Punkte, deren Abstände von zwei windschiefen Geraden in einem constanten Verhältnis stehen, schliessen, an dieses seine Beziehungen zum allgemeinen Tetraeder. Endlich folgt noch das hyperbolische Paraboloid und als specieller Fall aller drei Arten von Hyperboloiden das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid.

Uebergehend zu den Erzeugnissen dreier projectivischer Gebilde erster Stufe wendet sich die Untersuchung der Raumcurve dritter Ordnung als Erzeugnis zunächst von Ebenenbüscheln zu, ihrem Zusammenhange mit dem einfachen Hyperboloid und dem Kegel und ihrer Construction aus einer Anzahl von Punkten und Sekanten. Die darauf folgende Betrachtung der Tangenten und

Schmiegungsebenen vermittelt den Nachweis ihrer Identität mit der Raumcurve dritter Classe als dem Erzeugnisse dreier projectivischer Punktreihen. Hieran schliesst sich die gemeinschaftliche Untersuchung der (eigentlichen und uneigentlichen) Sekanten und Schnittlinien zweier Schmiegungsebenen. Den Schluss des projectivischen Theils bildet das Nullsystem. Dann folgt die Classification nach dem Verhalten zur unendlich fernen Ebene in cubische Ellipse, Hyperbel, parabolische Hyperbel und Parabel, eine Untersuchung über den Character der Kegelschnitte, welche in einer Schmiegungsebene von den übrigen ausgeschnitten werden, und schliesslich die Behandlung von gewissen Geraden, die als Durchmesser der Raumcurven dritter Ordnung bezeichnet werden.

Der zweite Abschnitt beginnt mit der Einführung der vier Grundgebilde zweiter Stufe, des Strahlenbündels, des Ebenenbündels, des Punktfeldes und des Strahlenfeldes, mit der Feststellung der projectivischen (collinearen und reciproken) Beziehung ihrer Elemente auf einander und der Construction entsprechender Elemente vermittels projectivischer Gebilde erster Stufe. Um die Frage nach der Möglichkeit, zwei beliebige collineare Gebilde in perspectivische Lage zu bringen, zu entscheiden, werden die ausgezeichneten Elemente derselben ermittelt, zunächst indem von der perspectivischen Lage ausgegangen wird, und dann auch bei allgemeiner Lage wiedergefunden. Da sich die collinearen Gebilde zweiter Stufe im Gegensatz zu den projectivischen Gebilden erster Stufe im Allgemeinen nicht in involutorische Lage bringen lassen, so wird einerseits die Bedingung ermittelt, unter welcher dies möglich ist, und gezeigt, wie unter ihrer Annahme die involutorische Lage herzustellen ist, andererseits die Frage dahin erweitert, ob sich zwei collineare Gebilde stets so auf einander legen lassen, dass zwei entsprechende congruente Dreiecke (resp. Dreikante) in cyclischer Vertauschung auf einander fallen, was in der That der Fall ist, und diese als trilineare bezeichnete Lage näher untersucht. Dagegen zeigt die darauf folgende Betrachtung der ausgezeichneten Elemente zweier reciproker Gebilde, dass sich diese stets so vereinigen lassen, dass ihre entsprechenden Elemente ein ebenes Polarsystem, resp. ein Polarbündel con-

stituiren. Hieran reiht sich die Untersuchung zusammenliegender reciproker Gebilde und ihrer incidenten Elemente, und nun wendet sich die Untersuchung den Erzeugnissen der projectivischen Gebilde zu. Als Erzeugnis zweier collinearer Strahlenbündel oder Strahlenfelder tritt uns hier von Neuem die Raumcurve dritter Ordnung entgegen, und sie erfährt von diesem neuen Gesichtspunkte aus eine nochmalige und deshalb kürzere Behandlung, worauf sich die Betrachtung nunmehr ausschliesslich den Oberflächen zweiter Ordnung als Erzeugnis reciproker Bündel zuwendet. Aus dieser Erzeugungsweise wird eine Construction derselben durch neun gegebene Punkte, die mit der von Chasles gegebenen übereinstimmt, ausführlich hergeleitet, die übrigen bekannten derartigen Constructionen im Anschluss hieran kurz charakterisirt. Die dann folgende Behandlung der Berührungsebenen führt auf die Eintheilung der Flächen in geradlinige, in Kegel und in elliptische; für den letzten Fall macht die Construction der Berührungsebene in einem beliebigen Punkte der Fläche eingehende Erörterungen nöthig. Die Polareigenschaften der Fläche zweiter Ordnung, welche auch die Identität derselben mit der Fläche zweiter Classe, d. h. dem Erzeugnis zweier reciproker ebener Felder, erweisen, führen dann zu dem räumlichen Polarsystem zurück, dessen Untersuchung im ersten Abschnitte abgebrochen war. Nach einer eingehenden Classification der Fläche zweiter Ordnung und dem Hinweis auf gewisse Grenzübergänge, welche den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Gattungen herstellen, wendet sich die Untersuchung den metrischen Beziehungen zwischen den conjugirten Durchmessern der Mittelpunktsflächen und solchen für das räumliche Polarsystem überhaupt zu, auf welche wegen ihrer Reichhaltigkeit hier nicht eingegangen werden kann, sondern auf das Werk selbst verwiesen werden muss. Die Focaleigenschaften und in Verbindung mit ihnen die Kreisschnitte führen zu der Mac-Cullagh'schen, Jacobi'schen und Salmon'schen Erzeugungsart der Flächen zweiter Ordnung. Es folgt die Betrachtung der Schaaren confocaler Flächen zweiter Ordnung und im Anschluss hieran eine Ableitung der metrischen Eigenschaften der Krümmungs-

linien, welche Heilermann auf analytischem Wege gefunden hat. Zum Schlusse begnügt sich der Herr Verfasser mit einer Darstellung der allgemeinsten Eigenschaften des Flächenbüschels und des Flächenbündels zweiter Ordnung und der ihnen dual gegenüberstehenden Gebilde, da ihre genauere Erforschung den Umfang des Buches ungehörig vergrössert hätte.

Nicht unerwähnt bleibe, dass in dem Werk eine theilweise neue Bezeichnung der geometrischen Elemente und der mit ihnen vorzunehmenden Operationen consequent durchgeführt wird, welche die Anschauung in geeigneter Weise erleichtern. T.

J. Ph. Weinmeister. Die Flächen zweiten Grades nach elementar-synthetischer Methode bearbeitet. Pr. Leipzig.

Elementar-synthetisch nennt der Verfasser seine Methode deshalb, weil er erstens von dem Principe der Projectivität im Steiner'schen Sinne und zweitens von dem Princip der analytischen Geometrie keinen Gebrauch macht. Er geht davon aus, dass in der Ebene der Ort eines Punktes, welcher von einem gegebenen Punkte S und einer durch ihn gehenden Geraden G das constante Entfernungsverhältnis ε besitzt, aus zwei durch S gehenden Geraden besteht, wenn $\varepsilon > 1$ ist. Rotirt nun die Figur um G, so ergiebt sich ein Rotationskegel mit der Axe G und der Spitze S als Ort aller Punkte, welche von einem Punkte S und einer durch ihn gehenden Geraden G ein constantes Entfernungsverhältnis haben. Rotirt aber die Figur um das in ihrer Ebene liegende in S auf G errichtete Loth, so ergiebt sich der Rotationskegel als Ort aller Punkte, welche von einem Punkte S und einer durch S gehenden Ebene ein constantes Entfernungsverhältnis besitzen. Hieraus findet man nun zunächst, dass jeder Punkt der Schnittcurve des Rotationskegels mit einer beliebigen Ebene die Eigenschaft haben muss, von einem Punkte ausserhalb und einer Geraden innerhalb der Ebene ein constantes Entfernungsverhältnis zu besitzen. Weiterhin ergeben sich dann die Brennpunkts-Eigenschaften der Kegelschnitte.

Im zweiten Capitel leitet der Verfasser die wichtigsten Eigen-

schaften der Cylinderflächen zweiten Grades ab, indem er dieselben als die Erzeugnisse einer Geraden definirt, welche über die Peripherie eines Kegelschnitts gleitet und ihre Richtung stets beibehält.

Im dritten Capitel werden die Rotationsflächen zweiten Grades behandelt, und im Einklang mit der Methode des Verfassers in solche geschieden, welche die Hauptaxe des Kegelschnitts als Drehaxe haben, und solche, welche durch Rotation um die Nebenaxe des Kegelschnitts erzeugbar sind. Die ersteren erscheinen als Ort eines Punktes, welcher von einem festen Punkte und einer beliebig liegenden festen Ebene das constante Abstandsverhältnis ε haben. Die letzteren dagegen werden von allen solchen Punkten gebildet, die von einem festen Punkte und einer beliebig liegenden constanten Geraden das constante Abstandsverhältnis ε haben. Je nachdem $\varepsilon \lesseqgtr 1$ ist, erhält man im ersten Falle ein gestrecktes Rotations-Ellipsoid, ein Rotations-Paraboloid oder ein zweischaliges Rotations-Hyperboloid, im letzteren Falle dagegen ein abgeplattetes Rotations-Ellipsoid, einen parabolischen Cylinder oder ein einschaliges Rotations-Hyperboloid. Unter den zahlreichen Sätzen, welche sich dem Verfasser bei seiner auf der Constanz der Abstandsverhältnisse beruhenden Herleitung der Eigenschaften der Rotationsflächen mit Leichtigkeit ergeben, möge der folgende hier Platz finden. Der Ort aller Punkte im Raume, deren Tangenten an eine gegebene Kugel zu ihren Entfernungen von einer gegebenen Ebene im Verhältnis ε stehen, ist ein gestrecktes Rotationsellipsoid, ein Rotationsparaboloid oder ein Rotationshyperboloid, je nachdem $\varepsilon < 1$, $= 1$ oder > 1 ist.

Natürlich enthält die Arbeit keine neuen Resultate, sie macht auch keinen Anspruch darauf, neues zu bieten. Ihr Verdienst liegt nur darin, den streng synthetischen Weg gezeigt zu haben, wie man in einer Prima zu den Haupteigenschaften der Rotationsflächen gelangen kann, wenn man von der Constanz der Abstandsverhältnisse ausgehen und die durch die neuere Geometrie der Lage gelieferten Hülfsmittel vermeiden will. Natur-

gemäss kann aber der Verfasser so nur zu den Rotationsflächen zweiten Grades, nicht aber zu den allgemeinen Flächen zweiten Grades gelangen. Leider wird die Ungeduld des Lesers, auf dem beschrittenen Wege bis zu den allgemeinen Flächen zweiten Grades geführt zu werden, nicht befriedigt, „da die zweite Hälfte der Abhandlung wegen Raummangels erst nächstes Jahr erscheinen soll.“ Die zweite Hälfte der Abhandlung wird also vermuthlich, wie auch eine Stelle der Einleitung zu verrathen scheint, der Rechnung soviel Raum geben müssen, dass die Verwerthung derselben für den Unterricht in der Prima jedem Lehrer fraglich erscheinen muss, der seinen Schülern lieber wenig nach einheitlicher Methode als vieles nach buntscheckiger Methode giebt.

Scht.

G. Veronese. Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e di superficie di 2^0 ordine. Acc. R. d. L. (3) IV. 132-149.

Der Verfasser giebt in zwei Noten eine grosse Reihe von Sätzen über projectivische Gruppen, welche offen oder geschlossen sein können.

Betrachtet man zwei Flächen zweiter Ordnung und einen Punkt P, so kann man die Polarebene p von P bezüglich der ersten Fläche aufsuchen, den Pol P_1 dieser Ebene p bezüglich der zweiten Fläche, die Polarebene p_1 von P_1 in Bezug auf die erste Fläche, von p_1 den Pol P_2 für die zweite etc. Die Punkte $P, P_1, P_2, P_3 \dots$ und die Ebenen $p, p_1, p_2 \dots$ bilden projectivische Gruppen (P) und (p).

Ist P_n identisch mit P, so hat man eine cyklische Gruppe.

Es wird nun die Frage beantwortet, welche gegenseitige Lage die beiden Flächen haben müssen, damit die Punkte (P) einen Cyklus bilden. Insbesondere werden die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ betrachtet.

Sämmtliche Sätze sind ohne Beweis mitgetheilt; der Verfasser verspricht bei einer andern Gelegenheit diese Arbeit durch

die Beweise zu vervollständigen, und es soll dann auch hier näher auf sie eingegangen werden. W. St.

G. Königs. Propriété des courbes ou des surfaces du second ordre homofocales. Nouv. Ann. (2) XIX. 74-76.

Drei Kegelschnitte *A*, *B*, *C* sind verbunden durch die Bedingung, dass die zwei ersten reciprok polar in Bezug auf den dritten sind. Sind *N* und *Δ* ein Punkt der Ebene und seine Polare in Bezug auf *C*, so ergiebt sich folgender Satz: „Die Tangenten von dem Punkte *N* an *A*, die Kegelschnitte *B* und *C* schneiden auf *Δ* drei Punktepaare einer Involution aus."

Und für den Fall, dass *A* und *C* confocal sind: „Die Polare *Δ* eines Punktes *N* in Bezug auf einen Kegelschnitt *C* schneide denselben in den Punkten *Q* und *Q'*, sie schneide ferner in *M* und *M'* einen Kegelschnitt *B*, der in Bezug auf *C* die reciproke Polare eines mit *C* confocalen Kegelschnittes ist, dann sind die Winkel *MNQ* und *M'N'Q'* einander gleich."

Die Ausdehnung dieser Sätze auf den Raum ergiebt: „Sind *A*, *B*, *C* drei Flächen zweiten Grades der Art, dass die beiden ersten reciproke Polaren in Bezug auf die dritte sind, ferner *N* ein beliebiger Punkt; dann schneiden der Kegel, dessen Spitze *N* ist und der *A* umschrieben ist, und die Flächen *B* und *C* auf der Ebene der Polarebene von *N* in Bezug auf *C* drei Kegelschnitte aus, welche ein gemeinsames Polardreieck haben."

„Die Polarebene *Δ* eines Punktes *N* in Bezug auf eine Fläche *C* schneide *C* in dem Kegelschnitt *Q*, *Δ* schneide ferner in dem Kegelschnitte *M* die in Bezug auf *C* reciproke Polarfläche *B* einer mit *C* confocalen Fläche; dann haben die Kegel mit der gemeinsamen Spitze *N* und den Leitcurven *Q* resp. *M* dieselben Axen."

W. St.

E. Hunyady. Beitrag zur Theorie der Flächen zweiten Grades. Borchardt J. IXC. 47-70.

Insofern der Pascal'sche Satz die Lage-Abhängigkeit von

sechs auf einem Kegelschnitt liegenden Punkten in einer neuen geometrischen Form ausspricht, können als räumliche Analoga des Pascal'schen Satzes die beiden folgenden Sätze gelten, welche Paul Serret in seiner „Géométrie de direction“, p. 444, art. 388 abgeleitet hat. Zehn Punkte liegen auf einer und derselben Fläche zweiten Grades, wenn sich in gewisser Weise aus ihren Verbindungsebenen zehn Mal zwei Ebenen zusammenstellen lassen, welche in Bezug auf eine und dieselbe Fläche zweiten Grades conjugirt sind. Man muss nämlich die zehn Punkte irgendwie zu Ecken zweier räumlicher Fünfecke machen und dann mit jeder Winkelebene die Ebenen derjenigen beiden Winkel zusammenstellen, deren Scheitel nicht auf ihr liegen. Ebenso werden auch immer in Bezug auf eine und dieselbe Fläche zweiten Grades jedes Tetraeder und jedes Oktaeder conjugirt, deren sämmtliche zehn Ecken auf einer Fläche zweiten Grades liegen. Conjugirt heisst hier ein Tetraeder einer F_2, wenn je zwei seiner Ecken conjugirte Punkte und je zwei Ebenen conjugirte Polarebenen in Bezug auf F_2 sind. Conjugirt heisst ein Oktaeder einer F_2, wenn dessen gegenüberliegende Seitenebenen conjugirte Ebenen in Bezug auf F_2 sind.

Im Anschluss an diese Serret'schen Sätze stellt Herr Hunyady durch Einführung geschickter Abkürzungen für Determinanten die verschiedenen Formen der algebraischen Bedingungsgleichung dafür auf, dass zehn Punkte auf einer F_2 liegen, und studirt dann den gegenseitigen Zusammenhang dieser Bedingungsgleichungen.

Scht.

R. Heger. Zur Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten. Schlömilch Z. XXV. 98-100.

Die von Chasles in den Comptes rendus des Jahres 1855 mitgetheilte für alle Fälle ausreichende Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten wird hier linear erledigt, während bei Chasles auch quadratische Constructionen erforderlich waren.

Scht.

L. F. Marrecas Ferreira. Solution d'une question de géométrie. Teixeira J. II. (Portugiesisch).

Enthält einen Beweis mit Hülfe der descriptiven Geometrie für den folgenden Satz: „Die geometrischen Orte der Punkte im Raum, deren Entfernungen von zwei festen Geraden, die nicht in derselben Ebene liegen, ein constantes Verhältnis haben, sind zwei Hyperboloide."

Tx. (O.)

F. Schur. Ueber die gemeinsamen Tangenten zweier Flächen zweiten Grades, welche ein windschiefes Viereck gemein haben. Schlömilch Z. XXV. 414-416.

Für ein Strahlensystem zweiter Ordnung und Classe, dessen Brennfläche in zwei Flächen zweiten Grades zerfällt, werden einige für das allgemeine Strahlensystem bekannte Sätze direct nachgewiesen.

Jede in einer solchen Fläche zweiten Grades R enthaltene Gerade, welche eine gemeinsame Tangente zweier Flächen zweiten Grades F und F' enthält, die ein windschiefes Vierseit gemein haben, und welche ferner F und F' in zwei gegenüberliegenden Ecken dieses Vierseits berührt, ist eine gemeinsame Tangente von F und F'. Zwei solcher Flächen R und R', welche durch eine gemeinsame Tangente von F und F' gelegt werden und F und F' in verschiedenen Paaren gegenüberliegender Ecken des genannten Vierseits berühren, schneiden sich in einem Vierseit.

Hieraus ergiebt sich der Satz: „Haben zwei Flächen zweiten Grades F und F' ein windschiefes Vierseit gemein, so ordnen sich die gemeinsamen Tangenten derselben zu zweifach unendlich vielen windschiefen Vierseiten, von denen je zwei gegenüberliegende Ecken mit den zugehörigen Seitenflächen Punkte mit den zugehörigen Tangentialebenen von F resp. F' sind."

W. St.

H. G. Zeuthen. Konstruktion af det ottende Skjäringspunkt mellem de Flader af anden Orden, som gaa gjennem syv givne Punkter. Kjbhvn. Forh. 1880.

Im 18ten Bande der „Mathematischen Annalen“ hat der Verfasser u. A. eine neue Construction des achten Schnittpunktes der Flächen zweiter Ordnung, welche durch sieben gegebene Punkte hindurchgehen, dargestellt. Diese Construction nebst einer Modification derselben wird hier auf einfachere und directere Weise hergeleitet vermittels des folgenden Hülfsatzes: „Wenn die Schnittpunkte 2, 3, 5, 6, 7 gegeben sind, während 1 und 4 auf gegebenen Geraden a und c durch 2 und 3 liegen, so wird die Ebene 148 durch einen festen Punkt F der Ebene 567 hindurchgehen.“ Dieser Satz, für welchen sowohl ein zahlengeometrischer als ein synthetischer Beweis geliefert wird, dient nicht nur zum Beweise der Construction Zeuthen's, sondern kann auch leicht zur Herleitung der von Paul Serret angegebenen Construction verwendet werden. Gm.

G. Bauer. Ueber eine Eigenschaft des geradlinigen Hyperboloids. Münch. Ber. 1880.

Im Borchardt J. LXXXVI. 297-317 (s. F. d. M. XI. 1879. 434-437) leitet Herr H. Vogt von einem Hyperboloid, welches durch drei auf einander senkrechte windschiefe Gerade definirt ist, den Satz her: „Drei Normalstrahlen, aus einer Regelschaar entnommen, und die drei zu ihnen parallelen Strahlen der anderen Regelschaar bestimmen ein rechtwinkliges Parallelepipedon von constantem Volumen.“ Herr G. Bauer lässt durch eine affine Transformation dieses Hyperboloids erkennen, dass je drei Gerade einer Regelschaar auf einem beliebigen Hyperboloide und die drei zu ihnen parallelen der anderen Schaar stets ein Parallelepipedon von constantem Volumen bestimmen, und giebt für diesen Satz eine zweckmässige Herleitung aus den analytischen Formen der betreffenden Geraden. Schn.

P. Cassani. La quadrica dei dodici punti e le sue relazioni con altri elementi geometrici. Atti d. Ist. Ven. (5) V. 263-274.

Der Inhalt dieser Schrift ist im Wesentlichen derselbe, wie der Inhalt derjenigen, über welche im 11ten Bande des Jahrbuchs p. 452 referirt worden ist. Mz.

H. Drasch. Zur Construction der Schmiegungsebene der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiter Ordnung. Wien. Ber. LXXXI. 254.

Durch eine Tangente t einer Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades und die Curve lässt sich stets eine reelle Regelschaar zweiten Grades legen. Die Gerade der Schaar, welche durch den Berührungspunkt der Tangente t geht, bestimmt mit letzterer die Schmiegungsebene der Curve in diesem Punkte. Der Ebenenbüschel t besteht aus Tangentialebenen der Regelfläche und ist projectivisch auf die Punktreihe t bezogen, wenn jeder Ebene ihr Berührungspunkt zugewiesen wird. Kennt man desshalb für drei Ebenen des Büschels die zugehörigen Berührungspunkte mit der Regelfläche, so kann man auch für den Berührungspunkt von t mit der Curve die Schmiegungsebene bestimmen.

Auf Grund dieser Betrachtung wird die Construction der Schmiegungsebene in einem Punkte der Durchdringungscurve zweier Kegel mit einem System gemeinschaftlicher Kreisschnittebenen durchgeführt.

Die reciproke Aufgabe, die Rückkehrkante einer zweien Flächen zweiten Grades umschriebenen abwickelbaren Fläche zu finden, ist identisch mit der Aufgabe: Das Projectionscentrum zu finden, welches den einen von zwei in verschiedenen Ebenen beliebig gegebenen Kegelschnitten so auf die Ebene des andern projicirt, dass diese Projection den letzteren in einem bestimmten Punkte osculirt. W. St.

H. Drasch. Tangentenconstruction für die Berührungslinie zwischen einer windschiefen Fläche und ihrer Leitfläche. Wien. Ber. LXXXII. 1140.

Sind F_1, F_2, F_3 drei beliebige Flächen, welche von den Erzeugenden einer windschiefen Fläche Φ berührt werden, so soll die Aufgabe gelöst werden, die Punkte der Raumcurve, längs welcher F_2 von Φ berührt wird, nebst den zugehörigen Tangenten zu construiren. Wählt man in den Tangentialebenen der zugehörigen Punkte auf F_1 und F_3 an diesen Flächen beliebige durch diese Punkte gehende Gerade G_1 und G_3 und betrachtet man G_1, G_3 und F_2 als Leitelemente einer neuen windschiefen Fläche, so hat diese mit der ursprünglichen Regelfläche zwei unendlich nahe Erzeugende gemein. Die Berührungslinien beider Flächen mit F_2 berühren einander in den Punkten der Erzeugenden. Ist F_2 nicht von der zweiten Ordnung, so wird zur Construction eine F_2 osculirende Fläche zweiten Grades verwendet. Es werden nun folgende Sätze bewiesen:

„Die Berührungslinie zwischen einer durch zwei Gerade und eine Fläche zweiter Ordnung gegebenen windschiefen Fläche und ihrer Leitfläche ist identisch mit der Durchdringungscurve dieser Leitfläche mit einem einfachen Hyperboloide, dessen Erzeugende des einen Systems eine der beiden Leitgeraden und die Polare der anderen Leitgeraden bezüglich der Leitfläche sind; diese Berührungslinie ist demnach eine Curve vierter Ordnung.“

„Zwei Tangenten einer Fläche zweiter Ordnung bestimmen als Leitelemente einer windschiefen Fläche zwei einfache Hyperboloide; diese sind immer reell, wenn die Leitfläche imaginäre geradlinige Erzeugende hat; sie sind imaginär oder reell, wenn die Leitfläche reelle geradlinige Erzeugende hat, je nachdem die Leittangenten durch die Leitfläche getrennt sind oder nicht“.

Auf Grund des ersten Satzes wird in einem Beispiele die Tangentenconstruction der Berührungslinie durchgeführt. F_2 ist eine Kugel, die eine Leitgerade ist beliebig, die andere befindet sich im Unendlichen. W. St.

Peschka. Normalenflächen längs ebener Flächenschnitte. Wien. Ber. LXXXI.

Der Verfasser lässt seiner Abhandlung über Normalenflächen längs beliebiger Curven an beliebigen Flächen (cf. F. d. M. XII. 1880. p. 526) eine zweite Abhandlung folgen, welche die Theorien der projectiven Geometrie dazu verwendet, um die besonderen Eigenschaften derjenigen Normalenflächen aufzufinden, welche den ebenen Schnitten von Flächen zweiter Ordnung zugehören. Eine solche Normalenfläche ist immer vom vierten Grade und besitzt eine Doppelcurve dritter Ordnung, sowie vier Torsallinien. Für ihre Strictionscurve findet der Verfasser den Satz, dass dieselbe zugleich die Berührungscurve der Normalenfläche mit demjenigen ihr umschriebenen Kegel ist, dessen Scheitel im Pole des die Normalenfläche erzeugenden ebenen Schnittes liegt. Von den ∞^1 Bitangentialebenen, d. h. denjenigen Ebenen, in welchen zwei Erzeugende liegen, wird nachgewiesen, dass jede derselben die Normalenfläche ausser in den zwei Erzeugenden noch in einem Kegelschnitt schneidet, welcher dieselben in den zugehörigen Berührungspunkten und ausserdem in zwei Punkten der Doppelcurve trifft.

Besondere Betrachtungen stellt der Verfasser dann noch für diejenigen Normalenflächen an, welche ebenen Schnitten zugehören, die erstens zu einer der drei Axen-Ebenen senkrecht stehen, zweitens zu einer solchen Ebene parallel sind. Der Schluss der Abhandlung ist der Normalenfläche eines Rotationscylinders längs eines schiefen Schnittes gewidmet. In diesem Falle ergiebt sich für die Normalenfläche ein Kegelschnittconoid, dessen Richtebene die zu den Cylinder-Erzeugenden senkrechte Ebene, und dessen Leitgerade die Cylinderaxe ist. Die Doppelcurve dritter Ordnung besteht aus der genannten Leitgeraden, der unendlich fernen Leitgeraden und der kleinen Axe des erzeugenden Kegelschnitts. Scht.

Ed. Weyr. Construction der Osculationshyperboloide windschiefer Flächen. Wien. Ber. LXXXI.

Längs jeder Erzeugenden einer Regelfläche giebt es ein osculirendes Hyperboloid, d. h. ein solches, welches durch die Erzeugende und auch durch die beiden ihr unendlich nahen Erzeugenden hindurchgeht. Jedes solches Hyperboloid umfasst also die Gesammtheit aller Strahlen, welche drei consecutive Erzeugende zugleich schneiden. Der Verfasser giebt Constructionen eines solchen Osculationshyperboloides für den Fall, dass die Regelfläche durch drei Leitcurven gegeben ist. Er betrachtet also gewissermassen dreimal drei unendlich nahe Punkte, durch welche das gesuchte Hyperboloid gehen soll. Die erste Construction basirt auf der Bestimmung des zwei Involutionen gemeinsamen Punktepaares, ist also quadratisch. Die zweite Construction ist jedoch durchaus linear.

Schliesslich behandelt der Verfasser noch den Fall, dass die Regelfläche der Ort derjenigen Strahlen ist, welche zwei Curven schneiden und in einer der ∞^1 Schmiegungsebenen einer dritten Curve liegen. Scht.

W. Jeřábek. Ueber den geometrischen Ort des Centrums der Collineation zwischen einer Nichtregelfläche zweiter Ordnung und einem System von Kugelflächen. Grunert Arch. LXV. 161-171.

Es wird auf elementarem Wege der bekannte Satz bewiesen, dass die Focalcurve einer Fläche zweiter Ordnung der Ort derjenigen Punkte ist, deren Tangentialkegel an die Fläche Rotationskegel sind. Jeder Punkt derjenigen Focalcurve, welche in der Ebene des auf die Kreisschnitte senkrechten Hauptschnittes liegt, kann als Centrum, eine beliebige Kreisschnittebene als Collineationsebene einer collinearen Beziehung benutzt werden, welche die Fläche in eine hierdurch bestimmte Kugel überführt. Die hierzu nothwendigen Constructionen sind ausgeführt.

W. St.

Kröber. Ueber die Aehnlichkeitspunkte der Kugeln einer Dupin'schen Kugelschaar. Schlömilch Z. XXV. 279-280.

Es werden folgende Sätze, von welchen der erste sich schon bei Steiner findet, bewiesen: „Die äusseren Aehnlichkeitspunkte je zweier Kreise, welche zwei gegebene, sich einschliessende Kreise so berühren, dass der innere Kreis ausgeschlossen wird, liegen auf der Potenzaxe der beiden festen Kreise.“

„Die äusseren Aehnlichkeitspunkte je zweier Erzeugungskugeln der ersten Art einer Dupin'schen Ringcyclide liegen auf der äusseren Potenzaxe derselben und die inneren Aehnlichkeitspunkte erzeugen eine Schaar von Ellipsen, welche in der inneren Symmetrieebene der Cyclide liegen, alle durch einen Punkt gehen und die Ellipse der Kugelmittelpunkte in je einem Punkte berühren.“ W. St.

C. LE PAIGE. Bemerkungen über cubische Involutionen. Wien. Ber. LXXXI.

Es wird durch Aufstellung der Gleichung der vier Verzweigungspunkte der Weyr'sche Satz (cf. die Note des Herrn Weyr zu Herrn Le Paige's Abhandl. über die singulären Elemente cubischer Involutionen; hier im Jahrbuche besprochen auf p. 484) bewiesen, dass es immer zwei cubische Involutionen mit gemeinsamen Doppelpunkten giebt. Sollen die cubischen Involutionen auf einer cubischen Raumcurve liegen, und sind die vier Doppelpunkte als vier Punkte der Raumcurve gegeben, so erhält man die beiden cubischen Involutionen dadurch, dass man in den gegebenen vier Punkten die vier Tangenten zieht, die beiden Strahlen g und h zieht, deren jeder diese vier Tangenten schneidet, und die beiden einstufigen Systeme von Punkttripeln aufsucht, welche auf der Raumcurve durch die beiden Ebenenbüschel ausgeschnitten werden, deren Träger g und h sind. Die zweimal vier Verzweigungspunkte sind dann einfache Schnittpunkte der durch g und h an die Raumcurve gelegten Tangentialebenen.

Dem Beweise des Weyr'schen Satzes folgen noch andere algebraische Untersuchungen über die cubischen Involutionen,

welche den Verfasser in einfachster Art zur geometrischen Darstellung vieler Invarianten von algebraischen Formen führen.

Scht.

R. O. Consentius. Der cubische Kreis. [Schlömilch Z. XXV. 119-122.

Die cubische Ellipse ist eine Raumcurve dritter Ordnung mit nur einem unendlich fernen Punkte und liegt auf einem elliptischen Cylinder. Ihre Projection auf die zur Cylinderrichtung senkrechte Ebene ist eine Ellipse. Der Verfasser stellt die Frage auf: „Unter welchen Umständen ist diese Ellipse ein Kreis?" und findet eine Raumcurve dritter Ordnung mit einem reellen unendlich fernen Punkte nebst zwei unendlich fernen Kreispunkten in der Ebene, welche senkrecht zu den durch den ersten Punkt gehenden Geraden steht, mit der verlangten Eigenschaft. Man sieht leicht ein, dass diese Raumcurve nicht die einzige ist, welche der gestellten Bedingung genügt.

W. St.

C. Pelz. Ueber die Focalcurven des Quetelet. Wien. Ber. LXXXII. 1207.

Dieser Aufsatz befasst sich mit dem synthetischen Beweise einiger von Chasles in seiner Geschichte der Geometrie ohne Beweis angeführten Sätze über die Brennpunkte solcher auf einem Kegel befindlichen Schnitte, deren Ebenen durch eine zu einer Hauptebene senkrecht stehenden Tangente A des Kegels gelegt werden.

Es wird dargethan, dass der Ort der Brennpunkte eine Curve dritter Ordnung C_3 ist, welche in der betreffenden Hauptebene liegt, durch die Spitze des Kegels geht und den Punkt a enthält, in welchem A den Kegel berührt; die Curve geht ferner durch die unendlich fernen Kreispunkte, die Tangenten in ihnen treffen sich in a, dem Mittelpunkte; der nicht durch a gehende der Hauptebene angehörende Kegelstrahl ist die reelle Asymptote.

Drei Fälle sind zu unterscheiden:

1) Die durch A gehenden Kreisschnitte des Kegels sind

reell. Die Ebenen derselben treffen die Hauptebene in zwei Strahlen, welche C_3 in zwei Punkten m_1 und m_2 berühren. Die Curve C_3 erschöpft nicht alle Brennpunkte der durch a gehenden Schnitte. Es kommt noch als Ort derselben ein Kreis hinzu, dessen Durchmesser $m_1\, m_2$ ist und dessen Ebene senkrecht zur Hauptebene steht.

2) Die durch A gehenden Kreisschnitte sind imaginär. Dann besitzt C_3 ein den Punkt a enthaltendes Oval; C_3 erschöpft alle gesuchten Brennpunkte.

3) Die durch A gehenden Kreisschnitte fallen zusammen. Der Kegel ist gerade. C_3 besitzt in dem Mittelpunkte des durch a gehenden Kreisschnittes einen Doppelpunkt, dessen Tangenten senkrecht auf einander stehen.

Zum Schlusse wird eine Tangentenconstruction für die Focalcurven angegeben. W. St.

Caron. Sur l'épure des 27 droites d'une surface du troisième degré, dans le cas où ces droites sont réelles. Bull. S. M. F. VIII. 73-74.

Der Verfasser hatte der mathematischen Gesellschaft ein Gyps-Modell einer Fläche dritter Ordnung mit ihren 27 Geraden vorgezeigt und giebt hier, ohne Schlaefli zu citiren, eine Auseinandersetzung der auf der Bevorzugung eines Doppelsechsecks beruhenden Schlaefli'schen Bezeichnung und der dadurch erleichterten Angabe der zehn Geraden, welche jede der 27 Geraden schneiden. Der Verfasser ist für die Construction des Netzes von einer verticalen Geraden a_1 und den fünf a_1 schneidenden Geraden b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 ausgegangen. Die ∞^1 Secanten von je drei dieser fünf Geraden bestimmen ein Hyperboloid, welches ausser a_1 noch eine zweite verticale Erzeugende besitzt, durch deren Spur auf einer Horizontalebene nun die horizontale Projection jeder Geraden gehen muss, die alle drei schneidet. So entstehen auf der Horizontalebene zehn Spurpunkte, von denen immer vier auf der Projection jeder der 5 Geraden a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 liegen. Auf ähnliche Weise wird die Gerade b_1 bestimmt, und

darauf hat die Auffindung der im Doppelsechseck nicht enthaltenen 15 Geraden keine Schwierigkeit mehr. Scht.

H. J. J. SMITH. On skew surfaces of the third order. Rep. Brit. Ass. 1880.

Csy.

A. MILINOWSKI. Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung. Borchardt J IXC. 136-151.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. A. p. 480.

EM. WEYR. Notiz über harmonische Mittelpunkte eines Quadrupels. Wien. Ber. LXXXI. 1218.

Der Verfasser verlegt das zu betrachtende Punktsystem auf eine rationale Raumcurve vierter Ordnung.

„Es seien a_1, a_2, a_3, a_4 die Berührungspunkte einer solchen Curve mit den vier stationären Schmiegungsebenen; durch einen beliebigen Punkt y der Curve lassen sich drei Schmiegungsebenen legen, deren Berührungspunkte x_1, x_2, x_3 die harmonischen Mittelpunkte dritten Grades von y bezüglich des Quadrupels a_1, a_2, a_3, a_4 darstellen".

Die Tripel x_1, x_2, x_3 bilden eine cubische Involution, deren Doppelpunkte bekanntlich die Berührungspunkte der Curven mit den vier sie schneidenden Tangenten sind. Diese Involution ist projectivisch mit der einfachen Reihe y, und a_1, a_2, a_3, a_4 sind die der Involution und der Reihe gemeinsamen Punkte. Die vier Punkte y, x_1, x_2, x_3 bilden ein Quadrupel der biquadratischen Punktinvolution dritter Stufe, welche durch die vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_4, wenn man jeden als vierfaches Element auffasst, bestimmt erscheint. W. St.

C. JUEL. En geometrisk Fremstilling af Hovedegenskaber ved Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit. Zeuthen Tidsskr. (4) IV. 81-108, 113-121.

Der Verfasser giebt in dieser Abhandlung eine synthetische Darstellung der wichtigsten Eigenschaften der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt. Eine solche Fläche wird definirt als der Ort der Schnittcurven der einander entsprechenden Flächen in zwei projectiven Büscheln von Flächen der zweiten Ordnung (α) und (β), welche alle einen Kegelschnitt ω gemeinsam haben. Diese Definition giebt sogleich zur Betrachtung der verschiedenen auf der Fläche liegenden Kegelschnittsysteme Anlass, ebenso zur Untersuchung ihrer Schnittcurve mit einer willkürlichen Fläche der zweiten Ordnung durch ω. Hier treten denn die fünf Kummer'schen Kegel auf — sie ergeben sich als Enveloppeflächen der Ebene derjenigen Kegelschnitte, in welchen sich (α) und (β) ausserhalb ω schneiden. Hiernach folgt eine Erörterung der 16 Geraden, der mehrfach berührenden Ebenen, sowie der auf der Fläche liegenden Raumcurven der dritten und vierten Ordnung. Ferner wird gezeigt, dass die F^4 von Kegelschnittflächen berührt werden kann längs derjenigen Raumcurven der vierten Ordnung, welche durch die Rückkehrpunkte der Fläche gehen. Diese „einbeschriebenen" Flächen haben verschiedene besondere Eigenschaften. Berührt z. B. eine F^2 eine solche Fläche längs eines ganzen Kegelschnittes, so schneidet sie F^4 in zwei Raumcurven der vierten Ordnung. Eine genauere Betrachtung der einbeschriebenen Flächen führt wieder auf die Kummer'schen Kegel.

Der letzte Theil der Abhandlung enthält die Bestimmung einer Reihe von geometrischen Oertern, welche mit der F^4 in enger Verbindung stehen. Mehrere der hier gewonnenen Resultate sind neu und recht hübsch. Es giebt fünf Systeme von F^2 durch ω, welche die F^4 in je zwei Punkten berühren. Der Ort der Pole, welche der Ebene von ω in Bezug auf solche doppeltberührende F^2 in einem einzelnen Systeme entsprechen, ist eine F^2. Nimmt man die Pole nur in Bezug auf die Flächen durch einen gegebenen Punkt, so erhält man nur einen einzigen Kegelschnitt.

Berühren die Flächen eine feste Ebene, so erhält man eine Raumcurve der vierten Ordnung und erster Art. Dasselbe ist

der Fall, wenn die benutzten Flächen eine feste Gerade berühren. Hieraus ergeben sich schliesslich verschiedene Anzahlbestimmungen. So giebt es von Kegelschnittflächen, welche F^4 in ω und zwei anderen Kegelschnitten schneiden und ausserdem

1) durch zwei gegebene Punkte gehen: 10,

2) durch einen Punkt gehen und eine Gerade oder Ebene berühren: 20,

3) zwei Gerade oder Ebenen berühren: 40,

4) eine Gerade und eine Ebene berühren: 40.

Von Kegelschnittkegeln, welche F^4 in ω schneiden, in zwei Punkten berühren und ausserdem

1) durch einen gegebenen Punkt gehen, giebt es 20,

2) eine gegebene Ebene oder Gerade berühren: 40.

Gm.

A. Ameseder. Die Regelfläche vierten Grades mit zwei Doppelgeraden. Grunert Arch. LXV. 73-110.

A. Ameseder. Ueber rationale Regelflächen vierten Grades. Grunert Arch. LXV. 239-287.

Diese beiden umfangreichen Studien über Regelflächen vierter Ordnung mit zwei Doppelgeraden betreffen eines Theils solche Sätze, welche für Regelflächen überhaupt gültig sind, anderen Theils solche, welche durch Anwendung bekannter Methoden leicht gewonnen werden können. Neue Gesichtspunkte und Methoden sind in ihnen nicht enthalten. V.

A. Ameseder. Beitrag zur Theorie der Regelflächen vierten Grades mit Doppelkegelschnitt. Wien. Ber. 1880.

A. Ameseder. Ueber Regelflächen vierten Grades, deren Erzeugende sich zu Quadrupeln gruppiren. Wien. Ber. 1880.

In dem ersten dieser Aufsätze wird die Regelfläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt als Durchschnitt eines Ebenen

üschels mit einer projectiven Tangentenebeneninvolution auf inem Kegel zweiten Grades construirt und aus dieser Erzeugung hre Haupteigenschaften abgeleitet. In dem besonderen Falle, lass die Ebene der Involution und die durch die Axe des Ebenenüschels und die Kegelspitze gelegte Ebene in Bezug auf den Kegel conjugirt sind, entsteht eine Fläche, deren Erzeugende ich zu Vierseiten gruppiren, deren gegenüberliegende Ecken sich uf dem Doppelkegelschnitt und der Doppelgeraden befinden: Mit der Untersuchung dieser Fläche beschäftigt sich die zweite Abhandlung. V.

LAQUIÈRE. Théorie géométrique des courbes anallagmatiques, sections plans de la cyclide. N. C. M. VI. 352-354, 402-406, 433-438.

E. CATALAN. Sur la cyclide. N. C. M. VI. 439-446.

Zusammenfassende Darstellung der bekannten Eigenschaften ler Fläche, wobei sich der Verfasser so viel als möglich dem Gange von Dupin anschliesst. Mn. (O.)

P. H. SCHOUTE. Sur une transformation géométrique d'un problème de la théorie des enveloppes dites „Courbes de sureté" et sa généralisation. Versl. en Mededeel. XV. 435-444.

Collignon hat gefunden, dass die Ellipse die Einhüllungscurve ist von verschiedenen elliptischen Bahnen um einen festen Punkt nach dem Newton'schen Gesetz der Anziehung durch einen Punkt, dem eine Geschwindigkeit von gegebener Grösse, aber verschiedener Richtung ertheilt ist. Im Zusammenhang hiermit untersucht der Verfasser im ersten Theile seiner Abhandlung, welches die gemeinschaftliche Einhüllende der Ellipsen ist, welche durchlaufen werden, wenn die Anziehung proportional dem Abstand ist; auf geometrischem Wege findet er auch hier eine Ellipse. Dieselbe geht in eine Parabel über, wenn die Anziehung

nach Grösse und Richtung constant angenommen wird, und in eine Hyperbel, wenn die Kraft abstossend wirkt.

Zurückkommend auf sein zuerst erhaltenes Resultat giebt der Verfasser im zweiten Theile demselben eine projectivische Bedeutung und leitet hieraus die Eigenschaft ab, dass, wenn zwei beliebige Curven im Raum nach einander, die eine aus einem Punkte der anderen, als Mittelpunkt auf dieselbe Ebene projicirt werden, die Projectionen der einen und die der anderen Curve die nämliche Einhüllungscurve haben. Hierauf beruht eine Transformationsmethode, welche auf Curven vom zweiten und dritten Grade, die in verschiedenen Ebenen liegen, angewendet wird, aber keine Vortheile im Vergleich zu anderen bekannten Methoden bietet. G.

G. Bruno. Nota sopra i tetraedri trirettangoli i cui spigoli sono tutti normali ad una quadrica data. Atti di Torino. XV. 617-631.

Der Ort der Ecken solcher Tetraeder ist eine Raumcurve 16ter Ordnung. Ausgehend von synthetischen Betrachtungen gelangt der Verfasser auf einfache Weise zu den nämlichen Gleichungen der fraglichen Curve, wie sie Herr Painvin, Nouv. Ann. X. 337f. fand. Schliesslich werden die Ausartungen der Curve für specielle Flächen zweiten Grades untersucht. Rg.

C. Abzählende Geometrie.

L. Saltel. Conférences de géométrie supérieure. Mém. de Bord. (2) IV. 1-30.

Von dieser grösseren Reihe von Mittheilungen sind die Titel die folgenden:

1) Betrachtungen über die schönen Arbeiten der Herren de Jonquières und Chasles, betreffend die Systeme von Curven und Flächen.

2) Methode zur Hebung der Unbestimmtheit, welche aus er unendlichen Anzahl gemeinsamer Lösungen gewisser Systeme on Gleichungen hervorgeht.

3) Ueber die Formeln von Glaisher und Cayley.

4) Bestimmung aller regelmässigen Singularitäten eines arch algebraische Gleichungen definirten Ortes.

5) Ueber ein mathematisches Paradoxon.

6) Ueber verschiedene Merkmale des Zerfallens.

7) Ueber die allgemeine Theorie der Curven und Flächen, ufgefasst als Enveloppen anderer Curven und Flächen.

8) Ueber die allgemeine Theorie von k Punktreihen auf inem geraden Träger.

9) Ueber die Arbeiten von Poncelet und Chasles über die 'rincipe der Projectivität und Dualität.

10) Sur le principe Arguésien.

Sie sollen nicht immer eigentlich Neues enthalten, aber das 'orhandene in einer mehr didaktischen Form bringen. Bis jetzt iegen drei vor.

Die erste enthält eine Erweiterung des Chasles'schen Corespondenzprincips für k Punktreihen auf einer Geraden in dem olgenden Satze: „Sind auf einer Geraden k Reihen

$$\delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_{i-1}\, \delta_i \delta_{i+1} \ldots \delta_n$$

;egeben, und ist die Zuordnung derselben derart, dass $k-1$ Punkte $A_1 A_2 \ldots A_i A_{i+1} \ldots A_n$ der bez. Reihen α_i Punkten der A_i entsprechen, so ist die Anzahl der Correspondenzen, d. h. die Zahl, welche angiebt, wie oft ein Punkt mit einem ihm entsprechenden zusammenfällt:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_k.“$$

Mit Hülfe dieses Satzes wird in der zweiten Mittheilung die Anzahl der gemeinschaftlichen (endlichen) Lösungen eines Systems algebraischer Gleichungen bestimmt, und es werden aus den gewonnenen Resultaten u. A. die geometrischen Folgerungen gezogen: „Wenn die Asymptotenkegel dreier Flächen der resp. Ordnungen m_1, m_2, m_3 verschieden sind, so schneiden sie sich in $m_1\, m_2\, m_3$ im Endlichen gelegenen Punkten.“

„Wenn drei Flächen einen Punkt O gemeinschaftlich haben der auf ihnen vielfach von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 ist, und die Tangentialkegel in O nicht übereinstimmen, so zählt derselbe für $n_1\, n_2\, n_3$ Schnittpunkte."

In der dritten Mittheilung wird eine Methode zur Bestimmung des Grades eines geometrischen Orts entwickelt, welcher durch algebraische Bedingungen definirt ist. Rg.

A. Cayley. On Schubert's method of the contacts of a line with a surface. Quart. J. XVII. 247-258.

Die Arbeit ist im Wesentlichen eine Wiedergabe von § 33 des Schubert'schen Werkes „Calcul der abzählenden Geometrie" über die Coincidenzen von Schnittpunkten einer Geraden mit einer Fläche. Die Resultate werden jedoch bisweilen durch etwas andere Ueberlegungen gefunden. Anfangs werden die Principien der abzählenden Geometrie kurz dargelegt und einige Fundamentalformeln einer kritischen Betrachtung unterzogen. Wenn nun der Verfasser die Bedeutung derselben beanstandet, so liegt der Grund hierfür in dem Umstande, dass er die Symbole in etwas anderer Weise benutzt, als es im Schubert'schen Werke geschieht.

Herr Schubert sagt ausdrücklich, p. 345:

„Der Buchstabe oder die Combination von Buchstaben, welche eine unvollständige Bedingung bezeichnen, haben keinen numerischen Werth, aber für eine vollständige Bedingung giebt es eine Anzahl von Gebilden, welche die Bedingung befriedigen, und die Bedingung ist als der Werth dieser Anzahl anzusehen." Sofern man die einzelnen Elemente willkürlich im Raum wählen darf, stehen allerdings in den hervorragenden Formeln:

1) $p^2 = p_g$ „Calcul" pag. 22

2) $g^2 = g_e + g_q$ „ „ 23

3) $\varepsilon = p + q - g$ „ „ 44,

unendlich grosse Werthe auf jeder Seite, und eine numerische Bedeutung haben sie dann nicht. Jedoch hat 1), wie der Verfasser angiebt, die logische Bedeutung, dass die Lage eines

Punktes in zwei Ebenen äquivalent ist seiner Lage auf einer Geraden, während 2) und 3) auch eine solche fehlt. Schubert setzt jedoch a. a. O. ausdrücklich für die beiden ersten Formeln zweistufige Systeme, für die dritte ein einstufiges System voraus, und dann haben alle drei eine numerische Bedeutung. Solche Systeme muss man sich aus der Gesammtheit der Elemente des Raumes durch eine Bedingung vorher ausgeschieden denken, wie es Schubert (Calcul pag. 20) verlangt. Das scheint vom Verfasser übersehen worden zu sein, da er ebenfalls nach Hinzufügung einer Bedingung die Richtigkeit der Formeln anerkennt. Als Beispiel betrachtet ist es interessant, wie die Richtigkeit der Formel 3) durch Hinzufügung der 5-fachen Bedingung X, die Gerade des Punktpaares gehöre einer Regelfläche k^{ter} Ordnung an, und die Punkte des Paares werden auf dieser durch zwei Flächen der Ordnungen $m_1 + m_2$ verzeichnet, dargethan wird, nämlich durch den Nachweis, dass jedes der Producte in der Gleichung

$$X\varepsilon = Xp + Xq - Xg$$

den Werth $km_1 m_2$ hat.

Im Weitern werden die Resultate des § 23 mitgetheilt und einige derselben abgeleitet. Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass die Producte der Entwickelungen von

$$\varepsilon_3,\ 2\varepsilon_{33}, \ldots 24\varepsilon_{3333}$$

sich als Functionen von nur vier Bedingungen

$$p_1^2 p_2^2,\ p_1^2 p_2 p_3,\ p_1 p_2 p_3 p_4,\ G$$

darstellen lassen, während bei Schubert pag. 232 noch die fünfte $p_1 p_2 g_e$ steht, welche ersichtlich mit $p_1^2 p_2^2$ identisch ist. In den Resultaten wird übrigens durch dieses Uebersehen kein Fehler hervorgerufen, da auf pag. 235 für die beiden fraglichen Symbole derselbe Zahlenausdruck gefunden wird. Rg.

G. Halphén. Observations sur la théorie des caractéristiques. Bull. S. M. F. VIII. 31-34.

H. Schubert. Réponse aux observations de M. Halphén sur la théorie des caractéristiques. Bull. S. M. F. VIII. 60-61.

Herr Halphén wendet sich in der ersten Note gegen die in den §§ 42—44 des „Calculs der abzählenden Geometrie" von Herrn Schubert zuerst mitgetheilten Formeln bezüglich einer geraden Punktgruppe I, d. h. n auf einer Geraden gelegenen Punkten $p_1, \dots p_n$, indem er die Ungültigkeit jener Formeln für zwei Beispiele $n = 3$ nachweist. Die drei Elemente werden der Bedingung unterworfen, mit einem vierten ein harmonisches System zu bilden. Auf diese Beispiele, behauptet Herr Schubert in seiner Entgegnung, dürfen seine Formeln nicht angewendet werden, da er stets in seinem Buche voraussetze, dass durch die Vereinigung von zwei Elementen keine weitere specielle Lage bedingt werde, während in den angeführten Beispielen nur drei Elemente unendlich nahe liegen könnten. Rg.

H. Schubert. Note sur l'évaluation du nombre des coniques faisant partie d'un système et satisfaisant à une condition simple. Bull. S. M. F. VIII. 61-62.

Enthält die Bemerkung, dass der Verfasser durch eine Arbeit Herrn Halphén's auf einige Fehler in dem § 38 seines „Calculs" aufmerksam geworden sei, welche in einer Nichtbeachtung der Ausartung B (vgl. Halphén Clebsch Ann. XV. p. 19) ihren Grund hätten. Rg.

H. Schubert. Ueber die ein-zweideutige Beziehung zwischen den Elementen einstufiger Grundgebilde. Borchardt J. LXXXVIII. 311-342.

Die Arbeit schliesst sich früheren Publicationen von Sturm (Clebsch Ann. I., VI, X., XII. und Proc. L. M. S. VII.) und Hirst (Proc. L. M. S. V., VI., VIII.) an, welche die ein-eindeutige, also projectivische Beziehung der Grundgebilde behandeln. Mit Hülfe des „Calculs der abzählenden Geometrie" lassen sich die Anzahl-Probleme leicht in der Weise erweitern, dass an die Stelle der ein-eindeutigen Beziehung die α-β-deutige tritt. Es sind in vorliegender Abhandlung zunächst die Anzahlen für zwei auf ein-

ander bezogene ein-zweideutige Grundgebilde erster Stufe (Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel) bestimmt. In § 1 werden die Constantenzahlen festgesetzt. Für die α-β-deutige Beziehung ergiebt sich diese Zahl leicht als Zahl der Coefficienten einer Gleichung, welche in Bezug auf ihre zwei Variabeln bez. von den Graden α, β ist. Man kann die Coefficienten in Form eines Rechtecks von $(\alpha + 1)$ Reihen und $(\beta + 1)$ Colonnen ordnen und findet also als Anzahl

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) - 1 = \alpha\beta + \alpha + \beta.$$

Sind die Träger der Gebilde nicht fest, so ist noch für jeden die Constantenzahl der Mannigfaltigkeit, welcher der betreffende Träger angehören soll, hinzuzufügen. So findet man z. B. für die ein-zweideutige Beziehung auf zwei willkürlichen Geraden des Raumes als Constantenzahl

$$4 + 4 + 1 \cdot 2 + 1 + 2 = 13.$$

Im Allgemeinen hat man auf einem der beiden Gebilde eine Involution. Es können jedoch Ausartungen eintreten; so kann z. B. von den beiden Punkten des einen Gebildes g, welcher einem des anderen g_1 entspricht, einer fest bleiben. Dann entspricht umgekehrt diesem ausgezeichneten Punkte die ganze andere Punktreihe g_1. Solche Ausartungen werden im § 3 aufgezählt, ihre Anzahlen in den §§ 4—6 berechnet.

Zur Berechnung der Anzahlen für die allgemeine ein-zweideutige Beziehung sind ausser den entwickelten diejenigen der Projectivität nothwendig. Nach einer die früher angewendeten (vgl. die angeführten Arbeiten) an Kürze bedeutend übertreffenden Methode leitet der Verfasser diese Anzahlen noch einmal ab und wendet sich sodann zu der allgemeinen Aufgabe. Die Resultate der Untersuchung sind tabellarisch zusammengestellt. Zur Characterisirung der Ergebnisse greifen wir den folgenden Satz heraus: „Sind dreizehn Ebenen und, ihnen einzeln zugeordnet, dreizehn andere Ebenen gegeben, so lassen sich 5320 mal zwei Strahlen so legen, dass die dreizehn Schnittpunkte des ersten Strahls mit der ersten Gruppe von Ebenen und die dreizehn Schnittpunkte des zweiten Strahles mit der zweiten Gruppe von Ebenen durch eine ein-zweideutige Beziehung zwischen

den Punkten der beiden Strahlen einander zugeordnet werden können."

Es wird schliesslich auf eine Anzahl von Problemen aufmerksam gemacht, welche sich darbieten, wenn man ein-zweideutige Grundgebilde verlässt und Curven, Linienflächen etc. annimmt oder auch Gebilde zweiter, dritter Stufe zu Grunde legt. Dann kann man andererseits auch die Anzahl der Gebilde vergrössern und α-β-γ-deutige, α-β-γ ... π-deutige Beziehungen betrachten. Die ein-ein-eindeutige Beziehung ist vom Verfasser inzwischen untersucht (vgl. das folgende Referat). Rg.

H. Schubert. Ueber die Erhaltung des Geschlechts bei zwei-eindeutig auf einander bezogenen Plancurven. Clebsch Ann. XVI. 180-182.

Die kurze Note enthält einen sehr eleganten Beweis des Riemann'schen Satzes von der Erhaltung des Geschlechts p bei eindeutiger Transformation einer Curve C in eine andere C', welcher einzig und allein auf dem Chasles'schen Correspondenzprincipe basirt.

Die beiden Curven werden bez. auf die Büschel P und P' bezogen, und es wird ermittelt, wie oft es vorkommt, dass zwei Strahlen s und s' von P und P' derartig zusammengehören, dass zwei von den n Schnittpunkten des Strahles s mit C zwei solchen von den n' des Strahles s_1 mit C_1 entsprechen. Aus der nothwendigen Gleichheit dieser Zahlen, die man erhält, je nachdem man das Chasles'sche Princip auf P oder P' anwendet, ergeben sich zwei Relationen zwischen der Ordnung, Classe und Anzahl der Rückkehrpunkte, die sofort auf die Gleichheit des Geschlechts führen.

Schliesslich werden noch einige Anzahlen bestimmt, wie sie bei zwei solchen Curven auftreten. Rg.

H. Schubert. Ueber dreipunktige Berührung von Curven. Gött. Nachr. 1880. 369-385.

H. SCHUBERT. Anzahlgeometrische Behandlung des Dreiecks. Clebsch Ann. XVII. 154-212.

Beide Arbeiten enthalten die Behandlung von Fragen wesentlich gleichen Characters. Während in der ersten jedoch nur „unendlich kleine Dreiecke“ untersucht werden, treten in der zweiten allgemeine Dreiecke auf.

Unter einem unendlich kleinen Dreieck wird ein System von drei unendlich nahen Punkten mit drei eben solchen Verbindungslinien, den Seiten, verstanden. Als „ausgeartet“ ist ein solches Dreieck zu betrachten, wenn die drei Punkte ausserdem in gerader Linie liegen oder, dual, die Seiten durch einen Punkt gehen. Drei consecutive Punkte einer Curve bilden hiernach ein allgemeines unendlich kleines Dreieck, wenn daselbst keine Singularität vorhanden ist, während Wende- und Rückkehrpunkte auf die beiden Ausartungen führen. Die Bestimmung der Anzahlen für die gemeinsamen Elemente mehrerer Systeme von unendlich kleinen Dreiecken enthält die Lösungen der Anzahlprobleme der stationären oder dreipunktigen Berührung, wie sie der Verfasser für zwei, drei und vier Curven giebt, als Specialfälle in sich.

Die allgemeinen Dreiecke lassen ebenfalls Ausartungen zu, nämlich fünf einstufige, welche die Constantenzahl des Gebildes von sechs auf fünf reduciren. Z. B. geht eine derselben, s, hervor, wenn eine Ecke auf die Gegenseite rückt. Ferner giebt es sieben zweistufige (unter diesen die unendlich kleinen Dreiecke) und zwei dreistufige Ausartungen. Eine zweistufige Ausartung entsteht z. B. aus s, wenn die ausgezeichnete Ecke mit einer ihrer Gegenseiten zusammenfällt, etc. Nun hat aber Herr Halphén, ausser diesen, besondere Ausartungen betrachtet, welche zwar die Eigenschaft einer k-stufigen Ausartung besitzen, insofern sie die Constantenzahl des Gebildes um k erniedrigen, aber nicht als k-stufige betrachtet werden dürfen, weil von ihnen ein i stufiges System nicht ∞^{i-k}, sondern ∞^r enthält, wo $r > i - k$ (vgl. Proc. L. M. S. IX., oder Clebsch Ann. XV.). Gegenüber solchen „Halphén'schen Systemen“ sollen diejenigen, welche von derartigen Ausartungen frei sind, „gewöhnliche“ genannt und allein be-

trachtet werden. Als Beispiele zu den abgeleiteten Forme werden Anzahlen von ein- und umschriebenen Dreiecken alg braischer Curven bestimmt.

§ 9 enthält eine Anzahl von Formeln über zweimal zw punktige Berührung zweier ebenen Curven, deren Richtigk einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit hat, weil sie in Sp cialfällen mit einer Reihe von Zeuthen hergeleiteter Forme übereinstimmen; aber die Ableitungen sind nicht strenge, w Halphén'sche Systeme auftreten.

Den Schluss bilden einige Erweiterungen der Resultate a Dreiecke in variabelen Ebenen. Rg.

H. Schubert. Bemerkung zu der Bestimmung d Torsallinien einer Regelfläche. Clebsch Ann. XVII. 574.

Die projectivische Beziehung zwischen den Tangentialeben und ihren Berührungspunkten ist längs einer Torsallinie ei Regelfläche derart, dass einem ausgezeichneten Punkte alle Et nen und umgekehrt, einer ausgezeichneten Ebene alle Punk entsprechen: Das Paar der projectivischen Gebilde ist ausgeart

Für die Anzahl solcher ausgearteten Paare im einstufig System, welches hier durch die Gesammtheit der zugeordnet Elemente auf den ∞^1 Erzeugenden der Regelfläche repräsent wird, giebt der Verfasser in seinem „Calcul der abzählend Geometrie" eine Formel, welche auf das vorliegende Beispiel a gewendet, zu der Beziehung

$$T = 2(R - M)$$

führt, in welcher T die Anzahl der Torsallinien, R den Rang, den Grad der Regelfläche bedeuten.

Diese Formel wurde bereits von Sturm, Clebsch Ann. V p. 255, bewiesen. Rg.

Peschka. Beitrag zur Theorie der Normalenflächen. Wien. Ber. LXXXI.

Der Verfasser geht davon aus, dass die von einer continu lichen einstufigen Normalen-Schaar gebildeten Regelflächen bish

reniger Beachtung gefunden haben, als sie es in Anbetracht ihrer Vichtigkeit für den Constructeur und den ausübenden Ingenieur, owie in Anbetracht ihrer theoretischen Bedeutung verdienen. In er That bieten die Untersuchungen des Herrn Verfassers in ieoretischer Beziehung viel Interesse und bilden eine wichtige rgänzung der älteren und der neueren, namentlich von Sturm ngestellten Untersuchungen über Normalen-Oerter.

Der Verfasser betrachtet eine Fläche m^{ter} Ordnung F und auf ır eine Raumcurve L $m.m'^{\text{ter}}$ Ordnung. Die in den Punkten ieser Raumcurve L die Fläche F berührenden Tangentialebenen ilden einen einstufigen Ebenen-Ort, eine sogenannte Developpable, deren zum Theil bekannte Charactere der Verfasser bestimmt. Die in den Punkten von L auf diesen Tangentialebenen enkrechten Strahlen bilden die hier eingehend behandelte Noralenfläche. Ihr Grad ist $M = m^2 m'$, ihr Rang ist

$$R = mm' \, (3m + m' - 4),$$

renn F keine Doppelcurve besitzt.

Um die Zahl der Torsallinien der Normalenfläche zu betimmen, beweist Herr Peschka noch einmal den schon von Sturm Clebsch Ann. VI.) und dem Referenten (Clebsch Ann. XIII.) beriesenen Satz, dass diese Zahl immer gleich $2(R - M)$ ist, wo ! den Rang, M die Ordnung der Regelfläche bedeutet. Hiernach rgiebt sich, dass die Normalenfläche $2mm'(2m + m' - 4)$ Torallinien besitzt. Ebenso gross ist daher auch die Zahl derjenigen Krümmungslinien einer Fläche m^{ter} Ordnung, welche die Schnittarve dieser Fläche mit einer Fläche m'^{ter} Ordnung berühren.

Der Umstand, dass die Normalenfläche einer beliebigen Fläche ' längs einer Curve L identisch ist mit der Normalenfläche der 'läche F längs der L umbeschriebenen Developpabeln, führt den 'erfasser dazu, die zu einer Developpabeln gehörigen Normalenächen noch in einigen anderen Fällen zu bestimmen. Er untersucht zuerst den Ort der in den Punkten der Cuspidalkante auf en zugehörigen Schmiegungsebenen senkrecht stehenden Strahen. Für den Grad des gesuchten Ortes ergiebt sich

$$mm' \, (3m + 3m' - 8),$$

ro m und m' die Ordnungen zweier Flächen sind, deren voll-

ständiger Schnitt die Cuspidalkante ist. Hier möchte Referent anfragen, warum der Herr Verfasser die Raumcurve als Schnitt zweier Flächen, also speciell auffasst, da doch der Grad des gesuchten Ortes sich immer als Summe von Ordnung und Classe der Raumcurve ergiebt, wie die letztere auch erzeugt sein mag.

Bei Gelegenheit der Betrachtung der einem ebenen Schnitte einer Developpabeln zugehörigen Normalenfläche kommt der Verfasser auch auf die Zahlen für Ordnung und Rang der Evolute einer beliebigen ebenen Curve.

Schliesslich werden die Charactere der Normalenfläche einer Developpabeln m^{ter} Ordnung n^{ter} Classe längs ihres vollständigen Schnittes mit einer beliebigen Fläche n^{ter} Ordnung bestimmt.

Scht.

A. Voss. Zur Untersuchung der Fläche der Centra.
Clebsch Ann. XVI. 560-571.

Nachdem Herr Darboux und Lothar Marcks Ordnung und Classe der Krümmungsmittelpunktfläche der punktallgemeinen Fläche bestimmt hatten, gelang es Herrn Roberts und Herrn Sturm, diese Zahlen auch in dem allgemeineren Falle abzuleiten, dass die Originalfläche beliebige Singularitäten hat. Als sich nun Herr Voss bei Gelegenheit seiner Arbeit über Singularitäten der Complexe und Congruenzen (Clebsch Ann. VII.) mit einer analytischen Untersuchung auch der Centrafläche beschäftigte, gelang es ihm, den Zahlen für die Ordnung und Classe derselben noch einige weitere neue Singularitäten-Zahlen hinzuzufügen. Diese werden hier für den Fall der punktallgemeinen Fläche analytisch entwickelt. Die Centrafläche wird projectiv verallgemeinert gedacht, also als die Brennfläche des Strahlensystems, welches aus den Verbindungsgeraden der Punkte der Originalfläche mit den Polen ihrer Tangentialebenen in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades besteht. Für den Rang R der Krümmungsmittelpunktfläche einer Fläche n^{ter} Ordnung findet Herr Voss auf zwei verschiedenen Wegen das Resultat $6n(n-1)^2$.

Scht.

. C. MALET. On a limit to the number of curves belonging to a plane curve of any order. Herm. 1880.

Die Resultate, zu denen die Arbeit gelangt, sind:

1) Keine unicursale Curve von einem graden Grade n hat ıehr als $\frac{3(n-2)}{2}$ Spitzen.

2) Keine unicursale Curve von einem ungraden Grade n ann mehr Spitzen haben, als die nächst kleinere ganze Zahl a $\frac{3(n-2)}{2}$. So können zum Beispiel höchstens sechs von den ehn Knoten einer unicursalen Sextik Spitzen sein, oder von en 15 Knoten einer unicursalen Curve siebenten Grades können icht mehr als sieben Spitzen sein. Csy. (O.)

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Coordinaten.

H. Emsmann. Zum vieraxigen Coordinatensystem. Hoffmann Z. XI. 253-261.

Ausgehend von der Möglichkeit einer vierten Rechnungsstufe und der Existenz vier- und sechsgliedriger Axensysteme in der Krystallographie sucht der Verfasser durch Analogieschlüsse zur Construction vierdimensionaler Gebilde zu gelangen. Die zu diesem Zweck ausgeführte Umstülpung regulärer Tetraeder in die symmetrische Lage ist aber nur analog zur Drehung einer Figur um $2R$, wodurch die Figur nach einem Durchgange durch den dreidimensionalen Raum in ihre Ebene zurückkehrt. Die hiernach vom Verfasser construirten „vierdimensionalen regulären" Tetraeder, Octaeder etc. verdienen diesen Namen schon darum nicht, weil sie überhaupt keine vierdimensionalen Gebilde sind. Sie sind aber ihrer Entstehung nach auch nicht die dreidimensionalen Abbildungen solcher Gebilde, stehen überhaupt mit denselben in keinem Zusammenhang. Die „Begrenzung" des „vierdimensionalen" Tetraeders durch vier reguläre Tetraeder ist keine Begrenzung im allgemein üblichen Sinne. Endlich ist ein vieraxiges Coordinatensystem im dreidimensionalen Raume kein vierdimensionales, sondern nur die Abbildung eines solchen. Das „recht-

winklige" vieraxige System ist im dreidimensionalen Raume allerdings unmöglich, nicht aber im vierdimensionalen. Es ist daher zur Durchführung der Analogie nicht nöthig, mit dem Verfasser den Begriff des rechtwinkligen Systems durch den des gleichwinkligen zu ersetzen. Die sonstigen Ausführungen des Aufsatzes sind krystallographischer Natur. Schg.

Ch. Forestier. Sur les diverses équations d'une courbe en coordonnées polaires par rapport au même pôle et au même axe. Mém. de Toul. (5) II. 235.

Eine kurze Note zu der gleichlautenden Arbeit, über welche im vorigen Jahrgange berichtet ist (F. d. M. XI. 1879. p. 478). Um die Durchschnittspunkte zweier Curven aus den Polargleichungen zu erhalten, muss man die Gleichung der ersten Curve mit jeder Gleichung der zweiten combiniren. Dies wird zunächst auf zwei Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt, dann auf die Archimedische und die hyperbolische Spirale angewendet.

A.

V. Wood. Quaternions. Analyst VII. 11-13, 33-38, 65-71, 121-128.

Zusammenstellung der hauptsächlichsten elementaren Sätze über Quaternionen. Eine Berichtigung von Herrn W. Woolsey Johnson und kritische Bemerkungen zu der Arbeit von A. S. Christie finden sich Analyst VII. 52, 185-188. Glr. (O.)

E. Anthony. Notes on quaternions. Messenger (2) X. 66-72.

Beweise für bekannte elementare Sätze über Quaternionen.

Glr. (O.)

A. Cayley. A geometrical construction relating to imaginary quantities. Messenger (2) X. 1-3.

Die Note giebt eine Methode zur geometrischen Darstellung

der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{p}{x-A}+\frac{q}{x-B}+\frac{r}{x-C}=0,$$

wo p, q, r reelle und A, B, C gegebene imaginäre Grössen von der Form $a+bi$ sind. (Glr. O.)

H. Daubrawa. Ueber allgemeine Transformationssymbole für Auffassung der plinotesseralen Gestalten als tetragonale rhombische und hexagonale Combinationen. Prag. Ber. 1879. 16-30.

Da es nicht unmöglich ist, dass eine für tesseral gehaltene Krystallform sich bei genauerer Betrachtung als Combination anderer Systeme enthüllt, so erscheint dem Herrn Verfasser die allgemeine Lösung der gestellten Aufgabe wünschenswerth. Dieselbe kommt mathematisch darauf hinaus, eine Fläche, welche in einem rechtwinkligen Axensystem das Parameterverhältniss $a:b:c$ hat, also die Ebene

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

auf ein anderes Axensystem zu beziehen, dessen Axen die Durchschnittskanten der drei Ebenen

$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}+\frac{z}{c_1}=0,$$
$$\frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_2}+\frac{z}{c_2}=0,$$
$$\frac{x}{a_3}+\frac{y}{b_3}+\frac{z}{c_3}=0$$

sind.

Die Resultate dieser in mathematischer Hinsicht ganz elementaren Aufgabe werden nun in die Sprache der Krystallographie umgesetzt und auf fünf specielle Aufgaben angewendet.

A.

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

W. Gallenkamp. Algebraische Analysis und analytische Geometrie. 2te Aufl. Iserlohn. Bädeker.

Theil II „Analytische Geometrie“ enthält die Theorie der ebenen schiefwinkligen Coordinaten und deren Anwendung auf Gerade und Linien zweiten Grades, dann mit Zuziehung der Differentialrechnung Maxima und Minima, Contact verschiedener Ordnung, Krümmungskreis; dann die rechtwinkligen Coordinaten im Raum mit Anwendung auf die Flächen zweiten Grades.

H.

P. Frost. General expression for the radius of curvature in dipolar coordinates. Messenger (2) X. 18-21.

Enthält einen Ausdruck für die Krümmungsradien mit Hülfe der partiellen Ableitung der Gleichung $f(r, r') = 0$ der Curve. Specialisirt wird dieser Ausdruck für die Lemniscate und Ellipse.

Glr. (O.)

B. Theorie der algebraischen Curven.

E. Holst. Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions à des recherches purement géométriques. Bull. S. M. F. VIII. 52-60.

Eine eindeutige Function ist bekanntlich eine Constante, wenn sie für keinen Werth der Variabelen Null oder unendlich wird. Daher ist z. B. das Product

$$f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_n^{\alpha_n}$$

constant, wenn beständig $\Sigma m_i \alpha_i = 0$, wo m_i die Ordnung des Verschwindens von f_i bedeutet. Diese Beziehung kann man benutzen, um den Ausdruck eines der f zu finden, falls die übrigen der Form nach bekannt sind. Angewendet wird dies Princip auf einige geometrische Fragen, bei denen es leicht ist, a priori das vollständige System der Functionen f anzugeben; die Zahlen α werden in jedem Falle durch die Gleichungen $\Sigma m_i \alpha_i = 0$ ermittelt. V.

E. Picard. Sur une propriété des fonctions et des courbes algébriques. C. R. XCI. 214-217.

Die Coordinaten der rationalen und elliptischen Curven lassen sich bekanntlich als eindeutige Functionen eines Parameters mit nur polaren Unstetigkeiten darstellen. Der Verfasser wirft die Frage auf, ob hierin eine characteristische Eigenschaft dieser Curven liege, und beweist zunächst, dass hyperelliptische Curven sich nicht mehr auf diese Art darstellen lassen. Es wird ferner angedeutet, in welcher Weise der entsprechende Beweis für algebraische Curven von höherem Geschlecht überhaupt geführt werden könne, doch scheint derselbe wenigstens formell, wie der Verfasser selbst bemerkt, noch nicht ganz erledigt. V.

F. P. Ruffini. Di alcune singolarità nei fasci e nelle reti di linee piane algebriche. Mem. di Bol. (4) I. 366-415.

Für ein p-fach lineares System der Curven $L_{n\nu}$ n^{ter} Ordnung ν^{ten} Geschlechtes mit gegebenen i-fachen Punkten finden bekanntlich die Gleichungen:

$$\Sigma i^2 - i = n^2 - 3n + 2 - 2\nu$$
$$\Sigma i^2 + i = n^2 + 3n - 2p$$

statt. Der Verfasser stellt sich nun die Aufgabe, für Curvenbüschel ($p = 1$) und Netze ($p = 2$) die Fälle zu untersuchen, in denen sämmtliche Curven $L_{n\nu}$ in Curven niederer Ordnung zerfallen, von denen dann eine variabel, die anderen fest sein wer-

en. Ueber diese Zerfällungen wird eine Reihe merkwürdiger Theoreme hergeleitet, welche sich namentlich auf den folgenden atz stützen:

Wenn alle Curven eines Büschels $L_{n\nu}$ unter den genannten Voraussetzungen aus einer variabelen Curve $C_{s\sigma}$ und einer festen Curve $C_{m\mu}$ bestehen, so muss die erstere durch alle gegebenen vielfachen Punkte des Büschels und zwar durch jeden mit einer mindestens eben so hohen Multiplicität, wie $C_{m\mu}$ hindurch gehen. Referent hat sich indessen nicht davon überzeugen können, dass der dafür gegebene Beweis ausreichend ist, insofern derselbe sich auf die gleich Eingangs erwähnte Bemerkung stützt, dass bei den Curven $L_{n\nu}$ das Auftreten von weiteren vielfachen Punkten gleich ein Zerfallen derselben bewirkt; ein Umstand, der allgemein nur bei den Curven $\nu = 0$ stattfindet. V.

H. A. Schwarz. Essai d'une démonstration d'un théorème de géométrie. Liouville J. (3) VI. 111-115.

Der in Rede stehende Satz heisst: „Die Coordinaten einer ebenen Curve n^{ten} Grades, welche $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} - 2$ verschiedene Doppelpunkte besitzt, lassen sich rational durch einen Parameter ausdrücken und durch eine Quadratwurzel einer ganzen Function dieses Parameters vom fünften oder sechsten Grade."

Schg.

J. Casey. On cubic transformations. Trans. of Dublin. 1880.

Die ausführliche 140 Quartseiten enthaltende Arbeit ist in acht Capitel getheilt. Das erste Capitel beschäftigt sich hauptsächlich mit einleitenden Gegenständen. Der dritte Abschnitt desselben enthält eine Discussion der „drei conjugirten Punkte einer Cubik". Es ist das eine Erweiterung des bekannten Begriffs der „zwei conjugirten Punkte eines Kegelschnitts". Er wird entwickelt aus dem folgenden Fundamentaltheorem: „x, y, z seien drei Punkte und U eine Cubik. Wenn dann die Polarlinie

von y in Beziehung auf den auf die Cubik U bezogenen Polar-kegelschnitt von x durch z geht, so wird die Polarlinie von x in Beziehung auf den auf die Cubik U bezogenen Polarkegel-schnitt von y ebenfalls durch z gehen.“ Wenn z. B. die Gleichung in der Form $\alpha_x^3 = 0$ geschrieben wird, so ist $\alpha_x . \alpha_y . \alpha_z = 0$ die Bedingung dafür, dass die Polarlinie von y in Beziehung auf den Polarkegelschnitt von x durch z geht. Gilt diese Relation, so können die drei Punkte beliebig vertauscht werden. Dieser Satz umfasst als speciellen Fall den Steiner'schen Satz: „Wenn der Polarkegelschnitt eines Punktes x seinen Mittelpunkt in y hat, so hat der Polarkegelschnitt von y seinen Mittelpunkt in x.“ Ueber das System von drei conjugirten Punkten in Beziehung auf eine Cubik gilt: „Wenn ein Punkt eines solchen Systems sich längs der Linie im Unendlichen bewegt, so sind die anderen beiden Punkte so bezogen, dass, wenn einer von ihnen (x) der Mittelpunkt des Polarkegelschnitts des anderen (y) ist, dann (y) der Mittelpunkt des Polarkegelschnitts (x) ist.“

Das zweite Capitel führt in die leitende Idee der Arbeit ein. Sie besteht darin, in einer ternären Form für die Variabeln gewisse Symbole zu substituiren, welche in der entwickelten Form zu ersetzen sind durch die Minoren der Hesse'schen Determinante. „Wenn man die Minoren der Determinante, welche die Hessiana einer Curve n^{ten} Grades darstellt, durch $A_{11}, A_{12}, \ldots$ bezeichnet und für die Variabeln einer ternären Form die Symbole A_1, A_2, A_3 substituirt, welche nach Uebereinkommen nur sinnbildlich sind (siehe Salmon's Algebra p. 267 und Clebsch's Theorie der binären algebraischen Formen), während ihre Quadrate und Producte die deutbaren Resultate $A_{11}, A_{12}, \ldots$ d. h. die Minoren der Hessiana geben, so erhält man ein Resultat, welches die Hessische Transformation der Form genannt wird.“ Diese Transformation ist äusserst fruchtbar. Sie führt unmittelbar zu mehreren wichtigen Resultaten. So ergiebt sich unmittelbar der Satz: „Die Hessische Transformation eines Punktes auf der Hessiana einer Curve ist der entsprechende Punkt auf der Steineriana derselben Curve.“ Man ist auf diesem Wege im Stande, die Gleichung der Steineriana im Fall aller Curven von

einem graden Grade zu schreiben, wenn die der Hessiana gegeben ist Im Fall von Curven eines ungraden Grades enthält die Transformation der Hessiana die Steineriana als einen Factor. Diese Resultate gelten für Curven beliebigen Grades. Auf Cubiks angewendet erhält man die beiden folgenden Sätze von grosser Allgemeinheit: 1) „Wenn eine Curve von gradem Grade die Hessiana einer Cubik in einer Anzahl von Punkten schneidet, so wird die Transformirte der Curve die Hessiana in den entsprechenden Punkten schneiden". 2) „Wenn eine Curve ungraden Grades die Hessiana in einer Anzahl von Punkten schneidet, so wird die Transformirte dieser Curve die Hessiana in den entsprechenden Punkten berühren". Diese Sätze schliessen einige bekannte Eigenschaften der Cubiks ein und führen gleichzeitig zu manchen neuen Resultaten. So erhält man den Cremona'schen Satz: „Wenn ein Kegelschnitt eine Cubik in sechs Punkten schneidet, so liegen die entsprechenden sechs Punkte auf einem anderen Kegelschnitt." Man erhält so die Gleichung von Cremona's Kegelschnitt. Im zweiten Abschnitt von Cap. II wird die „Cayley'sche Transformation" eingeführt, welche in Beziehung auf Liniencoordinaten dieselbe Rolle spielt, wie die Hesse'sche Transformation für Punktcoordinaten. Hier findet sich der folgende Satz, der eine bemerkenswerthe Erweiterung der Definition der Cayleyana ist: „Wenn ein variabler Kegelschnitt doppelte Berührung mit der Hessiana hat und die Berührung zweipunktig, resp. vierpunktig ist, so ist die Enveloppe der Berührungssehne die Cayleyana." Der dritte Abschnitt wird von weiteren Anwendungen der Hesse'schen Transformationen in Anspruch genommen, besonders auf Eigenschaften der Inflexionstangenten und die Kegelschnitte, welche die Polarkegelschnitte dieser Linien bilden.

Das dritte Capitel der Abhandlung beginnt mit einer Methode, die Gleichung einer dieser Curven niederzuschreiben, wenn die der anderen gegeben ist. Dies nennt der Verfasser die centrale Transformation. Die drei Punkte auf der Hessiana, welche den dreien entsprechen, in welchen sie durch die Linie im Unendlichen geschnitten wird, nehmen einen wichtigen Platz in dieser Discussion ein. Man findet in manchen Beweisen, dass

die centrale Transformation die Wirkung hat, die Curve, welche durch die Gleichung der Cubik, die aus den drei die betr. Punkte verbindenden Linien besteht, transformirt werden soll, zu vervielfachen. Eines der werthvollsten Resultate in dieser Untersuchung ist der in Art. 103 aufgestellte Satz: „Jede Cubik kann dargestellt werden als die Summe der Cuben von vier Linien, deren eine L willkürlich genommen werden kann, während die andern drei dann als Seiten eines Dreiecks bestimmt werden, das gebildet wird durch die Verbindung der Punkte auf der Hessiana der Cubik, welche den Punkten entsprechen, in denen L sie schneidet.“ Ein solches System von Linien wird mit dem besonderen Namen des selbstconjugirten Vierecks bezeichnet und lässt sich zugleich als Erweiterung des bekannten conjugirten Dreiecks in Beziehung auf einen Kegelschnitt erkennen. Aus der in dieser Form geschriebenen Gleichung der Cubik werden dann Folgerungen in dem Schlussabschnitt dieses Capitels gezogen.

Das vierte Capitel beschäftigt sich mit der Quartik und enthält eine neue Erzeugungsart derselben und weitere Eigenschaften. So enthält es z. B. die Gleichung einer Curve zehnter Classe, welche die 28 Doppeltangenten der Quartik berührt.

In dem fünften Capitel wird eine neue Contravariante der Cubik eingeführt, mit deren Hülfe bewiesen wird, dass die Eigenschaften der Hessiana und Cayleyana reciproke sind. Dadurch ist man im Stande, aus den bekannten Eigenschaften der einen Curve entsprechende Eigenschaften der anderen Curve herzuleiten. So ist der Satz: „Wenn von einem Punkt in der Hessiana ein Büschel von 6 Linien nach drei Paar entsprechender Punkte gezogen wird, so wird der Büschel in Involution sein und die Enveloppe ihrer Doppellinien wird die Cayleyana sein.“ aus einer bekannten Eigenschaft der Cayleyana hergeleitet.

Das sechste Capitel umfasst die Abschnitte: Zwischenformen, Kegelschnitte und Discriminante und enthält eine reiche Auswahl originellen Stoffes.

Das siebente Capitel enthält Abschnitte mit den Titeln „Corresponding points“ und „Tangentials“. Hier finden sich einfache

Ausdrücke für die Coordinaten eines einem gegebenen Punkte *A* entsprechenden Punktes *B* und für die Gleichung der zweiten Linie des polaren Kegelschnitts, dessen einer Factor die Linie *AB* ist. Eins der wichtigsten Resultate in dem Abschnitt über Tangentiale ist ein einfacher und symmetrischer Ausdruck für die n^{te} Tangentiale eines Punktes auf einer Cubik und die Bestimmung der Bedingung dafür, dass ein Punkt mit seiner n^{ten} Tangentialen zusammenfällt. Speciell findet sich eine Untersuchung des Problems, die Anzahl der Punkte auf einer Cubik zu bestimmen, wo die dritte Tangentiale eines Punktes mit dem Punkte selbst zusammenfällt. Dies Problem hat ein gewisses historisches Interesse durch die Bearbeitung desselben von Salmon in den Proc. of London und von Hart in den Trans. of Dublin.

Das letzte Capitel beschäftigt sich mit verschiedenen Sätzen, welche nicht gut anders untergebracht werden konnten. Zu erwähnen ist der Satz Art. 259, dass die fundamentale Covariante sechsten Grades der Cubik (Salmon) die Hessiana in den neun Punkten berührt, welche den neun Inflexionspunkten entsprechen, und die neue Covariante *J*, welche in Art. 270-273 besprochen wird, welche vom zwölften Grade ist und die Hessiana in achtzehn Punkten berührt, nämlich den neun Inflexionspunkten und den neun entsprechenden Punkten. Csy. (O.)

Ch. Biehler. Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques. Première partie. Nouv. Ann. (2) XIX. 492-508.

Kurze Darstellung des Verlaufes einer algebraischen Curve in der Nähe eines vielfachen Punktes. V.

A. Brill. Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Curvenspecies. Clebsch Ann. XVI. 348-408.

Nach Cayley kann jede höhere Singularität einer ebenen algebraischen Curve durch eine gewisse Zahl äquivalenter „ele-

mentarer“ Plücker'scher Singularitäten vertreten werden. Diese Cayley'schen Aequivalenzzahlen haben zunächst nur eine functionentheoretische Bedeutung. So wird z. B. die Zahl der Rückkehrpunkte, die in eine Singularität entfallen, gleich der Multiplicität des Punktes, vermindert um die Zahl seiner cyclischen Gruppen, gesetzt; zu erweisen bleibt dann, dass diese Zahlen in den Plücker'schen Gleichungen als Repräsentanten ebensoviel elementarer Singularitäten auftreten. Doch lag von vornherein die Tendenz nahe, ihnen die geometrische zuzuweisen, dass jede höhere Singularität in eine derselben entsprechende Gruppe elementarer durch Deformation der Curve aufgelöst werden könne, mit anderen Worten, dass jede Curve mit einer höheren Singularität in eine von gleicher Classe, Ordnung und Geschlecht deformirt werden könne, deren elementare Singularitäten den Cayley'schen Formeln entsprechen und durch Aufhebung der Deformation in die gegebenen übergehen.

Mit dieser auch schon von anderer Seite bezeichneten Fragestellung beschäftigt sich die vorliegende Arbeit. Da in der Nähe jeder singulären Stelle die Curve mit beliebiger Annäherung durch ein System rationaler Curven, resp. eine einzige ersetzt werden kann (die Berechtigung dieser oft benutzten Schlussweise für die in Rede stehenden algebraischen Untersuchungen wird sorgfältig erörtert) so wird man die Untersuchung über den Einfluss solcher Deformationen auf die Vorgänge bei rationalen Curven beschränken dürfen. Es zeigt sich nun, dass in der That immer die Deformation so ausgeführt werden kann, dass bei ungeänderter Ordnung, Classe und Geschlecht an Stelle der höheren Singularitäten die äquivalenten elementaren auftreten.

Die Frage nach der Bestimmung der Aequivalenzzahlen läuft demnach darauf hinaus, dieselben für gewisse rationale Curven zu ermitteln.

Der Verfasser führt dieses Problem indessen nicht an den speciellen rationalen Curven aus, welche einen oder mehrere unicursale Zweige vertreten können, sondern an einer allgemeineren Classe, den „rational ganzen“ Curven. Diese besitzen insofern ein selbständiges Interesse, als bei ihnen algebraische

Untersuchungen, die im allgemeinen nicht mehr explicite ausführbar scheinen, eine übersichtliche Gestalt gewinnen; sie sind dadurch ausgezeichnet, dass ihre cartesischen Punkt- und Liniencoordinaten x, y; u, v sich als ganze rationale Functionen eines Parameters λ in folgender Weise ausdrücken lassen:

$$x = \int \varrho d\lambda, \quad u = \int \omega d\lambda,$$
$$y = \int u\varrho d\lambda, \quad v = \int x\omega d\lambda,$$

wo ϱ, ω rationale ganze Functionen sind, die bis auf einen constanten Factor durch die im Endlichen gelegenen Rückkehrpunkte und Inflexionspunkte bestimmt sind. Die Aequivalenzen für Rückkehrpunkte und Wendetangenten, die an einen singulären Punkt, etwa $x = 0$, $y = 0$, entfallen, sind leicht zu bestimmen; für die Doppelpunkte resp. tangenten wird eine genauere Untersuchung der bezüglichen Doppeldiscriminante nöthig, bei welcher Gelegenheit gezeigt wird, dass diese beiden Discriminanten aus je fünf mit bestimmter Multiplicität auftretenden Factoren bestehen, deren jeder eine leicht zu erkennende geometrische Bedeutung besitzt. Gleichzeitig ergiebt sich auch eine solche für gewisse in die Zahl der Doppelpunkte eingehende characteristische Zahlen, deren Wichtigkeit als „kritische“ Exponenten bei der functionen-theoretischen Untersuchung der Aequivalenzen zuerst von Herrn H. J. S. Smith hervorgehoben wurde. Als eine interessante Consequenz der in der Abhandlung des Herrn Brill entwickelten Betrachtungen ist noch zu bezeichnen, dass, wie auch eine gegebene Curve in eine „äquivalente“ deformirt werden mag, eine aus der Zahl der reellen Rückkehr- und Wendepunkte, der isolirten Doppeltangenten und Doppelpunkte zusammengesetzte Zahl, welche als Realitätsindex der Singularität bezeichnet wird, ungeändert bleibt. V.

C. Le Paige. Sur la représentation géométrique des covariants d'une forme biquadratique. Bull. de Belg. (2) L. 115-121.

Mn.

A. DE SAINT-GERMAIN. Des courbes algébriques qui ont plusieurs axes de symétrie. Nouv. Ann. (2) XIX. 350-356.

Da die Gleichung jeder algebraischen Curve m^{ter} Ordnung in Polarcoordinaten in die Form:

$$\sum_0^m (P_\nu \cos\nu\omega + Q_\nu \sin\nu\omega) = 0$$

gebracht werden kann, so ergiebt sich leicht als Gleichung einer Curve, welche μ Symmetrieaxen besitzt:

$$P_0 + P_\mu \cos\mu\omega + P_{2\mu} \cos 2\mu\omega + \cdots = 0.$$

Der Verfasser beschreibt den gestaltlichen Verlauf dieser Curven in dem Falle $\mu = m$ und giebt eine Methode an, nach welcher die Brennpunkte einer solchen Curve bestimmt werden können. V.

F. FRANKLIN. Note on the intersection of two curves. Am. J. III. 192.

Beweis des bekannten Satzes: „Liegen von den $m.n$ Schnittpunkten von zwei Curven C_m und C_n np auf einer C_p, so lässt sich durch die $(m-p)n$ übrigen eine C_{m-p} legen. Vgl. Cayley, Cambridge und Dublin Math. J. III. 1843. p. 271; Cremona, Höhere ebene Curven Art. 44. V.

G. GRUSS. Ueber Beziehungen zwischen mehreren projectivischen Curvenbüscheln und deren Erzeugnissen. Prag. Ber. 1879. 287-292.

Aufsteigend von der Betrachtung mehrerer Curvenbüschel der niedrigsten Ordnungen gelangt der Verfasser zu dem folgenden allgemeinen Satze: „Die beiden durch zwei Curvenbüschel n^{ter} Ordnung und ein Curvenbüschel m^{ter} Ordnung erzeugten Curven $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmen ein Büschel, dessen Curven durch das Curvenbüschel m^{ter} Ordnung und diejenigen Curvenbüschel n^{ter} Ordnung erzeugt werden, deren Basispunktgruppen auf einer Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung liegen."

In dieser Allgemeinheit ausgesprochen ist der Satz jedoch

nicht richtig, gilt vielmehr nur dann, wenn

$$2m - n \geqq 3$$

ist. Da sich ein Beweis nicht vorfindet, möge hier ein solcher mitgetheilt werden.

Fassen wir die beiden Curven C_{m+n} als Basiscurven eines Büschels auf, so schneiden sich sämmtliche Curven desselben ausser in den m^2 Basispunkten des Büschels m^{ter} Ordnung noch in $(m+n)^2 - m^2 = n(2+n)$ weiteren Punkten. Es sind nun, wie leicht zu sehen, die beiden Büschel n^{ter} Ordnung ebenfalls projectivisch aufeinander bezogen und zwar so, dass zwei Curven durch einen und denselben der $n(2m+n)$ Schnittpunkte einander entsprechen. Diese Punkte liegen also auf den C_{2n}, welche die beiden Büschel erzeugen. Nimmt man jetzt zwei andere C_{m+n} des Büschels, so erzeugen zwei ihnen zugeordnete Büschel n^{ter} Ordnung ebenfalls eine C_{2n}, welche durch dieselben $n(2m+n)$ Punkte geht. Ist also diese Anzahl zur Bestimmung einer C_{2n} hinreichend, so ist der Satz richtig, denn dann fallen die beiden C_{2n} (und also alle C_{2n}) zusammen und die Bedingung hierfür ist demnach:

$$n(2m+n) \geqq \tfrac{1}{2} \cdot 2n(2n+3)$$
$$2m - n \geqq 3,$$

wie behauptet wurde. Die Fälle, in denen die gemeinschaftlichen $n(2m+n)$ Punkte dem Schnittpunktsystem zweier C_{2n} angehören, sind selbstverständlich noch besonders auszuschliessen.

Dass in der That die verschiedenen C_{2n} nicht zusammenzufallen brauchen, zeigt das Beispiel $m = n = 1$. Hier kann man jeden Punkt eines Kegelschnitts des erzeugten Büschels zum Basispunkt eines Büschels nehmen.

Aber auch bei höheren Curven, wo die Lage der Basispunkte nicht mehr vollkommen willkürlich ist, ist man nicht an eine Curve gebunden. Sei nämlich $m = 1$, $n = 2$, so giebt es ein Büschel von C_3, und die vier Basispunkte der erzeugenden Kegelschnittbüschel müssten einer und derselben C_4 angehören. Ist nun C_3 eine bestimmte Curve des Büschels, so lege man durch das Centrum S des Büschels erster Ordnung einen beliebigen Strahl, welchen die C_3 noch in zwei Punkten A, B schneiden möge.

Wir zeigen nun, dass ein beliebiger durch A, B gehender Kegelschnitt als einem Büschel angehörig betrachtet werden kann, welcher mit S die C_3 erzeugt. Sind nämlich $CDEF$ die vier weiteren Schnittpunkte dieses Kegelschnitts, so ist S der diesen gegenüberliegende Punkt, woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt. Drei der vier Basispunkte des gewonnenen Büschels sind nun vollständig willkürlich, brauchen also insbesondere nicht auf der C_4 zu liegen.

Für $m=2$, $n=1$ hingegen erhält man $2m-n=3$; es folgt der (also richtige) Plücker'sche Satz (Algebr. Curven p. 56): „Der durch fünf von den neun Schnittpunkten zweier C_3 gehende Kegelschnitt geht durch die zwei Punkte, welche den übrigen vier Schnittpunkten gegenüber liegen“, welchen Satz auch der Verfasser in etwas veränderter Form mittheilt.

Die Arbeit schliesst mit dem Satze: „Der Ort der beweglichen Basispunktgruppen der in einem Curvensystem n^{ter} Ordnung mit k gemeinschaftlichen Basispunkten enthaltenen Curvenbüschel, die mit einem festen Curvenbüschel m^{ter} Ordnung ein Curvenbüschel $(n+m^{\text{ter}})$ Ordnung erzeugen, ist eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung mit den k gemeinschaftlichen Basispunkten als Doppelpunkten.“

Auch dieser ist nicht allgemein bewiesen und bedarf höchst wahrscheinlich ebenfalls einer Präcisirung. Rg.

Em. Weyr. Ueber eine recurrente Formel zur Herstellung von Involutionsgleichungen. Casopis IX. 279. (Böhmisch).

Aus der bekannten Gleichung der Involution n^{ten} Grades

$$f(x)-y\varphi(x)=0$$

folgt zunächst

$$f(x_1)-y\varphi(x_1)=0,$$

wo x, x_1 zwei derselben Gruppe zugewiesene Elemente sind. Wird y eliminirt, so erhält man nach Beseitigung des gemeinschaftlichen Factors $(x-x_1)$

$$U_n\equiv\psi(xx_1)=0$$

als Involutionsgleichung, die in rekurrenter Form lautet:

$$U_n = U_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} (a_n b_k)\, x^k x_1^k \left[x^{n-k-1} + x^{n-k-2} x_1 + \cdots + x_1^{n-k-1}\right],$$

während unabhängig zu gelten hat

$$U_2 = (a_2 b_1) x x_1 + (a_2 b_0)(x + x_1) + (a_1 b_0),$$

wobei Binet's kurze Determinantenbezeichnung verwendet wird.

Std.

J. ROSANES. Zur Theorie der Kegelschnitte. Clebsch Ann. XVII. 21-31.

Drei Kegelschnitte, in deren Netz keine Doppelgerade auftritt, lassen sich nach Hermite auf eine Art als Polaren einer C_3 betrachten. Das zugehörige Poldreieck ist durch lineare Gleichungen bestimmt. Ausser diesem giebt es aber, wie Herr Rosanes bemerkt, zwei andere Dreiecke, deren Ecken ebenfalls durch diese Gleichungen bestimmt sind. Diese drei „Hauptdreiecke“ besitzen eine Reihe interessanter Beziehungen, von denen nur folgende hervorgehoben werden mögen: „Die neun Ecken der Hauptdreiecke lassen sich als Eckpunkte dreier Dreiecke ansehen, welche zu je zweien in Bezug auf einen der Kegelschnitte conjugirt sind.“ Und umgekehrt: „Lassen neun Punkte sich in einer bestimmten Weise als Ecken von Dreiecken betrachten, die paarweise perspectivisch liegen, so giebt es ein System von Kegelschnitten, in Bezug auf welches jene Punkte sich zu drei Hauptdreiecken gruppiren.“

V.

F. FOLIE et C. LE PAIGE. Mémoire sur les courbes du troisième ordre. Première partie. Mém. de Belg. 4°. XLIII.

Capitel 1. Untersuchung von drei Punktreihen, die auf einer Geraden liegen, mit Coordinaten, welche untereinander durch eine trilineare Relation $f = 0$ verbunden sind, indem man zunächst die Covarianten von f sucht. Die Verfasser erläutern sodann die geometrische Interpretation dieser Covarianten und

weisen sodann die Existenz von Doppelpunkten in den Punktreihen nach, die sie Homographie dritter Ordnung und dritter Classe nennen.

Cap. 2. Untersuchung der Involutionen dritter Ordnung, welche im Zusammenhang stehen mit der Untersuchung der im ersten Capitel auseinander gesetzten Homographie und mit der gewisser absoluter Invarianten, die anharmonische Verhältnisse dritter Ordnung sind.

Cap. 3. Untersuchung des anharmonischen Verhältnisses dritter Ordnung. Damit bezeichnen die Verfasser den Quotienten aus dem Product von drei Differenzen zwischen den sechs Wurzeln einer Gleichung sechsten Grades durch das Product der drei anderen Differenzen. Die fünfzehn Producte der Differenzen dieser Art können ausgedrückt werden durch vier solcher Differenzen und die 210 anharmonischen Verhältnisse durch drei. Die Verfasser bestimmen ferner die Gleichung, welche die fünfzehn Producte zu Wurzeln hat, und untersuchen die Discriminante derselben, welche bemerkenswerthe Eigenschaften besitzt. Die Gleichung, welche die 210 anharmonischen Verhältnisse zu Wurzeln hat, ist nur vom 120ten Grade, weil 90 unter diesen Verhältnissen solche erster oder zweiter Ordnung sind.

Die Arbeit schliesst mit vermuthlich fragmentarischen Betrachtungen über die harmonischen conjugirten Punkte, welche durch die sechs Wurzeln einer Gleichung sechsten Grades dargestellt werden. Mn. (O.)

F. Folie, E. Catalan, J. M. de Tilly. Rapports sur un mémoire de M. Saltel. Bull. de Belg. (2) XLIX. 149-171.

Discussion über das Princip der Büschel der Herrn Folie und Le Paige (siehe F. d. M. X. 1878. p. 399 und 461).

Mn. (O.)

Em. Weyr. Remarque sur l'existence de l'évolution dans les courbes du troisième et du quatrième ordre. Bull. de Belg. (2) XLIX. 7-8.

Drei Punkte einer ebenen rationalen Curve dritter Ordnung, die in gerader Linie liegen, und ihre tangentialen Punkte sind sechs Punkte in Evolution auf der Curve. Mn. (O.)

A. BRILL. Ueber die Wendepunkte der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten. Clebsch Ann. XVII. 103-106, 517-523.

Für eine Curve mit Doppelpunkten wird es möglich sein können, statt der Hesse'schen Curve Curven niederer Ordnung anzugeben, welche die Wendepunkte ausschneiden. So liegen z. B. die Wendepunkte einer C_4 mit einem Doppelpunkte auf einer C_5, die der C_4 mit zwei Doppelpunkten werden durch ein Netz von Curven vierter Ordnung ausgeschnitten. Die Beweise hierfür ergeben sich durch eine geschickte Verwendung des von Herrn Nöther zuerst streng bewiesenen Theorems über rationale ganze Functionen, welches zugleich die Darstellung der gesuchten Curven liefert. V.

J. FREYBERG. Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung. Clebsch Ann. XVII. 329-332.

Die von Hesse gegebene Bestimmung der Curve vierzehnter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten der C_4 geht, wird hier direct mit Hülfe symbolischer Rechnungen ausgeführt und so in sehr einfacher Weise dieselbe Form gefunden, in welche bereits Herr Dersch (Clebsch Ann. VII. S. 504, s. F. d. M. VI. 1874. p. 415), von der Doppeltangentencurve der C_4 ausgehend, die Hesse'sche Gleichung gebracht hatte. V.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

E. HAIN. Zur Construction symmetrischer Punktsysteme. Grunert Arch. LXIV. 398-406.

Mit Hülfe trimetrischer Punktcoordinaten werden verschied geometrische Sätze, die ein Dreieck betreffen, hergeleitet. Characterisirung dieser Sätze sei der folgende angeführt:

„Wenn man in den Schnittpunkten der inneren Winkelh birenden eines Dreiecks mit dessen Seiten Lothe errichtet, auf diesen entweder nur nach Aussen oder nach Innen von Fusspunkten aus Stücke proportional den Dreiecksseiten trägt, so bilden die andern Endpunkte Dreiecke, deren Schw punkte zusammenfallen." Mz.

D. J. Korteweg. Oplossingen der vraagstukken, vo komende in „Briot et Bouquet, Leçons de géomét analytique", Reeks I-V. benevens een gelyk aant vraagstukken ber vefening. 2ᵉ druk. Hertogenborch. W. van Heusden.

In diesem Werk werden die Auflösungen der fünf erst Reihen von Aufgaben gegeben, welche in dem französischen Lel buch der analytischen Geometrie von Briot und Bouquet v kommen. Die Absicht des Verfassers ist, bei einiger Ermunteru auch die Lösungen der übrigen Aufgaben des Lehrbuchs zu gebe Eine neue Reihe von Aufgaben ohne Auflösung wird jedem Capi zugefügt. Von den behandelten Aufgaben werden oft zwei od drei Lösungen mitgetheilt, wobei von möglichst verschieden Methoden Gebrauch gemacht wird. G.

H. Hart. On the criteria for determining the natu of a conic represented by the general equation i areal coordinates. Messenger (2) X. 90-92.

Der Verfasser stellt die Bedingungen auf, welche erfül werden müssen, damit die allgemeine Gleichung in Flächencoo dinaten

$$ux^2+vy^2+wz^2+2u'yz+2v'zx+2w'xy=0$$

eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel darstelle. Die Bedingunge

rden auch geometrisch untersucht. Ist

$$v+w-2u'=2\xi^2,\quad w+u-2v'=2\eta^2,\quad u+v-2w'=2\zeta^2,$$

ɛeichnen ξ, η, ζ die Flächencoordinaten eines Punktes P und E, F die Mittelpunkte der Seiten des zu Grunde gelegten eiecks, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder rabel, je nachdem P innerhalb, ausserhalb oder auf dem Umıg des Beziehungsdreiecks liegt, und eine rechtwinklige Hyper-, wenn P auf dem Kreise liegt, dem das Dreieck selbst con;irt ist. Glr. (O.)

W. Genese. On the equation to the real and to the imaginary directrices and latera recta of the general conic $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$; with a note on a property of the director circle. Rep. Brit. Ass. 1880.

Wenn die Gleichung des Kegelschnitts mit $u=0$ bezeichnet ırd, und λ eine Wurzel der Gleichung

$$\lambda^2-(a+b)\lambda+ab-b^2=0$$

, so ist, wie bewiesen wird,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2=4\lambda u$$

e Gleichung der Directrices. Csy. (O.)

. Jung. Beitrag zur Theorie der Kegelschnitte. Casopis IX. 71. (Böhmisch.)

Enthält Untersuchungen über Degenerirung der Kegelschnittsırven, welche durch Anwendung von Determinanten und von apin's Princip instructiv sind. Std.

. Taylor. Tangential coordinates. Messenger (2) X. 13-14.

Mit Hülfe der Methode der tangentialen Coordinaten werden emerkungen mitgetheilt über eine allgemeine Eigenschaft der

Kegelschnitttangenten, die von Newton bewiesen, und über einen speciellen Fall, der nachträglich von Lambert bewiesen ist.

Glr. (O.)

E. Hain. Neue Herleitung der Kreistangentengleichung. Grunert Arch. LXV. 112.

Die Gleichung einer Tangente des Kreises

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$

wird hier hergeleitet, indem zuvor ein anderer Kreis

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\varrho^2=0$$

mit in die Betrachtung kommt. Es wird dann zunächst die Radicalaxe (Chordale) beider Kreise durch eine Gleichung dargestellt. Lässt man nun den zweiten Kreis in einen Punkt (sein Centrum) degeneriren, und nimmt man weiter an, dass dieses Centrum ein Punkt des ersten Kreises ist, so geht die Gleichung der Radicalaxe in die einer Tangente des ersten Kreises über.

Mz.

G. Dostor. Lieu des centres des cercles tangents intérieurement à un demi-cercle, et extérieurement aux deux demi-cercles, qui ont pour diamètres les deux segments du diamètre du premier demi-cercle. Grunert Arch. LXVI. 17-24.

Der in der Ueberschrift angegebene Gegenstand wird in elementarer und leicht verständlicher Weise behandelt. Sind $2a$ der Durchmesser des grössten, $2b$ und $2c$ die Durchmesser der beiden kleineren Halbkreise, und somit der Voraussetzung nach $b+c=a$, so ist der Radius z des die drei Halbkreise berührenden Kreises

$$z=\frac{abc}{a^2-bc}.$$

Es wird dann der Durchmesser $2a$ zur X-Axe und die Mitte auf $2a$ zum Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten gemacht. Sind dann (x, y) die Coordinaten eines Punktes P, welcher Mittel-

punkt eines die drei Halbkreise berührenden Kreises ist, so wird

$$y = \frac{2abc}{a^2 - bc}, \quad x = \frac{a^2(b-c)}{a^2 - bc}$$

(wobei ein Druckfehler in der Arbeit beseitigt ist).

Nun führt die Elimination von b und c aus diesen beiden Gleichungen und derjenigen $b + c = a$ zu der Gleichung des gesuchten Ortes

$$4x^2 + 3y^2 + 4ay - 4a^2 = 0.$$

Dieser wird weiter discutirt, und dann werden noch einige Zusätze gemacht. Mz.

Weill. Sur le cercle qui passe par les pieds des trois normales abaissées d'un point de l'ellipse sur la courbe. Nouv. Ann. (2) XIX. 60-62.

Mit den Hülfsmitteln der analytischen Geometrie wird zuerst die Gleichung des Kreises gefunden, der durch die Fusspunkte der drei Normalen zur Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ geht, die sich von einem Ellipsenpunkte $(x_1 y_1)$, abgesehen von der Normale in diesem Punkte selbst, ziehen lassen. Hierbei wird der Satz angewandt, dass dieser Kreis auch durch den Punkt mit den Coordinaten $-x_1$, $-y_1$ gehen muss. Die Gleichung dieses Kreises lautet (nach Beseitigung eines Druckfehlers in der Arbeit)

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1 x - \frac{a^2}{b^2} y_1 y = a^2 + b^2.$$

Sein Mittelpunkt beschreibt eine Ellipse, während sich der Punkt $(x_1 y_1)$ auf der gegebenen Ellipse fortbewegt; auch trifft dieser Kreis den andern Kreis, auf welchem alle Punkte liegen, von denen zu einer senkrechte Tangenten an die Ellipse gehen, in den Endpunkten eines Durchmessers dieses zweiten Kreises.

Weiter wird das Centrum der mittleren Entfernungen der Punkte $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$, $(x_4 y_4)$, (Normalenfusspunkte von Normalen aus $(x_1 y_1)$ an die Ellipsen) bestimmt, ferner der Ort dieses Centrums, wenn $(x_1 y_1)$ auf der Ellipse sich verändert; und endlich wird der Höhenschnitt des Dreiecks gesucht, dessen Ecken

$(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$, $(x_4 y_4)$, und der Ort dieses Höhenschnittes, während $(x_1 y_1)$ die Ellipse durchläuft. Mz.

A. Börsch. Die einem Dreieck umschriebene Ellipse kleinsten Inhalts und das einem Tetraeder umschriebene Ellipsoid kleinsten Volumens. Schlömilch Z. XXV. 59-64.

Die Aufgabe wird nach der allgemeinen Methode behandelt, welche die Analysis für alle derartigen Aufgaben bietet. Gehört die Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

einer Ellipse zu, und ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \bar{\Delta}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta,$$

F der Flächeninhalt der Ellipse, so hat man

$$F^2 = \frac{\bar{\Delta}^2}{\delta^3}\pi^2.$$

Werden nun die Bedingungsgleichungen eingeführt, welche unter den Coefficienten a_{ik} bestehen, damit die Ellipse durch die drei gegebenen Punkte $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ geht, und wird dann in bekannter Weise differentiirt, so erhält man für die kleinste Ellipse den Inhalt

$$F = \frac{2}{9}\sqrt{3}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \pi.$$

Die Gleichung dieser Ellipse wird, wenn $\alpha_1 = 0$ die Gerade ausdrückt, die die Punkte $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$ verbindet, und α_2, α_3 die analogen Bedeutungen haben,

$$\frac{\alpha_2\alpha_3}{\sin(\alpha_2, \alpha_3)} + \frac{\alpha_3\alpha_1}{\sin(\alpha_3, \alpha_1)} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\sin(\alpha_1, \alpha_2)} = 0.$$

Ganz ähnlich ist die Sache beim Ellipsoid; nur wird dort, da die Rechnung sehr complicirt ist, das Resultat anticipirt, dass die Tangentialebenen des kleinsten Ellipsoids in den Ecken des

eingeschriebenen Tetraeders den bezüglichen Gegenflächen parallel sind, und auf die Verification nachträglich hingewiesen. Der Inhalt dieses Ellipsoides ist

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

wobei (x_1, y_1, z_1) etc. die gegebenen Punkte sind. Mz.

A. Hall. Parallel chords in an ellipse. Analyst VII. 82-83.

Beweis des folgenden von Savary aufgestellten Satzes: „Zieht man in einer Ellipse vier parallele Sehnen und bildet das Product der Quadrate jeder Sehne in ihre Entfernungen von den drei andern Sehnen, so ist die Summe der Producte, die durch die erste und dritte Sehne entstehen, gleich der Summe der Producte, die durch die zweite und vierte entstehen."

Glr. (O.)

E. Lucas. Note sur la construction des normales à l'ellipse. Nouv. Ann. (2) XIX. 279-280.

Die Construction der vier Normalen aus einem Punkte wird auf die elementare Aufgabe zurückgeführt, um einen gegebenen Mittelpunkt einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet. V.

J. Neuberg. Sur les normales à l'ellipse. N. C. M. VI. 241-250, 289-299.

Zusammenstellung der Theorie der Normalen an Kegelschnitten, welche neue Beweise und Sätze enthält.

Mn. (O.)

K. Zahradnik. Ueber das Normalenproblem für die Parabel. Prag. Ber. 1879. 98-109.

Von einem Punkte $P(\xi, \eta)$ der Ebene lassen sich auf die Parabel $y^2 = 2px$ drei Normalen fällen, denn die Gleichung der Normalen im Punkte y der Parabel ist

$$y^3+2p(p-\xi)y-2p^2\eta = 0,$$

also für $\xi\eta$ vom dritten Grade.

Die drei Punkte x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3, welche hiernach einem Punkte $P(\xi, \eta)$ angehören, werden ein Fusspunkttripel genannt. Ist das durch sie gebildete Dreieck constant $= +\sqrt{p.c^3}$, so liegt P auf der Curve dritter Ordnung

$$8(\xi-p)^3-27p\eta^2 = c^3.$$

Für $c = 0$ erhält man die Evolute als Ort der Punkte, für welche zwei Ecken des Tripeldreiecks zusammenfallen. Weiter werden Sätze über die Lage des Schwerpunkts S, des Höhendurchschnitts H, des umschriebenen Kreises und des Kreises durch die Mitten der Seiten eines Tripeldreiecks abgeleitet. Die Punkte S, H und die Mittelpunkte der beiden genannten Kreise liegen bekanntlich stets auf einer Geraden π, welche dem Punkte P hiernach zugeordnet ist. „Beschreibt der Punkt P eine Curve n^{ter} Ordnung, so umhüllt π eine Curve der $2n^{\text{ten}}$ Classe und der $2n(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung." Rg.

Weill. Théorèmes sur la parabole. Nouv. Ann. (2) XIX. 367-378, 442-450.

Der Herr Verfasser giebt eine grosse Zahl von Sätzen, welche Dreiecke betreffen, die einer Parabel umschrieben und irgend einem Kegelschnitt eingeschrieben sind. Da solcher Dreiecke unendlich viele existiren, wenn eines vorhanden ist, so kann man mannigfache Fragen über geometrische Oerter hierbei behandeln. So findet der Herr Verfasser, dass der Ort der Schwerpunkte dieser Dreiecke eine gerade Linie, dass auch der Ort der Mittelpunkte von Kreisen, die diesen Dreiecken umschrieben sind, eine gerade Linie ist. Hieran knüpfen sich viele andere Lehrsätze.

Weiterhin werden abgeplattete Dreiecke (triangles aplatis) betrachtet. Es sind dies solche, bei denen zwei Ecken aufeinander fallen. Damit ein solches Dreieck einem Kegelschnitt C eingeschrieben und einem andern Kegelschnitt P umschrieben sei, müssen die Gleichungen von C und P die Form annehmen können:

$$\beta(A\alpha+B\gamma)-C\alpha^2=0,\quad K\alpha\beta-L\gamma^2=0,$$

wobei $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ den Seiten des Coordinatendreiecks zukommen; und zwar ist α die Gerade, in welche das abgeplattete Dreieck übergeht, $\alpha\beta$ ihr einer, $\alpha\gamma$ der andere Endpunkt und β gemeinsame Tangente von P und C. Die bekannte Bedingung für die Existenz der in Rede stehenden Dreiecke, nämlich

$$\theta^2-4\varDelta\theta'=0,$$

kommt hier auf die einfachste Weise heraus. In Betreff weiterer Sätze ist auf die Arbeit selbst zu verweisen. Mz.

A. M. DE LÉPINAY. Sur un lieu géométrique. Nouv. Ann. (2) XIX. 91-94.

Der Herr Verfasser beweist nach der Methode der analytischen Geometrie den Satz:

Legt man durch zwei auf einer Ellipse gegebene Punkte irgend einen Kreis und zieht dann an beide Curven gemeinschaftliche Tangenten, so ist der Ort der Tangentendurchschnitte, die bei allen durch die gegebenen Punkte gehenden Kreisen erhalten werden, eine mit der Ellipse confocale Hyperbel; und diese Hyperbel bleibt dieselbe, wenn die Sehne der Ellipse, die die beiden gegebenen Punkte verbindet, parallel mit sich verschoben wird. Ist nämlich m die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen diese Sehne mit der positiven X-Axe bildet, und

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

die Gleichung der Ellipse, so ist

$$(m^2a^2+b^2)(b^2x^2-m^2a^2y^2)-m^2a^2b^2(a^2-b^2)=0$$

die Gleichung der oben genannten Hyperbel. Sie trifft die Ellipse da, wo letztere von den Geraden

$$b^2x-ma^2y=0 \quad\text{und}\quad b^2x+ma^2y=0$$

geschnitten wird. Wenn der zuerst vorgelegte Kegelschnitt keine Ellipse, sondern eine Hyperbel von der Gleichung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

ist, so ist der in Rede stehende Ort eine mit dieser Hyperbel confocale Ellipse, die die Gleichung hat

$$(m^2a^2 - b^2)(b^2x^2 + m^2a^2y^2) - m^2a^2b^2(a^2 + b^2) = 0,$$

also eine reelle Curve, wenn $m^2a^2 - b^2 > 0$, eine imaginäre, wenn $m^2a^2 - b^2 < 0$.

Zuletzt bemerkt der Herr Verfasser, dass seine Methode auch auf den Fall der Parabel anwendbar ist. Mz.

Le Cointe. Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une conique et à un cercle. Nouv. Ann. (2) XIX. 122-133.

Der Herr Verfasser behandelt die Aufgabe: „Man lege durch zwei auf einem Kegelschnitt gegebene Punkte einen variablen Kreis; dann ziehe man zu beiden Curven die gemeinsamen Tangenten und suche den Ort der Durchschnitte je zweier dieser Tangenten.“ Zuvor wird jedoch die Bemerkung gemacht, dass frühere Auflösungen dieser Aufgabe meist an der Unvollkommenheit leiden, dass der gefundene Ort sich nicht auf sämmtliche sechs jedesmaligen Durchschnitte gemeinsamer Tangenten des Kegelschnitts und eines der Kreise bezieht, dass vielmehr die gemeinsamen Tangenten nur so combinirt sind, dass die ihnen zugehörenden Berührungssehnen der Ellipse und des Kreises sich auf der Verbindungsgeraden der beiden festen Punkte schneiden.

Die Aufgabe wird nun folgendermassen behandelt: Die Verbindungsgerade der festen Punkte A und B des Kegelschnitts S sei die X-Axe; O, die Mitte auf AB, werde zum Coordinatenanfang genommen; und es sei $OA = p$. Dann hat der Kegelschnitt S die Gleichung

$$x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey - p^2 = 0,$$

und der variable Kreis Γ wird durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2dy - p^2 = 0,$$

wo d ein veränderlicher Parameter, definirt. Sind nun α, β Coordinaten eines Punktes des gesuchten Ortes, so ist zunächst die Gleichung der von (α, β) an S gehenden Tangenten

$$(\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2+2E\beta-p^2)(x^2+2Bxy+Cy^2+2Ey-p^2)$$
$$-((\alpha+B\beta)x+(B\alpha+C\beta+E)y+E\beta-p^2)^2=0,$$

und die Gleichung der von (α, β) an den Kreis Γ gehenden Tangenten lautet

$$(\alpha^2+\beta^2-2d\beta-p^2)(x^2+y^2-2dy-p^2)-(\alpha x+(\beta-d)y-d\beta-p^2)^2=0.$$

Es wird nun ausgedrückt, dass diese beiden Geradenpaare nur eines sind, indem die Coefficienten von x^2, xy, y^2 aus beiden Gleichungen einander proportional gesetzt werden; dann wird aus den sich so ergebenden drei Gleichungen der Proportionalitätsfactor und der Parameter d eliminirt, wodurch der gesuchte Ort in einer Gleichung

$$\Phi(\alpha, \beta)=0$$

erhalten wird, wo Φ vom sechsten Grade und α, β die laufenden Coordinaten sind. Hierauf wird das Problem mit der Anfangs erwähnten Einschränkung behandelt, wonach also die Berührungssehnen

$$(\alpha+B\beta)x+(B\alpha+C\beta+E)y+E\beta-p^2=0,$$
$$\alpha x+(\beta-d)y-d\beta-p^2=0$$

sich auf der X-Axe schneiden müssen; und dann resultirt für den Ort von (α, β) die Gleichung zweiten Grades

$$(B^2-C+1)\alpha^2+2B\alpha\beta+B^2\beta^2+2BE\alpha+B^2p^2=0,$$

deren linke Seite daher ein Theiler von $\Phi(\alpha, \beta)$ sein muss, so dass der Ort des Punktes (α, β) aus einem Kegelschnitt S_1 und einer Curve vierten Grades zusammengesetzt ist. Der Kegelschnitt S_1 wird dann noch genauer betrachtet; es wird gezeigt, dass er zu S confocal ist, und noch Einiges mehr. Mz.

G. Darboux. Correspondance à M. Brisse. Nouv. Ann. (2) XIX. 184-188.

Dieser Brief des Herrn Darboux an Herrn Brisse bezieht sich auf die Arbeit des Herrn Le Cointe (s. das vorangehende

Referat) und enthält eine Verallgemeinerung des in Rede stehenden Problems. Es lautet dieses dann so: Man betrachte einen festen Kegelschnitt S und variable Kegelschnitte, welche durch vier feste Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 gehen; man ziehe dann immer zum festen Kegelschnitt S und zu einem der variablen die gemeinsamen Tangenten und suche den Ort des Durchschnitts dieser Tangenten. Liegen im Besonderen A_1 und A_2 auf S und sind A_3 und A_4 die imaginären Kreispunkte im Unendlichen, so geht das erwähnte Problem in das von Herrn Le Cointe behandelte über.

Die Behandlung der Aufgabe, wie sie von Herrn Darboux geschieht, ist folgende: $S = 0$ sei die Gleichung des Kegelschnitts S, und x', y' seien die Coordinaten eines Punktes des gesuchten Ortes. Man setze

$$2P = x'\frac{\partial S}{\partial x} + y'\frac{\partial S}{\partial y} + z'\frac{\partial S}{\partial z}$$

(z ist der Homogeneität wegen eingeführt); dann haben die beiden aus (x', y') an S gehenden Tangenten die Gleichung

$$SS' - P^2 = 0,$$

wo S' das ist, was aus S wird, wenn x und y durch x' und y' ersetzt werden. Für jeden Punkt des gesuchten Ortes giebt es nun einen Kegelschnitt, der die eben genannten Geraden berührt und durch die vier Punkte A_i geht. Es sei

$$P^2 - SS' = (mx + ny + p)^2$$

die Gleichung dieses Kegelschnitts, (x_i, y_i) seien die Coordinaten von A_i, und S_i, P_i die Resultate der Substitution von x_i, y_i für x, y in S und P; dann hat man vier Gleichungen

$$\pm\sqrt{P_i^2 - S_iS'} = mx_i + ny_i + p \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

und hieraus durch Elimination von m, n, p die gesuchte Gleichung des Ortes:

$$\pm(234)\sqrt{P_1^2 - S_1S'} \mp (134)\sqrt{P_2^2 - S_2S'} \pm (124)\sqrt{P_3^2 - S_3S'}$$
$$\mp (123)\sqrt{P_4^2 - S_4S'} = 0.$$

Hier bedeutet (234) die Determinante $\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$,

analog (134) etc. Macht man die Gleichung des Ortes rational, so wird sie vom achten Grade in den laufenden Coordinaten x', y'; doch sondert sich der Factor S' ab, wie einmal a priori zu erkennen ist und auch andererseits daraus hervorgeht, dass durch Setzen von $S' = 0$ die Identität folgt

$$(234)P_1 - (134)P_2 + (124)P_3 - (123)P_4 = 0.$$

Der gesuchte Ort des Punktes x', y' ist daher nach Weglassung des Factors S' vom sechsten Grade. Es werden nun hieran noch einige Bemerkungen geknüpft, und dann wird gezeigt, wie sich das Hauptsächliche für das speciellere Problem sehr einfach aus der allgemeinen Lösung ergiebt. Mz.

G. Krammer. Ueber zwei in einer Ebene liegende Curven zweiter Ordnung. Krak. Ber. VI. (Polnisch).

Dn.

E. Lucas. Sur un théorème de M. Chasles concernant les coniques homofocales. Nouv. Ann. (2) XIX. 397-401.

Nach einigen einleitenden Worten betrachtet der Verfasser eine Ellipse von der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und auf ihr einen Punkt P, dessen Winkelparameter φ ist; dann hat ein Punkt Q, der auf der Normale liegt, die der Ellipse in P zukommt, die Coordinaten

$$x = (a + b\lambda) \cos \varphi, \quad y = (b + a\lambda) \sin \varphi.$$

Beschreibt man um Q einen Kreis mit dem Radius PQ und nennt R den Durchschnittspunkt der dem Kreise und der Ellipse gemeinsamen Tangenten (von der durch P gehenden abgesehen), so hat R die Coordinaten x, y, für welche

$$(1 - \lambda^2)x = (a + 2b\lambda + a\lambda^2) \cos \varphi$$
$$(1 - \lambda^2)y = (b + 2a\lambda + b\lambda^2) \sin \varphi.$$

Die Elimination von λ ergiebt hieraus:

$$\frac{x^2}{\cos^2\varphi} - \frac{y^2}{\sin^2\varphi} = a^2 - b^2 = c^2.$$

Der Ort des Punktes R, während Q auf der Normale PQ variirt, ist daher eine zur Ellipse homofocale Hyperbel. Es wird hierauf gezeigt, wie man, wenn ein Punkt R ausserhalb der Ellipse gegeben ist, die Radien der Kreise berechnet, welche die Ellipse und die beiden durch R gehenden Ellipsentangenten berühren. Dies führt dann noch auf einen Satz von der Ellipse.

Mz.

E. Lucas. Sur trois coniques confocales deux à deux. Nouv. Ann. (2) XIX. 401-403.

Es wird der Satz bewiesen: „Wenn von drei Kegelschnitten je zwei denselben Kreis doppelt berühren, so treffen sich ihre gemeinschaftlichen Secanten zu dreien in demselben Punkt.“ Der Beweis wird geführt, indem die Potenzen eines Punktes der Ebene in Bezug auf die drei Kreise, die im Satze vorkommen, als Veränderliche x, y, z eingeführt werden. Die Kegelschnitte haben dann die Gleichungen:

$$\sqrt{y}+\sqrt{z}=2a,\quad \sqrt{z}+\sqrt{x}=2b,\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=2c.$$

Schreibt man hierauf die beiden letzten Gleichungen

$$(x-z+4b^2)^2 = 16b^2x,\quad (x-y+4c^2)^2 = 16c^2x,$$

so ergiebt sich als Gleichung einer gemeinschaftlichen Secante dieser beiden Kegelschnitte:

$$c(x-z+4b^2) = b(x-y+4c^2).$$

Durch cyclische Vertauschung erhält man die Gleichungen gemeinschaftlicher Secanten für die beiden übrigen Paare von Kegelschnitten und findet aus der Symmetrie der Gleichungen, dass diese drei Secanten durch denselben Punkt gehen.

Weiterhin wird bemerkt, dass, wenn x, y, z Abstände eines Punktes von den Seiten eines Dreiecks bedeuten, dieselben Gleichungen einen Satz, der Parabeln betrifft, ergeben.

Mz.

LAGUERRE. Sur les coniques qui passent par trois points et ont un double contact avec un cercle donné. Nouv. Ann. (2) XIX. 347-350.

Sind drei Punkte *a*, *b*, *c* und ein Kreis *K* gegeben, so kann man vier Kegelschnitte construiren, welche durch diese Punkte gehen und den Kreis doppelt berühren. Die Axenlängen dieser Kegelschnitte, wobei immer die der Berührungssehne parallele Axe gemeint ist, bestimmt man leicht auf folgende Art: Um die Punkte *a*, *b*, *c* als Centren beschreibe man je einen Kreis *A*, *B*, *C*, der den gegebenen *K* rechtwinklig schneidet; und um die drei Kreise *A*, *B*, *C* rolle man dann einen Faden. Dies geht auf vier verschiedene Arten, welche vier Lösungen der Aufgabe entsprechen. Sind nämlich bei einer Art der Umrollung α, α'; β, β'; γ, γ' die Berührungspunkte des Fadens mit den Kreisen *A*, *B*, *C*, so construire man ein Dreieck aus den Seitenlängen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$, dann ist der Durchmesser des diesem Dreieck umschriebenen Kreises die Axenlänge des gesuchten Kegelschnittes für die der Berührungssehne parallele Axe. Es wird dies nun vom Herrn Verfasser bewiesen und zwar einmal durch Hinweis auf Sätze über die Geometrie der Lage, zweitens aber unabhängig davon auf elementare Art nach der Methode der analytischen Geometrie.

Mz.

ED. MAHLER. Das Erzeugnis zweier gewisser Systeme von Kegelschnitten, die mit einander projectivisch sind. Wien. Anz. 1880.

Das Vorliegende ist nur eine kurze Inhaltsangabe der Arbeit, und es heisst daselbst:

Sind $K \equiv \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 0$ und $K' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ die Gleichungen zweier Kegelschnitte, $F = 0$ der Ort der Punkte, deren Tangentenpaar an $K' = 0$ durch das an $K = 0$ gezogene Tangentenpaar harmonisch getheilt wird, so sind:

$$2K - \lambda\left[K\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}\right) + K'\right] + \frac{\lambda^2}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} F = 0$$

und

$$F - \lambda\,[K'(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + K] + 2\lambda^2 K' = 0$$

die Gleichungen zweier einander projectivischer Systeme von Kegelschnitten, von denen das eine so beschaffen ist, dass das von einem beliebigen Punkte irgend eines Kegelschnittes dieses Systems an den demselben λ-Werthe entsprechenden Kegelschnitt des Büschels gezogene Tangentenpaar harmonisch getheilt wird durch das von diesem Punkte an $K = 0$ gezogene Tangentenpaar. Das andere System hat dieselbe Eigenschaft dem Büschel gegenüber, beziehungsweise $K' = 0$. Das Erzeugnis beider Systeme ist eine Curve achter Ordnung, deren Schnittpunkte sich mit den Seiten des den Elementen des Büschels gemeinschaftlichen sich selbst conjugirten Dreiecks in vier Punktepaare einer Involution gruppiren, deren Doppelpunkte die Ecken jenes Dreiecks sind. Mz.

Myjkowski. Lösung von zwei Aufgaben aus der analytischen Geometrie. Pr. Wadowice. (Polnisch.).

Dn.

Genese, T. R. Terry, Wolstenholme, Evans. Solutions of a question (6119). Educ. Times XXXIII. 27-28.

Bezeichnet man mit Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 die Längen von vier parallelen Sehnen einer Ellipse und mit (1.2), (1.3), (1.4), (2.3), (2.4), (3.4) die Entfernungen zwischen ihnen, so ist

$$+(2.3).(2.4).(3.4).\Delta_1^2 - (1.3).(1.4).(3.4).\Delta_2^2$$
$$+(1.2).(1.4).(2.4).\Delta_3^2 - (1.2).(1.3).(2.3).\Delta_4^2 = 0.$$

Diesen Satz hat übrigens, wie Herr Hall bemerkt, schon Savary in seiner Arbeit über die Bahnen der Cometen, Conn. des Temps 1830 p. 65, aufgestellt. O.

R. Knowles, C. H. Sampson. Solutions of a question (6239). Educ. Times XXXIII. 62-63.

Die kleine Axe einer Ellipse *SA* sei gleich der Entfernung zwischen ihren Brennpunkten. *PSP'* sei eine durch den Brennpunkt gehende Sehne der Parabel, deren Brennpunkt in *S* und deren Scheitel in *A* liegt. *AP* und *AP'* endlich mögen die Ellipse in *Q* und *Q'* schneiden. Dann ist *QSQ'* ein rechter Winkel.

O.

R. Knowles, D. Edwardes. Solutions of a question Educ. Times XXXIII. 44-45.

Von einem Punkte *P* einer Parabel sind Lothe *PM* und *PN* auf die Directrix und die Axe gefällt. Dann ist der Ort der Punkte *Q*, welche *MN* in einem constanten Verhältnis theilen, eine coaxiale Parabel. O.

Moret-Blanc. Solution d'une question (1326). Nouv. Ann. (2) XIX. 462-464.

Im Innern eines Dreiecks wird ein Punkt *M* gesucht, der so beschaffen ist, dass, wenn man von ihm Lothe auf die Seiten fällt, das Dreieck in 3 Vierecke zerlegt wird, deren Flächeninhalte in gegebenem Verhältnis stehen. Die Lösung ist analytisch. Der Punkt ergiebt sich als Schnittpunkt zweier Hyperbeln. Aus deren Lage folgt ferner, dass, wenn die Lösung überhaupt möglich ist, es nur eine solche giebt. O.

J. Mayer. Zur Trisection des Winkels. Casopis IX. 44. (Böhmisch.).

Enthält Erwägungen über frühere diese Aufgabe betreffende Notizen, welche in derselben Zeitschrift mitgetheilt wurden.

Std.

J. S. Vaněček. Schiebung eines Winkels in seiner Ebene. Casopis IX. 160. (Böhmisch.).

Enthält Bestimmungen von geometrischen Oertern, die in verschiedenen Fällen auftreten, wenn ein constanter Winkel um seinen festen Scheitel gedreht wird. Std.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Gerade und Kegelschnitte in analytischer Behandlung von J. J. Walker, Wolstenholme, G. Turriff, C. K. Pillai, R. Graham, A. W. Scott, Townsend, R. Rawson, Hall, W. E. Wright, C. Bickerdike, Lannes finden sich Educ. Times XXXIII. 28-29, 38-39, 47-48, 93-94, 110, 112; Nouv. Ann. (2) XIX. 510-513.

O.

Lösungen von Aufgaben über geometrische Oerter und Enveloppen, die auf Gerade und Kegelschnitte führen, von T. Morley, H. Murphy, Nash, J. L. Kitchin, E. W. Symons, R. Knowles, Wolstenholme, Scott, J. E. A. Steggall, Robaglia finden sich Educ. Times XXXIII 45-46, 52-53, 56-57, 76-77, 86; Nouv. Ann. (2) XIX. 468-470.

O.

D. Andere specielle Raumgebilde.

A. Hall. On a curve of the fourth degree. Wash. Bull. I. 30.

Das Vorliegende ist ein Auszug aus einer Arbeit über folgenden Gegenstand: Durch den Brennpunkt einer Ellipse geht eine Gerade, welche die Ellipse in D und E trifft, und in der Mitte von DE ist ein Loth zu DE errichtet. Es soll die Gestalt und der Flächeninhalt der von diesem Loth umhüllten Curve ermittelt werden, wobei die Sehne DE, die stets denselben Brennpunkt enthält, alle möglichen Lagen annimmt. Hat die Ellipse die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

d ist m die Tangente des Winkels, welchen die veränderliche hne DE mit OX bildet, so ist die Gleichung eines der in Rede henden Lothe:

$$a^2ym^3+(a^2x-c^2)m^2+b^2ym+b^2x=0, \qquad (c^2=a^2-b^2).$$

lglich ist die Gleichung der Umhüllungscurve aller dieser Lothe:

$$4a^2b^4y^4+(8a^4x^2+20a^2c^2x-c^4)b^2y^2+4x(a^2x-c^2)^3=0,$$

raus folgt, indem $h=\frac{c^2}{a^2}$ gesetzt wird:

$$y=\pm\frac{a}{8b}(\sqrt{h}\pm\sqrt{h+8x})^{\frac{1}{2}}\;(3\sqrt{h}\mp\sqrt{h+8x})^{\frac{3}{2}}.$$

Hieraus ergiebt sich leicht die Gestalt der fraglichen Curve id ihr Inhalt A. Es ist:

$$\frac{4b}{a}A=\int_{-\frac{h}{8}}^{h}(\sqrt{h}+\sqrt{h+8x})^{\frac{1}{2}}\;(3\sqrt{h}-\sqrt{h+8x})^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$-\int_{-\frac{h}{8}}^{0}(\sqrt{h}-\sqrt{h+8x})^{\frac{1}{2}}\;(3\sqrt{h}+\sqrt{h+8x})^{\frac{3}{2}}\,dx,$$

id folglich:

$$A=\frac{c^6\pi}{8a^3b}.$$

Mz.

[. HART. On the focal conics of a bicircular quartic. Proc. L. M. S. XI. 143-145.

Der Herr Verfasser erwähnt zunächst das bekannte Theorem, ass eine bicirculare Curve vierten Grades auf vier verschiedene rten erzeugt werden kann als Umhüllungscurve eines variablen reises, dessen Centrum sich auf einem gegebenen Kegelschnitt lem Focalkegelschnitt der Curve vierten Grades) bewegt, und er dabei stets einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet. 'erner hat das einem dieser Kreise und dem zugehörigen Focalegelschnitt gemeinsame sich selbst conjugirte Dreieck zu Ecken

die Centren der drei andern festen Kreise. Hiervon ausgehend entwickelt der Herr Verfasser die Gleichungen der vier Kreise, sowie der vier zugehörigen Kegelschnitte und giebt noch einige andere Relationen. Mz.

H. M. Jeffery. On plane and spherical curves of the fourth class with quadruple foci. Rep. Brit. Ass. 1880.

Alle Quartiks mit vierfachen Brennpunkten können dargestellt werden durch die geometrische Relation

$$kp^4 = qr + \lambda,$$

wenn die Liniencoordinaten p, q, r den vierfachen Focus P und Q und R die Foci des Satellitenkegelschnitts bezeichnen. Die Arbeit untersucht die möglichen Quartiks in einer Gruppe, in der P, Q und R unverändert bleiben, während die Parameter k und λ variirkn. Giebt es in einer Gruppe kritische bitangentiale Quartiks, so wird die wechselseitige Relation von k und λ dargestellt in einer ebenen Curve, deren Coordinaten sie sind. Dieser Ort theilt die Ebene in Regionen. In einigen derselben sind keine Quartics möglich, und wenn k und λ Punkte auf der begrenzenden Curve darstellen, existiren kritische Quartiks mit reellen oder imaginären Doppeltangenten. In den anderen Regionen treten Quartiks auf, welche ihren Character verändern, wenn k oder λ Null wird. Csy. (O.)

G. Frattini. Risoluzione di sei equazioni fra nove quantità. Battaglini G. XVIII. 174-177.

Auflösung eines Problems, welches mit einer Curve fünfter Ordnung in Verbindung steht, die drei Doppelpunkte besitzt.

No.

Bourguet. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XIX. 236-240.

Enthält die Lösung zweier Fragen. Die erste heisst: Der Scheitelpunkt eines rechten Winkels beschreibt eine Ellipse,

ährend sich der eine Schenkel um den Mittelpunkt dreht: Zu estimmen die Enveloppe der anderen Seite. Es ergiebt sich ine Curve sechsten Grades. Die zweite Frage fordert den rt der Brennpunkte von Kegelschnitten, welche einem Viereck inbeschrieben sind. Es ergiebt sich eine Curve dritten Grades, elche durch die Ecken der Vierecke geht. O.

Lösungen von Aufgaben über geometrische Oerter und Enveloppen, welche auf Curven von höherem als dem zweiten Grad führen, von Wolstenholme, G. Heppel, Ch. Ladd, G. Turriff, R. Knowles, J. E. Steggall, E. Fauquembergue, A. Droz finden sich Educ. Times XXXIII. 40-41, 62, 104; Nouv. Ann. (2) XIX. 460-461, 526-527.

O.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Curven von höherem als dem zweiten Grade in analytischer Behandlung von G. Heppel, C. Bickerdike, J. J. Sylvester, J. J. Walker, W. J. C. Sharp finden sich Educ. Times XXXIII. 39-40, 79, 85-86, 92-93.

O.

A. Victor. Die Polkreispaare einer Cykloide. Schlömilch Z. XXV. 263-271.

Rollt ein Kreis k auf einer festen Kreisbahn K, so beschreibt irgend ein mit dem beweglichen Kreise k starr verbunden gedachter Punkt eine cyclische Curve. Dieselbe Curve lässt sich beschrieben denken durch einen Kreis k_1, welcher sich auf einer mit k concentrischen Kreisbahn K_1 rollend bewegt. Sind b und b_1 die bezüglichen Entfernungen des beschreibenden Punktes von den Mittelpunkten der rollenden Kreise und φ und φ_1 die Winkel, welche die Centrallinien jedes Kreispaars, durch welche die Curve erzeugt wird, mit einer gemeinschaftlichen bestimmten Anfangslage einschliessen, so ist, wenn R, R_1, r, r_1 die bezüg-

lichen Radien bedeuten,

$$R-r=b_1,\quad R_1-r_1=b,\quad \frac{r}{R}+\frac{r_1}{R_1}=1,\quad \frac{R}{r}\varphi=-\frac{R_1}{r_1}\varphi_1.$$

Schn.

G. Fouret. Sur quelques questions concernant les cycloides et épicycloides. Nouv. Ann. (2) XIX. 63-68.

Im Anschluss an die Lösung einer Reihe von Aufgaben in den Nouv. Ann. leitet der Verfasser mehrere Sätze her, von denen der folgende zur Charakteristik herausgenommen werden möge: Der Ort der Punkte, welche die Normalen einer Cycloide in constantem Verhältnis theilen, ist eine Cycloide. O.

G. Fouret. Sur la construction de la tangente à la courbe $\varrho=\frac{f(\omega)}{\omega+\varphi(\omega)}$, $f(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ désignant des fonctions rationnelles des lignes trigonométriques de l'angle ω, de ses multiples ou de ses parties aliquotes. Nouv. Ann. (2) XIX. 28-42. V.

J. M. Ingalls. Curves of pursuit. Analyst VII. 89-96, 117-118.

Lösung des bekannten Verfolgungsproblems mit eingehender Discussion der Form der Curve für eine Reihe besonderer Fälle. Glr. (O.)

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

Anonym. Repetitorium der analytischen Geometrie. Halle. Nebert.

Zusammenstellung und theilweise Ableitung der wichtigsten Sätze aus der analytischen Geometrie des Raumes über Punkte,

Gerade, Ebenen, Oberflächen zweiter Ordnung und die Wellenfläche. Den Schluss bilden die Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie. Schg.

W. Jung. Beitrag zur Theorie der Rotationsflächen.
Časopis IX. 216. (Böhmisch.).

Beschäftigt sich mit der Bedingung, wann die Gleichung

$$(a_1x+a_2y+a_3z+a_4)\frac{\partial z}{\partial x}+(b_1x+b_2y+b_3z+b_4)\frac{\partial z}{\partial y}= c_1x+c_2y+c_3z+c_4$$

eine Rotationsfläche zum Ausdruck bringe. Std.

Desmartres. Sur les surfaces à génératrices circulaires.
N. C. M. VI. 193-201, 300-305, 337-341.

Die Normalen in den verschiedenen Punkten einer durch einen Kreis erzeugten Fläche längs eines dieser erzeugenden Kreise schneiden ausser der Axe dieser Generatrix einen festen Kegelschnitt, der zur Construction der Normalen benutzt werden kann. Sind die erzeugenden Kreise geodätische Linien der erzeugten Fläche, so ist sie eine Kugel oder ein Cylinder.

Mn. (O.)

W. Řehořowský. Ueber developpable Flächen.
Časopis IX. 31-43, 60-71, 161-180, 223-256. (Böhmisch).

Bezeichnen α, β, γ, δ Functionen einer einzigen Variablen t, so stellen die Gleichungen der Geraden

$$y=\alpha x+\beta,\quad z=\gamma x+\delta$$

eine developpable Fläche dar, wenn die Bedingung stattfindet

$$\alpha'\delta'=\beta'\gamma',$$

wobei α', β' ... die ersten Derivationen von α, β, ... in Bezug auf t sind.

Von diesen Gleichungen ausgehend, wird die allgemeine Theorie der developpablen Flächen analytisch entwickelt. Namentlich gelangen folgende Probleme zur Behandlung: Die Rückkehrkante, ihre Schmiegungs- und Normalebene, Haupt- und Binormale, ihre Krümmungskreise erster und zweiter Krümmung, Osculationskugel, ihre Asymptoten und asymptotischen Ebenen, stationäre Punkte und Ebenen, rectificirende Developpable, Polare, Polarenfläche und ihre Rückkehrkante.

Durch Integration der entsprechenden Differentialgleichungen werden diejenigen developpablen Flächen bestimmt, bei welchen der Krümmungs- und Torsionshalbmesser der Rückkehrkante

a) einander gleich und constant,

b) ungleich, aber constant sind,

c) in constantem Verhältnisse zu einander stehen.

In allen drei Fällen ergeben sich developpable Schraubenflächen als die gesuchten Flächen.

Zum Schluss werden die Gleichungen der Evolventen der Rückkehrkante, der Doppelcurven, der geodätischen Linien und ebenen Schnittcurven der developpablen Fläche, sowie die Gleichung ihres Richtungskegels abgeleitet. Std.

A. Voss. Zur Theorie des Riemann'schen Krümmungsmasses. Clebsch Ann. XVI. 571-576.

Der Verfasser leitet eine Formel her, welche den Zusammenhang zwischen den Krümmungsmassen der n-fachen und der in ihr enthaltenen m-fachen Mannigfaltigkeit darstellt, und beweist dadurch einen Satz, der sich in Riemann's Werken p. 382, 261 findet, und zu dem Dedekind unter Zugrundelegung der von Riemann gegebenen Vorschriften die zugehörige Rechnung entwickelt hat. Hieran schliesst sich eine der Riemann'schen analoge Transformation des Linienelements in der m-fachen Mannigfaltigkeit. H.

A. Voss. Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten. Clebsch Ann. XVI. 129-178.

Das Gegenwärtige steht nach Angabe des Verfassers zu den Arbeiten von Lipschitz, welche dasselbe mit enthalten, in dem Verhältnis, dass es die genannte Transformation durch directe Rechnung bewerkstelligt und die Integrationsbedingungen in vollständigerer Form aufstellt. Aus einer n-fachen Mannigfaltigkeit M_n wird durch $n-m$ Coordinatenrelationen eine m-fache Mannigfaltigkeit ausgeschieden und die Werthe der zweiten partiellen Differentialquotienten nach den m unabhängig bleibenden Parametern entwickelt, dann durch neue Differentiation eliminirt. Die resultirenden Gleichungen sind die Bedingungen der Integrabilität des so erhaltenen Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Unter ihnen ist die dem Gauss'schen Ausdruck des Krümmungsmasses entsprechende Relation enthalten. Hier wie im Folgenden ist keine lineare Mannigfaltigkeit zu Grunde gelegt, vielmehr die M_n als beliebig gekrümmt und die Coordinaten und Abstände als Kürzeste auf M_n gedacht; dagegen beschränkt sich jetzt die Untersuchung auf $m = n - 1$. Es werden die geodätischen Linien auf M_n, dann die Hauptkrümmungsrichtungen auf M_{n-1} bestimmt, und es ergiebt sich der Ausdruck der Krümmung eines Normalschnitts, dessen Maxima und Minima Hauptkrümmungen entsprechen. Ferner wird die Bedingung aufgestellt, unter der auf M_{n-1} sich in allen Richtungen Linien ziehen lassen, die geodätisch auf M_n sind. Ist sie erfüllt, so enthält die M_n ein System von n-fach unendlich vielen M_{n-1} constanter Krümmung. Ferner wird ein besonderer Fall für constante und ein anderer für variable Krümmung, wo alle Punkte Nabelpunkte sind, dann die nothwendigen Bedingungen, damit eine n-fach unendliche Schaar geodätischer Linien mit linearen Gleichungen vorhanden sei, gefunden. Weiter wird untersucht, in wieweit die geometrischen Constructionen, die mit dem Begriff der Hauptkrümmungsradien einer Fläche zusammenhängen, ihre Analogie bei den hier betrachteten speciellen Räumen haben. Für den Raum constanten Krümmungsmasses bleibt die Monge'sche Construction der Richtungen der Krümmungslinien giltig und die Längen der geodätischen Normalen, welche den Krümmungslinien entsprechen, constant. Ferner wird gefragt, ob die Abbildung des Normalen-

systems, auf welche Gauss den Begriff des Krümmungsmasses einer Fläche gründete, bei höheren Mannigfaltigkeiten ihre Analogie fänden. In Betreff der M_{n-1} von verschwindendem Krümmungsmass, zu der sich nun die Untersuchung wendet, ergiebt dieselbe, dass in jedem Punkte eine ausgezeichnete Richtung existirt, nach welcher die geodätische Linie der M_n die M_{n-1} vierpunktig berührt. Ferner ergeben sich die Grössen, welche bei Biegung der M_{n-1} unverändert bleiben, und manche andere Resultate. H.

H. Hovestadt. Beitrag zur Krümmungstheorie. Pr. Münster.

Als umfassende n-fache Mannigfaltigkeit für alle Gebilde wird eine lineare angenommen, und es werden rechtwinklige lineare Coordinaten in Anwendung gebracht. Den Hauptgegenstand der Untersuchung bilden krumme Linien und Flächen bei dieser n-fachen Variation. Bei beiden handelt es sich nur um erste Krümmung. Das Ziel ist, das Krümmungsmass der Flächen und seinen Ausdruck in Differentialquotienten der Coefficienten des Linienelements zu finden. Vor dessen Erreichung dehnt sich indess die Rechnung auf mancherlei damit in Verbindung stehende Gegenstände aus. H.

Jar. Simonides. Ueber die Krümmung der Flächen. Casopis IX. 267. (Böhmisch).

Enthält eine neue Ableitung einiger Fundamentalformeln aus der allgemeinen Krümmungstheorie. Std.

De Salvert. Note sur l'expression du rayon de courbure de la section normale d'une surface. Ann. Soc. scient. Brux. IV. B. 91-96.

P. Mansion. Sur le même sujet. Ann. Soc. scient. Brux. IV. A. 55-57.

Bestimmung der Krümmungsradien für den Fall, dass die Gleichung der Fläche in impliciter Form gegeben ist.

Mn. (O.)

R. R. Webb. Some applications of a theorem in solid geometry. Messenger (2) IX. 170-178.

Anwendungen der Formel:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{dl}{dx}+\frac{dm}{dy}+\frac{dn}{dz},$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien in einem Punkte einer Oberfläche sind. Denkt man sich eine specielle geschlossene Fläche und den inneren Raum derselben nach einem bestimmten Gesetz mit Oberflächen angefüllt, so dass die begrenzende Fläche zu dem System gehört, so ist, wie in der vorliegenden Arbeit bewiesen wird, $\iiint\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)dx\,dy\,dz$ gleich der Oberfläche der äusseren Fläche. Dieser Satz wird speciell auf die Kugel und das Ellipsoid angewandt. Der Satz wird ferner benutzt, 1) um im Raum die Winkelgeschwindigkeit der Ebene zu bestimmen, welche bei der Bewegung fester Körper die augenblickliche Axe und die unveränderliche Linie enthält; 2) um die Summe der Hauptkrümmungen in einem Punkt einer Oberfläche zu bestimmen, welche sich nur wenig von einer Kugel unterscheidet.

Glr. (O.)

S. Lie. Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation. Darboux Bull. (2) IV. 300-304

Die Arbeit vervollständigt und vereinfacht die bereits vorhandene Lösung der Aufgabe, auf den oben bezeichneten Flächen die Krümmungslinien zu bestimmen. Sind ϱ, ϱ' die Hauptkrümmungsradien der beliebigen Fläche F, so bestimmt $\varrho=$ const. eine Schaar geodätischer Parallelen auf der Mittelpunktsfläche. Diese werde von der Schaar Kürzester $q=$ const. rechtwinklig geschnitten. Für den Fall, wo zwischen ϱ und ϱ' eine Relation

besteht, hat nun Weingarten das Linienelement auf der Mittelpunktsfläche in der Form dargestellt:

$$ds^2 = d\varrho^2 + e^{2\int \frac{d\varrho}{\varrho - \varrho'}} dq^2,$$

woraus hervorgeht, dass die Mittelpunktsfläche auf einer Rotationsfläche abwickelbar ist. Auf solchen Flächen sind die geodätischen Linien bekannt. Nach Bour's Bestimmung wird jedoch der Fall constanter Krümmung der Fläche als Ausnahme betrachtet. Lie vermeidet jede Ausnahme, indem er so verfährt: Bezeichnen x, y, z die cartesischen Coordinaten eines Punkts der Urfläche, denen ξ, η, ζ auf der Mittelpunktsfläche entsprechen, so ist nach Weingarten's Formel:

$$q = \int e^{-\int \frac{d\varrho}{\varrho - \varrho'}} \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - d\varrho^2}$$

und, wenn man ξ, η, ζ, ϱ, ϱ' durch x, y ausdrückt,

$$q = \int e^{-\int \frac{d\varrho}{\varrho - \varrho'}} (X dx + Y dy),$$

wo X, Y bekannte Functionen von x, y sind. Den so bestimmten Kürzesten entsprechen die Krümmungslinien auf F.

H.

A. Fais. Sulle principali proprietà delle traiettorie ortogonali delle generatrici delle superficie rigate. Mem. di Bologna (4) I. 67-97.

Schneiden die Curven A auf einer Regelfläche die erzeugenden Geraden MH rechtwinklig in den Punkten M und ist Θ der Winkel zwischen der Hauptnormale von A und der Erzeugenden, ϱ der Krümmungsradius von A, so sind

$$\frac{1}{P} = \frac{\cos\Theta}{\varrho}, \quad \frac{1}{R} = \frac{\sin\Theta}{\varrho}$$

die geodätische Krümmung und Torsion der Regelfläche. Hat eine Curve A von einer andern A_1 den constanten Abstand a

und bilden im Durchschnitt mit einer Erzeugenden ihre Tangenten den Winkel β, so hat man die Relation:

$$\frac{a}{P} - \frac{a}{R}\cot\beta = 1.$$

Die geodätischen Krümmungs- und Torsionsradien der Curven A und A_1 sind verbunden durch die Relationen:

$$R_1 = \frac{R^2(P-a)^2 + a^2P^2}{P^2R},$$

$$P_1 = \frac{R^2(P-a)^2 + a^2P^2}{PR^2 - a(P^2+R^2)};$$

auch finden die Beziehungen statt:

$$\frac{1}{RR_1} = \frac{\sin^2\beta}{a^2}, \quad \frac{(P-a)(P_1-a)}{PP_1} = \cos^2\beta.$$

Diese Relationen werden durch Figurbetrachtung hergeleitet, dann angewandt auf die Berechnung der Krümmung der Fläche, dann die Werthe der P, R für den Centralpunkt einer Erzeugenden bestimmt; zwischen letztern und den allgemeinen P, R ergeben sich fernere Relationen. Es wird dann der Fall untersucht, wo eine Curve A Kürzeste ist, und gefunden, dass sie dann die Curve der Centralpunkte (linea di stringimento), die Fläche der Ort ihrer Binormalen ist. Weiter wird der Ort der Binormalen einer Curve constanter Torsion und auf ihr zwei Linien A, zugleich der Ort des Durchschnitts der Binormalen mit der Krümmungsaxe der A betrachtet. Es ergiebt sich, dass das anharmonische Verhältnis der vier Schnittpunkte der vier Linien constant ist. Dieselben Punkte bilden eine harmonische Gruppe, wenn die eine der beiden A die Urcurve selbst ist. Ferner wird die Biegung der Urcurve, bei welcher die Erzeugenden der Fläche mit deren Hauptnormalen zusammenfallen, in Betracht gezogen, wo die geodätische Krümmung und Torsion in die Krümmung und Torsion der Curve übergeht. Dann wird bewiesen, dass, wenn eine Curve A Krümmungslinie ist, die Regelfläche abwickelbar sein muss. Mehrere der Resultate sind bereits von genannten Autoren gefunden. H.

L. Bianchi. Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung. Clebsch Ann. XVI. 577-582.

Als Resultat der Untersuchung wird folgender Satz bezeichnet: Die Complementarfläche einer Fläche mit constanter negativer Krümmung in Bezug auf ein System von geodätischen Linien, die aus einem Punkte der Fläche verlaufen, ist auf einer Rotationsfläche abwickelbar, die zur Meridiancurve eine gewöhnliche Tractrix, eine verkürzte oder verlängerte Tractrix und zur Axe die Asymptote hat, je nachdem der gemeinsame Punkt der geodätischen Linien unendlich entfernt, reell und im Endlichen oder imaginär ist. H.

S. Lie. Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. III. Arch. f. Math. og Nat. V. 282-306.

Man kannte lange keine anderen speciellen Flächen constanter Krümmung als die betreffenden Rotations- und Schraubenflächen. Dann zeigte Enneper (Gött. Nachr. 1868), dass es eine Familie von Flächen constanter Krümmung gäbe, deren Krümmungslinien des einen oder beider Systeme eben oder sphärisch sind, und gleichzeitig gab er eine Bestimmung dieser interessanten Flächen.

Einen wichtigen neuen Fortschritt in dieser Theorie leitete Bianchi (Richerche sulle superficie a curvatura costante, Pisa 1879) her aus Weingarten's berühmtem Satze über die Centerflächen aller Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind. Jede Fläche F constanter Krümmung lässt sich nämlich auf einfach unendlich viele Weisen auffassen als die eine Schale der Centerfläche einer Fläche, deren Krümmungsradien constante Differenz haben. Dabei hat die zweite Schale Φ_1 der Centerfläche ebenfalls constante Krümmung. Aus einer vorgelegten Fläche F constanter Krümmung leitet daher Bianchi einfach unendlich viele neue derartige Flächen Φ_1 ab, deren endliche Gleichung aufgestellt werden kann, wenn die geodätischen Curven der Fläche F bekannt sind. Hierzu fügte der Verfasser in einer früheren Arbeit (s. F. d. M. XI. 1879. p. 530) die wichtige

Bemerkung, dass, wenn die geodätischen Curven der Fläche F gegeben sind, nicht allein die Flächen Φ_1, sondern gleichzeitig auch die geodätischen Curven jeder Fläche Φ_1 gefunden werden können. In Folge dessen kann man dieselbe Operation auf jede Fläche Φ_1 anwenden und dadurch zweifach unendlich viele Flächen constanter Krümmung Φ_2 bestimmen, gleichzeitig aber auch ihre geodätischen Curven durch Quadratur finden, u. s. w.

Durch n-fache Wiederholung der betreffenden Operation findet man daher eine Fläche Φ_n constanter Krümmung, deren Gleichung n Parameter enthält. Hier ergiebt sich nun die wichtige Frage, ob diese n Parameter sämmtlich wesentlich sind, oder ob möglicherweise ihre Anzahl erniedrigt werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird diese schwierige Frage behandelt, aber nicht allgemein erledigt. Es wird gezeigt, dass die n Parameter jedenfalls unabhängig sind, wenn die Zahl n nicht grösser als neun ist.

Bianchi hat selbst seine Operation einmal auf die Pseudosphäre angewandt. Die hierdurch gefundenen Flächen constanter Krümmung haben indess eine Schaar ebener und eine Schaar sphärischer Krümmungslinien und sind daher specielle Fälle der Enneper'schen Flächen. Wendet man dieselbe Operation noch einmal auf die gefundenen Flächen an, so erhält man ebenfalls Enneper'sche Flächen, für welche die Krümmungslinien der einen Schaar sphärisch sind, während die der zweiten Schaar auf gewissen algebraischen Flächen liegen, u. s. w. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man beliebig viele Flächen constanter Krümmung, die früher nicht bekannt waren.

L.

S. Lie. Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung IV. Arch. f. Math. og Nat. V. 328-358.

Diese Abhandlung giebt eine eingehende Behandlung des in der vorangehenden gestellten schwierigen Problems. Es wird gezeigt, dass der Inbegriff aller Flächen constanter Krümmung, die durch unendlichmalige Wiederholung von Bianchi's

Operation aus einer vorgelegten derartigen Fläche hergeleitet werden, keine andere partielle Differentialgleichung als

$$(1) \qquad s^2 - rt = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{a^2}$$

befriedigen. Sie bilden daher das, was Ampère und seine Nachfolger ein allgemeines Integral von (1) genannt haben. Hierbei ist indess zu bemerken, dass Ampère's Definition eines allgemeinen Integrals nicht zutreffend ist. Man betrachte in der That z. B alle Integralflächen von (1), die in eine vorgelegte ganz beliebige Fläche eingeschrieben sind. Diese Integralflächen genügen keiner anderen partiellen Differentialgleichung als (1) und bilden daher nach Ampère's Definition ein allgemeines Integral von (1); und doch giebt es ausser diesen Integralflächen noch weitere Integralflächen von (1), die keine singulären Integrale sind.

Die vorliegende Abhandlung leistet daher allerdings nicht die vollständige Integration von (1); jedenfalls ist dies nicht bewiesen. Doch giebt sie einen wichtigen Beitrag zur Integration von (1). Sie lehrt nämlich, aus einer beliebigen Fläche constanter Krümmung mit bekannten geodätischen Curven ∞^∞ derartige neue Flächen durch successive Quadraturen herzuleiten. Auf allen diesen Flächen können sowohl die geodätischen Curven wie die Krümmungslinien und die Haupttangentencurven bestimmt werden.

Durch Verknüpfung der entwickelten Theorie mit bekannten Theorien findet man ∞^∞ Flächen constanter mittlerer Krümmung, ∞^∞ Flächen, deren Hauptkrümmungsradien constante Differenz besitzen, und ebenfalls ∞^∞ Integralflächen von einigen anderen interessanten partiellen Differentialgleichungen.

L.

S. Lie. Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. V. Arch. f. Math. og Nat. V. 518-541.

Durch ziemlich umständliche Rechnungen wird nachgewiesen, dass die partielle Differentialgleichung

$$(1) \qquad s^2 - rt = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{a^2}$$

ıur zu zwei anderen partiellen Differentialgleichungen (die beide maginär sind und keine willkürlichen Constante enthalten), in solcher Beziehung steht, dass diese mit ihr ∞^∞ Integrale gemein haben. Hieraus folgt nicht allein, dass (1) nicht nach Darboux's schöner Methode integrabel ist, und dass ihr Integral somit nicht Ampère's rster Classe angehört, sondern zugleich, dass auch nicht die on M. Lévy entwickelte Theorie zur Integration von (1) führen ann. L.

A. Enneper. Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien. Gött. Abh. XXIII., XXVI.

Die Arbeit ist eine sehr umfassende Monographie über den ezeichneten Gegenstand. In der Einleitung wird die Literatur lesselben ausführlich besprochen, namentlich die Untersuchungen on Monge, Joachimsthal, Bonnet und Serret. Die Grundlage ler Untersuchung bildet ein gewisser Satz von Joachimsthal nebst iner Erweiterung, welche ebenso wie der Satz selbst als speieller Fall im Satze von Bonnet enthalten ist. Dieser letztere autet: „Wird eine Fläche längs einer Krümmungslinie von einer weiten Fläche unter constantem Winkel geschnitten, so ist die Durchschnittslinie auch für die zweite Fläche Krümmungslinie.“ Seine Umkehrung ist folgende: „Ist die Durchschnittslinie zweier Flächen für jede von beiden Krümmungslinie, so schneiden sich lie Flächen unter constantem Winkel.“ Da nun auf der Kugel ınd in der Ebene, als Grenzfall der Kugel, jede Curve als Krümmungslinie betrachtet werden darf, so folgt der Joachimsthal'sche Satz, dass jede plane oder sphärische Krümmungslinie einer Fläche in einer solchen Ebene oder Kugel liegt, welche jene Fläche unter constantem Winkel schneidet. Der Herr Verfasser hat sich nun die Aufgabe gestellt, die Betrachtungen in methodischer Beziehung möglichst zu vereinfachen und einen bequemen Formelapparat für dieselben im Anschluss an die allge-

meinen Methoden der Flächentheorie zu schaffen, während i den früheren Untersuchungen es natürlich zunächst auf die Re sultate ankam, und die Methoden, nach denen die einzelnen Fragen untersucht wurden, zum Theil ganz verschiedenartig waren Der erste Theil des Werkes beschäftigt sich mit den Flächen, fü welche ein System von Krümmungslinien plan ist. Es werden zunächst einige weitere allgemeine Folgerungen aus den obei citirten Sätzen gezogen; dann wird die Aufgabe durchgeführt allgemein die Flächen mit einem System planer Krümmungs linien analytisch darzustellen. Als der allgemeinste Fall wir derjenige untersucht, in dem die Ebenen der Krümmungslinien die Normalebenen einer räumlichen Curve sind.

Daran schliesst sich die Untersuchung speciellerer Fälle Zuerst wird vorausgesetzt, dass die Ebenen der Krümmungs linien die Normalen der Fläche in sich enthalten. In diesem Fall sind die betreffenden Krümmungslinien zugleich geodätische Linien Dann wird vorausgesetzt, dass die Ebenen Normalebenen einer ebenen Curve, und noch specieller, dass sie Normalebenen einer Geraden sind. Ein folgender Abschnitt behandelt den Fall ge rader Krümmungslinien, welcher nur bei abwickelbaren Flächen vorkommt. In allen diesen besonderen Fällen vereinfacht sich die Betrachtung wesentlich. Ein besonderes Interesse haben auch die Fälle, in welchen entweder beide Systeme plan, oder das eine System plan, das andere sphärisch ist. Zuletzt werden noch einige allgemeine Beziehungen aufgestellt. Nennt man, ab weichend vom gewöhnlichen Sprachgebrauch, zwei Flächen pa rallel, wenn in entsprechenden Punkten die Hauptrichtungen pa rallel sind, so folgt, dass jede Fläche S mit planen Krümmungs linien parallel ist der Enveloppe einer einfachen Schaar von Kugeln, welche alle durch einen Punkt gehen; sind die Krüm mungslinien gleichzeitig geodätische, so sind die Radien jener Kugeln einander gleich.

Der zweite Theil behandelt speciell die Flächen mit sphä rischen Krümmungslinien, zu deren Untersuchung wesentlich an dere Hülfsmittel herangezogen werden müssen. Von den Resul taten sind folgende hervorzuheben: Sind die Kugelflächen eine

Systems von sphärischen Krümmungslinien concentrisch, so ist das andere System plan. Gehen die Kugelflächen sämmtlich durch einen Punkt, so ist für die durch reciproke Radien in Bezug auf diesen transformirte Fläche das entsprechende System plan, da die Krümmungslinien sich bei dieser Transformation erhalten. Jede Fläche mit zwei Systemen sphärischer Krümmungslinien ist Parallelfläche einer solchen Fläche, welche durch reciproke Radien transformirt werden kann in eine Fläche mit einem System planer Krümmungslinien.

Die allgemeine Aufgabe der analytischen Darstellung der Flächen mit sphärischen Krümmungslinien, welcher der Abschnitt XII. des Werkes gewidmet ist, hat der Verfasser dadurch vollständiger erledigen können, als Bonnet und Serret, dass er den Ausgang nicht von der Curve genommen hat, auf welcher die Centra der Kugeln liegen, sondern von einer anderen Curve, auf deren Tangentenfläche jene Curve liegt. Die Untersuchung behandelt wieder zuerst den allgemeinen Fall, dass die Curve der Kugelcentra doppelt gekrümmt und dann die speciellen, dass sie plan und dass sie gerade ist.

In einem Anhange werden noch einige Eigenschaften solcher Flächen besprochen, für welche ein System von Krümmungslinien geodätisch ist; dann wird die Fläche der Krümmungscentra mit besonderer Berücksichtigung der Flächen mit planen Krümmungslinien besprochen, und zum Schluss folgt die analytische Bestimmung der Flächen, deren eine Mittelpunktsfläche eine Kegelfläche zweiten Grades ist, mit Hülfe elliptischer Integrale. Die Arbeit ist sowohl hinsichtlich der neuen Resultate, als auch hinsichtlich der zusammenfassenden Darstellung des ganzen Problems von grossem Interesse. A.

A. v. Braunmühl. Ueber ein Problem des Minimums. Bair. Bl. XVI. 66-70.

Es wird die Frage aufgeworfen: „In welcher Ausdehnung besitzt der Aequator die Eigenschaft, kürzeste Linie zu sein?“ Es zeigt sich, dass nur auf Developpablen resp. auf solchen

Flächen, für welche wenigstens im Aequator die Krümmung gleich Null ist, der Aequator längs seiner ganzen Ausdehnung als geodätische Linie zu betrachten ist. Bemerkenswerth ist der bei dieser Gelegenheit gefundene Satz, dass die Länge des Aequators zugleich mit dem Krümmungsmass der Fläche gegeben ist.

Gr.

R. Hoppe. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Thl. I Leipzig. Koch.

R. Hoppe. Ueber die Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel. Grunert Arch. LXV. 287-306.

R. Hoppe. Ueber Parallelen geschlossener Curven. Grunert Arch. LXVI. 46-56.

Der Herr Verfasser hat die von ihm in einer Reihe von Abhandlungen (Grunert Arch. LV. 77-104, LVI. 41-84, LX. 376-401 über die Curventheorie und LIX. 225-322 über die Flächentheorie — Referate F. d. M. VI. 453, VIII. 479, IX. 516) gegebenen Untersuchungen zu einem Werke verbunden, welches in knapper und präciser Darstellung die Fundamente der analytischen Geometrie vereinigt. Da die einzelnen Theile des Werkes bereits besprochen sind, so möge hier nur auf die Grundauffassung des Verfassers hingewiesen werden, welche dem Werke ein eigenartiges Gepräge aufdrückt. Als Aufgabe der analytischen Geometrie wird bezeichnet, diejenigen Organe der geometrischen Forschung zu schaffen, welche bei aller weiteren Untersuchung nothwendig sind. Dass dies auf dem Wege der Rechnung geschieht, ist principiell nicht entscheidend. Aber die Rechnung ist das unersetzliche Mittel, die Identität von Problemen, den erreichten Standpunkt in deren Lösung klar zu stellen und die Resultate zur allgemeinsten Verwendung tauglich zu machen. Der Herr Verfasser schliesst eine Theorie der algebraischen Gebilde als solcher aus, da sie nicht das Wesen der analytischen Geometrie treffen, sondern nur eine Anwendung der allgemeinen Theorie sind.

Der Verfasser geht in der Curventheorie nach Feststellung der ersten Grundlagen, welche der Elementargeometrie entnommen sind, direct von drei Dimensionen aus, lässt also der Theorie der Raumcurven nicht erst eine solche der ebenen Curven vorhergehen, weil es erstens im Wesen der analytischen Methode liegt, vom Allgemeinen auszugehen, und weil zweitens der Wegfall einer Dimension in theoretischer Hinsicht nicht zu Vereinfachungen, sondern zu Complicationen führt. Denn wegen der Vertauschbarkeit hat man es wesentlich nur mit einer Dimension zu thun, was bei Beschränkung auf zwei Dimensionen nicht so evident und fruchtbringend ist. Die speciellen Eigenthümlichkeiten der Curventheorie des Verfassers sind in den früheren Berichten bereits eingehender besprochen. Dem Werke ist als Einleitung eine kurz gefasste Theorie der Determinanten vorausgeschickt. Die beiden oben genannten Abhandlungen enthalten die eingehendere Behandlung einiger specieller Abschnitte der Curventheorie.

Der Verfasser versteht unter der specifischen Gleichung einer Curve oder Curvenclasse die Relation zwischen dem Krümmungs- und dem Torsionswinkel

$$F(\tau, \vartheta) = 0,$$

d. h. zwischen denjenigen Variablen, deren Differentiale $d\tau$ und $d\vartheta$ die Contingenzwinkel der Normalebene bezw. der Schmiegungsebene sind. Durch sie ist die Natur der Curve, soweit sie von der Lage und vom Bogenelement unabhängig besteht, vollständig bestimmt. Durch die Integration dieser specifischen Gleichung erhält man drei willkürliche Constante, welche die Stellung der Curve gegen die Coordinatenaxe bestimmen. Ganz unabhängig davon kann das Bogenelement als Function der unabhängigen Variablen gegeben werden, und alsdann ergeben sich durch drei einfache Quadraturen die Coordinaten eines laufenden Punktes für eine specielle Curve, welche also mit allen nur durch die Wahl des Bogenelementes davon unterschiedenen Curven eine Classe bildet. Diejenigen Relationen, bei welchen es auf das Bogenelement nicht ankommt, nennt der Verfasser innere, und nur mit solchen inneren Relationen beschäftigt sich

die in zweiter Linie genannte Abhandlung, so dass, was von ei
Curve ausgesprochen wird, der ganzen Classe zukommt.

Wählt man als Urvariable den Krümmungswinkel τ,
zeichnet mit f, g, h die Richtungscosinus der Tangente, so d
f', g', h' diejenigen der Hauptnormale sind, nennt man endlich d
jenigen der Binormale l, m, n und bestimmt sie so, dass
Determinante

$$\begin{vmatrix} f & f' & l \\ g & g' & m \\ h & h' & n \end{vmatrix} = +1$$

ist, so kann man die Gleichung

$$f^2 + f'^2 + l^2 = 1$$

zerlegen in

$$f \cos \mu + f' \sin \mu = 1$$
$$f \sin \mu - f' \cos \mu = il,$$

wo μ eine complexe Variable bedeutet.

Hieraus leitet man durch die Substitution $\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{2r'}{r}$ d
Gleichung

$$r'' + i\vartheta' r' + \tfrac{1}{4} r = 0$$

ab, welche der Verfasser als die Differentialgleichung der Curv
schlechthin bezeichnet. Der Coefficient ϑ' in dieser Gleichun
ist gegeben, wenn die specifische Gleichung der Curve gegebe
ist. Jeder Lösung r der Differentialgleichung entspricht ein
zweite q, welche conjugirt zu $q_1 = r' e^{i\vartheta}$ ist. Das vollständig
Integral ist $Aq + Br$ und seine Constanten sind dann den Be
dingungen gemäss zu bestimmen, welche die neun Richtungs
cosinus verbinden. Die Auflösung dieser Differentialgleichung
und die Bestimmung der Curve durch dieselbe bildet nun den
ersten Theil der Arbeit.

Die allgemeine Methode wird dann auf einige besonders einfache Fälle angewandt. Es ergeben sich durch Betrachtung der vom Verfasser als begleitende Curven bezeichneten Gebilde ganze Reihen von Curven mit vollständig lösbaren specifischen Gleichungen. Namentlich zeigen sich interessante Beziehungen zwischen linear tordirten Curven, d. h. solchen, deren specifische

ichung linear ist:

$$\vartheta \cos\lambda - \tau \sin\lambda = 0, \qquad (\lambda \text{ constant})$$

l cyclisch tordirten, d. h. solchen mit der Gleichung

$$\vartheta^2 + \tau^2 = \operatorname{ctg}\lambda^2, \qquad (\lambda \text{ constant}).$$

Es zeigt sich z. B., dass eine linear tordirte Curve zur Evo- eine cyclisch tordirte hat.

Die zuletzt genannte Abhandlung behandelt die Parallelen chlossener Curven.

Unter Beibehaltung der obigen Bezeichnung sind die Glei- ngen einer Curve, welche zur Curve s im Abstande c pa- el ist, wenn x, y, z die laufenden Coordinaten der Curve s d:

$$x_1 = x + c(f' \cos\vartheta - l \sin\vartheta),$$

st den analogen. Statt ϑ darf auch gesetzt werden $(\vartheta + k)$, ϑ nur bis auf eine additive Constante bestimmt ist.

Ist nun s geschlossen, und entspricht dem Punkte L als An- gspunkt auf der Parallelen M, als Endpunkt N, dann sind y, z und die neun Richtungscosinus der Tangente, der Hauptnor- le und der Binormale periodisch, dagegen die durch Integrale inirten s, τ, ϑ im Allgemeinen nicht. Es ist deshalb nicht hig, dass N mit M zusammenfalle, oder dass die Parallelen er geschlossenen Raumcurve selbst geschlossen seien. Sollen geschlossen sein, so muss, wenn wir den Anfangswerth und ı Endwerth von ϑ mit ϑ_0 und $\vartheta_0 + \alpha$ bezeichnen, α entweder ll sein oder zu $4R$ in einem rationalen Verhältnis stehen. $\alpha = 0$, so umwindet die Parallele die Urcurve gar nicht, ist $= \pm 4R$, so umwindet sie dieselbe einmal im einen oder an- en Sinne, und so fort. Ist $\alpha = \pm \frac{p}{q} 4R$, so umwindet die rallele die Urcurve bei q Umläufen um die letztere p-mal im itiven oder negativen Sinne. Deformirt man eine Curve s, für lche dies der Fall ist, so dass die Curve s sowohl wie ihre rallelen geschlossen bleiben, so bleibt α stets $= \pm \frac{p}{q} \cdot 4R$, il bei einer unendlich kleinen stetigen Deformation q unver- dert bleiben muss, also $\Delta\alpha = 0$ ist. So wird z. B. eine

ebene Curve, deren Parallele geschlossen ist, wenn sie so deformirt wird, dass Urcurve und Parallele geschlossen bleiben, stets in eine Curve übergehen, für welche $\alpha = 0$, also ϑ periodisch ist.

Ein Beispiel einer Curve, für welche α nicht Null ist, ist

$$x = (\mu a - b \cos \mu\varphi) \cos \varphi$$
$$y = (\mu a - b \cos \mu\varphi) \sin \varphi$$
$$z = b \sin \mu\varphi,$$

wo μ eine ganze Zahl (oder auch eine rationale Zahl) ist. Der Verfasser weist nach, dass eine solche Curve nicht nothwendig geschlossene Parallelen zu haben braucht.

Um einen näheren Einblick zu gewinnen, wird nun der Einfluss einer unendlich kleinen Deformation einer Curve auf den Torsionswinkel genauer untersucht.

Es zeigt sich, dass eine Deformation eines unendlich kleinen Stücks eines Kreises bei beständig festgehaltener Stetigkeit der Tangente der Schmiegungsebene und der Torsion eine äusserst kleine Aenderung 15ter Ordnung im Torsionswinkel zur Folge hat, so dass eine Parallele äusserst wenig deformirt wird. Wesentlich grösser wird der Einfluss der Deformation, nämlich von der neunten Ordnung, wenn man von einer beliebigen Raumcurve ausgeht. A.

R. Hoppe. Ueber dreifach gekrümmte Curven und deren Parallelen. Grunert Arch. LXIV. 373-385.

Im Anschluss an seinen früheren Aufsatz (Einfachste Sätze aus der Theorie der mehrfachen Ausdehnungen, Grunert Arch. LXIV. 189-214. Ref. F. d. M. XI. 1879. 352) baut der Herr Verfasser auf rein analytischem Grunde eine Theorie der Curven in einer Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen auf. Die Gesetze des Fortschritts bei dem Uebergang zu einer neuen Dimension ergeben sich so einfach, dass durch sie die Beziehung der Raumcurven zu den ebenen Curven eine instructive Beleuchtung erhält, indem dieser Uebergang sich als Anfang einer leicht zu übersehenden Reihe darstellt. Um in die Nomenclatur einzuführen, sei bemerkt, dass eine Gerade lineare Eindehnung, eine Ebene lineare Zweidehnung,

Raum lineare Dreidehnung genannt wird; die entsprechende nächste Stufe, eine lineare Vierdehnung, ist eine von vier Abmessungen abhängende Mannigfaltigkeit, bei welcher jede lineare Gleichung zwischen den vier Coordinaten eine lineare Dreidehnung darstellt u. s. f.

Die Orthogonalität ist in dem früheren Aufsatze allgemein definirt.

Sind die vier rechtwinkligen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punktes Functionen einer Variablen, so ist der Ort von x eine dreifach gekrümmte Curve.

Für einen nicht singulären Curvenpunkt ergiebt sich dann zunächst die Tangente mit den Richtungscosinus f_1, f_2, f_3, f_4 oder kürzer f. Zwei consecutive Tangenten f und $f+df$ bestimmen eine Ebene, die Schmiegungsebene; durch zwei consecutive Schmiegungsebenen lässt sich ein Raum, der Schmiegungsraum, bestimmen, (welcher bei zweifach gekrümmten Curven constant ist). In der Schmiegungsebene steht normal zur Tangente die Hauptnormale, im Schmiegungsraum normal zur Schmiegungsebene die Binormale, in der Vierdehnung steht normal zum Schmiegungsraum die Trinormale.

Die Winkel zwischen zwei consecutiven Tangenten: $\partial\tau$, Trinormalen: ∂k, heissen die Differentiale des ersten und dritten Krümmungswinkels. Eine Differentiation nach τ werde durch Accente bezeichnet.

Die Richtungscosinus der Hauptnormale sind die vier Grössen f' (also f'_1, f'_2, f'_3, f'_4). Diejenigen der Binormale werden mit g, die der Trinormale mit h bezeichnet.

Es ergeben sich schliesslich folgende Formeln, deren Analogie mit denjenigen der Raumcurven evident ist,

$$\partial s = \sqrt{\Sigma \partial x^2} \quad , \quad f = \frac{\partial x}{\partial s}$$

$$\partial \tau = \sqrt{\Sigma \partial f^2} \quad , \quad f' = \frac{\partial f}{\partial \tau}$$

$$\partial \vartheta = \sqrt{\Sigma(\partial f'^2 - \partial f^2)} \quad , \quad g = \frac{\partial f' + f\partial\tau}{\partial\vartheta}$$

$$\partial k = \sqrt{\Sigma(\partial f^2 - \partial f'^2 + \partial g^2)}, \quad h = \frac{\partial g + f'\partial\vartheta}{\partial k}.$$

$\partial\vartheta$ bedeutet den Winkel zwischen zwei consecutiven Schmiegungsebenen und wird der zweite Krümmungswinkel genannt.

Diese Formeln werden nun benutzt, um eine Theorie der Parallelen zu dreifach gekrümmten Curven aufzustellen, welche auch ganz analog der der Parallelen der Raumcurven sich gestaltet. A.

H. Poincaré. Sur les courbes définies par une équation différentielle. C. R. XC. 673-675.

Die gnomonischen Projectionen der Curven, welche durch eine Gleichung

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

wo X, Y ganze Functionen von x und y bezeichnen, bestimmt sind, von der Ebene auf eine Kugel, hier Charakteristiken genannt, haben folgende Eigenschaften: Durch einen Punkt der Kugelfläche geht im Allgemeinen eine einzige Charakteristik; durch gewisse singuläre Punkte, genannt Hälse, gehen deren zwei; durch andere, genannt Knoten, unendlich viele; um andere, genannt Brennpunkte, winden sich die benachbarten Charakteristiken spiralisch, ohne sie zu erreichen. Die Anzahl der Knoten und der Brennpunkte ist um zwei grösser als die der Hälse. Die Kugel wird von einer Schaar geschlossener Curven bedeckt (im Auszug nicht näher bestimmt), deren eine und nur eine im allgemeinen durch jeden Punkt geht; jeder Hals hingegen ist Doppelpunkt einer solchen; durch Knoten und Brennpunkte geht keine. Unter den geschlossenen Curven giebt es zwei Arten: die einen sind weder Charakteristiken, noch berühren sie solche, die anderen sind selbst Charakteristiken und Asymptoten der benachbarten (Cyclen ohne Berührung, Grenzcyclen). Kein Cyclus trifft eine Charakteristik in mehr als einem Punkte. Die Abhandlung geht weiter auf specielle Lösungen der Differentialgleichung ein. H.

H. Résal. Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite. Liouville J. (3) VI. 115-129.

Der Herr Verfasser behandelt die Aufgabe: Die Gestalt einer Curve so zu bestimmen, dass, wenn dieselbe auf einer Geraden rollt, ein fest mit ihr verbundener Punkt m eine gegebene Bahn beschreibt. Er gelangt auf einigen Umwegen, da er den einfachen Begriff des Rollens nicht direct benutzt, sondern ihn mit anderen kinematischen Betrachtungen verbindet, schliesslich zu den Gleichungen

$$\text{(I.)} \quad \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi = -\frac{dr}{r-R}; \qquad \text{(II.)} \quad d\Theta = \frac{dr}{r}\operatorname{ctg}\varphi,$$

wo r die Normale der gegebenen Trajectorie vom Fusspunkte bis zum Durchschnitt A mit der Bahn, R den Krümmungsradius derselben Curve bedeutet und φ denjenigen Winkel, welchen die Normale der Trajectorie mit der Normale der geradlinigen Bahn bildet. Θ endlich ist der Winkel, den die Normale mA mit einer beliebigen Geraden durch m bildet, welche starr mit der rollenden Curve verbunden ist, dann sind r und Θ die Polarcoordinaten der rollenden Curve, und man findet durch Elimination von φ die Gleichung derselben:

$$\Theta = \int \frac{dr}{r}\left(\frac{e^{2\int \frac{dr}{r-R}}}{C} - 1\right)^{-1}.$$

Hierin bedeutet C eine Integrationsconstante, die aber, wie in der Arbeit nicht ausdrücklich hervorgehoben ist, nicht willkürlich gewählt werden darf; die Gleichung I. nämlich, bei deren Integration sie auftritt, drückt eine Relation aus, welche mit der Aufgabe des Rollens gar nicht nothwendig zusammenhängt. Es werden nun unter der Voraussetzung, dass R als Function von r gegeben ist, eine Reihe von Anwendungen auf specielle Fälle gemacht. A.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raum curven.

G. Darboux. Sur le contact des courbes et des sur faces. Darboux Bull. (2) IV. 348-384.

Herr Kummer hat bewiesen, dass die Flächen vierter Ord nung, welche einen Doppelkegelschnitt besitzen, auf zehn Arte durch Kegelschnitte erzeugt werden können, deren jeder de Doppelkegelschnitt in zwei Punkten schneidet. Wenn der Doppel kegelschnitt der imaginäre unendlich entfernte Kreis wird, ha man es mit einer Cyclide zu thun; es lassen sich mithin durc jeden Punkt der Cyclide zehn Kreise auf derselben zeichnen Der Herr Verfasser untersucht nun, ob diese Eigenschaft charak teristisch für die Cyclide ist, und ob es Flächen mit noch meh Kreisschaaren giebt. Er findet das interessante Resultat:

Es giebt (selbstverständlich mit Ausnahme der Kugeln) kein Flächen, auf denen mehr als zehn Kreisschaaren liegen, un die Cycliden sind die einzigen nicht sphärischen Flächen, welch zehn Kreisschaaren enthalten.

Die Ableitung erforderte eine eingehende Untersuchung de Contactes zwischen einer beliebigen Fläche in einem nich singulären Punkte und einer Fläche, respective ebenen Curv zweiter Ordnung, hinsichtlich deren der Herr Verfasser zu eine Reihe von bemerkenswerthen Resultaten gelangt, von denen, wi er selbst zugiebt, einige bereits in zwei älteren Abhandlunge von Transon enthalten sind (Liouv. J. 1841 und Nouv. Ann. 187(Referat der letzten Arbeit F. d. M. II. 541).

Es wird zunächst gezeigt, wenn

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau}, \quad z = \frac{\zeta}{\tau}$$

beliebige tetraedrische oder rechtwinklige Coordinaten sind, das durch Einführung neuer im Allgemeinen tetraedrischer Coordinate

$$X = \frac{\Xi}{T}, \quad Y = \frac{H}{T}, \quad Z = \frac{Z}{T}$$

die Gleichung einer Fläche Σ in der Nähe eines Punktes O ver

einfacht werden kann. Dieselbe kann nämlich bei passender Wahl des Coordinatensystems im Allgemeinen in die Form

$$z = xy + x^3 + y^3 + xy(ax^2 + by^2) + \cdots$$

gebracht werden, wobei alle folgenden Glieder von höherer als der vierten Ordnung sind. Diese Gleichung geht, wenn man setzt $x = \vartheta x_1$, $y = \vartheta^2 y_1$ oder $x = \vartheta^2 x_1$, $y = \vartheta y_1$, wo $\vartheta^3 = 1$, in dieselbe Form bis auf die Constanten a und b über.

Berührt aber eine der beiden Haupttangenten in O vierpunktig, so kommt man nicht auf diese Form, kann aber die Form

$$z = xy + x^3 + ay^3x + by^4 \cdots$$

erhalten.

Ist der Punkt O ein parabolischer (d. h. mit dem Krümmungsmass 0), so wird ebenfalls die obige Form unmöglich und kann durch die Form

$$z = x^2 + y^3 + ayx^3 + by^4 + \cdots$$

ersetzt werden. In beiden Fällen sind noch weitere Specialitäten zu untersuchen.

Es ergiebt sich nun, dass jede Fläche zweiter Ordnung, welche mit S in O einen Contact zweiter Ordnung hat, von der Form

$$z = xy + z(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

ist, worin sich leicht z nach Potenzen von x und y entwickeln lässt.

Die Durchschnittscurve beider Flächen hat dann in O einen dreifachen Punkt. Man erhält durch Veränderung der Constanten α, β, γ verschiedene Flächen zweiter Ordnung, und die Tangenten im dreifachen Punkte verändern sich hierbei. Speciell kann man α und β (auf γ kommt es dabei nicht an) so bestimmen, dass die drei Tangenten zusammenfallen, und zwar geschieht dies auf drei Arten ($\alpha = -3$, $\beta = -3$; $\alpha = -3\vartheta$, $\beta = -3\vartheta^2$; $\alpha = -3\vartheta^2$, $\beta = -3\vartheta$).

Man erhält so drei ausgezeichnete Richtungen, welche eine Analogie haben mit den Richtungen stationärer Berührung einer Kugel oder den Hauptkrümmungsrichtungen. Wegen der Willkürlichkeit von γ giebt es aber noch ein Büschel von Flächen zweiten Grades, welche mit der Fläche S einen Contact zweiter

Ordnung haben, bei welchem die drei Tangenten der Durchschnittscurve in eine jener drei Richtungen zusammenfallen. Diese drei Richtungen nennt der Herr Verfasser Tangenten der Osculation zweiter Ordnung; es entspricht ihnen ein neues Liniensystem auf der Fläche S, dessen Differentialgleichung sich nur aufstellen lässt. Eine Osculation höherer als zweiter Ordnung kann eine Fläche zweiter Ordnung im Allgemeinen mit S in einem beliebigen Punkte O nicht eingehen. Der Herr Verfasser zeigt aber, dass es eine Steiner'sche Fläche giebt, welche mit der Fläche S in O einen Contact vierter Ordnung eingeht. Sie ist dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \frac{\alpha - \beta^2}{1 + a\alpha^2 + b\beta^2 - 5\alpha\beta},$$
$$y = \frac{\beta - \alpha^2}{1 + a\alpha^2 + b\beta^2 - 5\alpha\beta},$$
$$z = \frac{\alpha\beta}{1 + a\alpha^2 + b\beta^2 - 5\alpha\beta},$$

wo α und β die Parameter sind.

Nach diesen Untersuchungen wendet sich der Herr Verfasser zur Betrachtung der Berührung eines Kegelschnittes mit einer beliebigen Fläche S in einem nicht singulären Punkte O.

Hierbei wird zunächst eine allgemeinere Gleichungsform angenommen, welche bei beliebigen tetraedrischen oder auch im Speciellen rechtwinkligen Coordinaten, wenn O in dem Durchschnittspunkt der von $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ liegt, durch Entwickelung von z nach Potenzen von xy entsteht, also

$$z = \varphi_2(xy) + \varphi_3(xy) + \varphi_4(xy) \cdots,$$

wo $\varphi_i(xy)$ eine ganze homogene Function i^{ten} Grades von x und y bedeutet.

Diese Fläche werde geschnitten durch die Ebene

$$mz + nx - y = 0,$$

dann findet man durch eine Anwendung der Lagrange'schen Formel

$$z = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$
$$y - zx = ma_2 x^2 + ma_3 x^3 + \cdots,$$

ro

$$a_2 = \varphi_2,$$
$$a_3 = \varphi_3 + m\varphi_2\varphi_2',$$
$$a_4 = \varphi_4 + m(\varphi_2\varphi_3)' + \frac{m^2}{6}(\varphi_2^3)''.$$
$$a_5 = \varphi_5 + m\left(\varphi_2\varphi_4 + \frac{\varphi_3^2}{2}\right)' + \frac{m^2}{2}(\varphi_2^2\varphi_3)'' + \frac{m^3}{24}(\varphi_2^4)''',$$
$$a_6 = \varphi_6 + m(\varphi_2\varphi_5 + \varphi_3\varphi_4)' + \frac{m^2}{2}(\varphi_2^2\varphi_4 + \varphi_2\varphi_3^2)'' + \frac{m^3}{6}(\varphi_2^3\varphi_3)''' + \frac{m^4}{120}(\varphi_2^5)^{IV},$$
$$a_7 = \varphi_7 + m\left(\varphi_2\varphi_6 + \varphi_3\varphi_5 + \frac{\varphi_4^2}{2}\right)' + \frac{m^2}{6}(3\varphi_2^2\varphi_5 + 6\varphi_2\varphi_3\varphi_4 + \varphi_3^3)'' + \frac{m^3}{12}(2\varphi_2^3\varphi_1 + 3\varphi_2^2\varphi_3^2)''' + \frac{m^4}{24}(\varphi_2^4\varphi_3)^{IV} + \frac{m^5}{720}(\varphi_2^6)^{V},$$

ι. s. w. und $\varphi_i = \varphi_i(1, n)$ ist, während die Accente Differentiaionen nach n bedeuten.

Mit Hülfe dieser Formeln werden zunächst die Osculations-egelschnitte untersucht, d. h. diejenigen Kegelschnitte, welche iit S eine Berührung vierter Ordnung (also eine fünfpunktige) ilden.

Man findet für die Ebene $mz + nx - y = 0$ diesen Kegelehnitt durch die 2[te] Gleichung

$$z = \varphi_2(xy) + z(\alpha x + \beta y + \gamma z) + k(mz + nx - y)$$

estimmt, wo

$$(\alpha + \beta n)\varphi_2 = \varphi_3$$

ınd

$$u_1^2\varphi_2 + u_0\varphi_2^2 + m[(\alpha + \beta n)\varphi_2^2]' = \varphi_4 + m(\varphi_2\varphi_3)'.$$

Die zweite Gleichung stellt eine Fläche zweiter Ordnung lar, welche mit S einen Contact zweiter Ordnung hat, ist aber elbstverständlich durch die obigen Bedingungen nicht vollständig estimmt, da durch den Osculationskegelschnitt noch unzählig iele solcher Flächen zweiter Ordnung hindurchgehen. Man kann iber noch die Bedingung hinzufügen, dass in der zweiten Gleichung die Glieder mit m verschwinden; dann wird die Fläche

vollständig und unabhängig von m bestimmt. Sie hat die Gleichung

$$[z - \varphi_2(xy)]\varphi_2^3 = zx\varphi_3\varphi_2^2 + z(y-nx)(\varphi_2\varphi'_3 - \varphi_3\varphi'_2) + z^2(\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2)$$

Da dieselbe von m unabhängig ist, so ergiebt sich der den Meusnier'schen analoge Satz, welchen übrigens bereits Transon gefunden hat, wenn auch in anderer Form: „Der geometrische Ort aller Kegelschnitte, welche eine Fläche S in demselben Punkte O mit derselben Tangente fünfpunktig berühren, ist eine Fläche zweiten Grades."

Diese Fläche, deren Gleichung die zuletzt aufgestellte ist, hat mit S einen Contact zweiter Ordnung, und von den drei Osculationstangenten derselben fallen zwei in die Richtung der gemeinsamen Tangente aller Kegelschnitte zusammen.

Wenn man, wie es oben bei Betrachtung der Flächen geschehen ist, von der Gleichungsform

$$z = xy + x^3 + y^3 + xy(ax^2 + by^2)\ldots$$

ausgeht, nimmt die Gleichung der gefundenen Fläche zweiter Ordnung die Form an:

$$(z - xy)n^3 = zx(2n^3 - n^5) + zy(2n^4 - n) + z^2[an^2 + bn^4 - (1 - n^3)^2]$$

Hieraus folgt leicht, dass sich durch jeden Punkt des Raumes sechs Kegelschnitte legen lassen, welche eine gegebene Fläche S in einem gegebenen Punkte O fünfpunktig osculiren.

Es werden nun die sechspunktig berührenden Kegelschnitte gesucht, für welche noch eine Bedingung hinzutritt.

Setzt man

$$A = 2\varphi_3^2 - 3\varphi_2\varphi_3\varphi_4 + \varphi_2^2\varphi_5,$$

$$B = \varphi_2^4\left[\frac{\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2}{\varphi_2^3}\right]' = 3\varphi_3^2\varphi'_2 - 2\varphi_2\varphi_4\varphi'_2 + \varphi_2^2\varphi'_4 - 2\varphi_2\varphi_3\varphi'_3$$

$$C = \varphi_3\varphi_2'^2 - \varphi_2\varphi'_3\varphi'_2 - \tfrac{1}{2}\varphi_2\varphi_3\varphi''_2 + \tfrac{1}{2}\varphi_2^2\varphi''_3 = \tfrac{1}{2}\varphi_2^3\left[\frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right]'',$$

so ist die Bedingung, dass in der Ebene $mz + nx - y = 0$ ein sechspunktig berührender Kegelschnitt liegt:

$$A + Bm\varphi_2 + Cm^2\varphi_2^2 = 0.$$

Da A vom 9ten, B vom 6ten, C vom 3ten Grade in Bezug auf n ist, so folgt: Durch eine beliebige durch O gelegte Gerade kann man neun Ebenen mit sechspunktig osculirenden Kegelschnitten

legen, durch eine Tangente der Fläche nur drei (nicht zwei, wie durch ein Versehen in der Abhandlung steht).

Durch eine weitere Fortsetzung der analogen Betrachtungen ergiebt sich, dass es im Allgemeinen 27 Kegelschnitte giebt, welche eine Fläche S in einem Punkte O siebenpunktig osculiren. (Hieraus folgt für die Flächen dritten Grades die Existenz der 27 Geraden).

Auf Grund dieser allgemeinen Betrachtungen wendet sich nun der Herr Verfasser näher zu den oben bezeichneten Fragen und gelangt ohne weitere Rechnungen zu folgenden Schlüssen:

„Es giebt ausser den Flächen zweiten Grades keine Flächen, deren ebene Schnitte sämmtlich aus Kegelschnitten bestehen.“

„Es giebt ausser den Flächen zweiten Grades, der Steiner-schen Fläche und den Regelflächen dritter Ordnung keine Flächen, bei denen durch jeden Punkt unendlich viele Kegelschnitte gehen.“

Hierauf wird die Untersuchung dadurch modificirt, dass statt der Kegelschnitte Kreise in Betracht gezogen werden. Durch Betrachtungen und Rechnungen, welche den allgemeineren ganz analog sind, ergiebt sich für dreipunktig osculirende Kreise das Meusnier'sche Theorem und für vierpunktig osculirende das folgende: Es gehen durch jeden Punkt des Raumes fünf Ebenen, in welchen Kreise liegen, welche eine Fläche S in O vierpunktig osculiren, durch einen Punkt der Tangentenebene aber nur einer.

Hieran werden nun weiter folgende Schlüsse gereiht: Wenn es in einem einfachen Punkte einer Fläche mehr als zehn Kreise giebt, welche fünfpunktig osculiren, so giebt es in jeder durch denselben Punkt gelegten Ebene einen solchen, und der Punkt ist ein Nabelpunkt.

Es giebt keine Fläche, welche mehr als zehn Kreise durch jeden Punkt enthält.

Jede Fläche, bei welcher durch jeden Punkt zehn Kreise gehen, ist eine Cyclide.

Wenn eine Fläche in einem einfachen Punkte von zehn Kreisen sechspunktig berührt wird, so hat sie in demselben einen Contact fünfter Ordnung mit einer Cyclide. A.

G. Darboux. Sur le contact des coniques et des surfaces. C. R. XCI. 969-972.

Moutard. Sur le contact des coniques et des surfaces. C. R. XCI. 1055-1058.

In der Note des Herrn Darboux (siehe auch das vorhergehende Referat) wird eine Reihe von interessanten Sätzen über die osculirenden Kegelschnitte einer Oberfläche ausgesprochen, ihr Beweis zum Theil angedeutet. So giebt es z. B. 27 Kegelschnitte, welche in einem Punkte die Fläche sechspunktig, 10 Kreise, welche sie daselbst fünfpunktig berühren. Bei keiner Oberfläche (die Kugel ausgenommen) können mehr als zehn Kreise durch jeden Punkt gehen, und die Cyclide ist die einzige Fläche, bei welcher dieses Maximum wirklich stattfindet.

Herr Moutard weist darauf hin, dass er schon im Jahre 1863 in zwei nur zum Theil veröffentlichten Arbeiten die Sätze von Darboux im wesentlichen erhalten habe, und macht bei dieser Gelegenheit auf eine covariante Fläche aufmerksam, welche sich bei vielen Fragen der bezeichneten Art mit Vortheil in Zusammenhang bringen lässt. V.

E. W. Hyde. Proof of a proposition in solid geometry. Analyst VII. 157-158.

Wenn sich zwei verschiedene Oberflächen derselben Ordnung in allen Punkten berühren, in denen sie von einer gegebenen Geraden geschnitten werden, so schneiden sie sich in zwei ebenen (reellen oder imaginären) Curven. Glr. (O.)

A. Cayley. On the number of constants in the equation of a surface $PS-QR=0$. Zeuthen Tidsskr. (4) IV. 145-148.

Veranlasst durch eine Arbeit von Valentiner macht der Verfasser die Bemerkung, dass sich die Anzahl der unabhängigen Constanten in der Gleichung $PS-QR=0$ leicht bestimmen lässt, wenn man sie in die Form

$$\begin{vmatrix} P+\alpha Q, & Q \\ R+\alpha S+\beta P+\alpha\beta Q, & S+\beta Q \end{vmatrix} = 0$$

bringt, wo noch besondere Fälle auftreten werden, wenn zwei der betreffenden Functionen denselben Grad haben. Auf diese Weise findet er die von Valentiner gefundenen Resultate bestätigt.

Gm.

G. Kohn. Ueber algebraische Raumcurven. Wien. Ber. LXXXII. 755-770.

Für eine algebraische Raumcurve ohne wirkliche Doppelpunkte lässt sich im Allgemeinen eine gewisse Zahl e angeben, welche bezeichnet, um wie viel die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte ihr Minimum übertrifft. Die synthetische Definition dieses „Excesses" ist verschieden, je nachdem die Curve von grader oder ungrader Ordnung ist. Curven grader Ordnung vom Excesse Null entstehen durch den Schnitt einer Fläche n' mit einer Fläche zweiter Ordnung. Dagegen ist der Nachweis, dass umgekehrt solche Curven stets auf einer Fläche zweiten Grades liegen, durch welchen die in der Abhandlung nicht erwähnten Betrachtungen von Ed. Weyr (Algebraische Raumcurven, Prag. Abh. VI. s. F. d. M. VI. 1874. p. 483) einen beachtenswerthen Abschluss erhalten hätten, dem Verfasser völlig misslungen. V.

G. Westphal. Ueber das simultane System zweier quaternärer Formen zweiten Grades und eine allgemeine algebraische Parameterdarstellung der Raumcurve vierter Ordnung $p = 1$. Clebsch Ann. XIV. 1-20.

Siehe Abschn. IX. Cap. 3. B. p. 607.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

F. Hočevar. Ueber die Erweiterung eines geometrischen Lehrsatzes von Varignon. Wien. Anz. 1880. 196.

Bezeichnet man mit E_1, E_2, E_3 drei Ebenen, welche sich in einer Geraden schneiden, mit f_1 ein geschlossenes Flächenstück

in E_1, mit f_2 die Parallelprojection desselben auf E_2 in einer zu E_3 parallelen, sonst beliebigen Richtung, mit f_3 die Parallelprojection desselben Flächenstücks auf E_3 in einer zu E_2 parallelen Richtung, mit k_1, k_2, k_3 die Volumina dreier Kegel, welche irgend einen Punkt des Raumes zur gemeinschaftlichen Spitze und die Flächenstücke f_1, f_2, f_3 zu Grundflächen haben, so ist stets

$$\pm k_1 \pm k_2 \pm k_3 = 0,$$

wo die Vorzeichen nach einem einfachen Gesetz bestimmt werden.

A.

Lösungen von Aufgaben über gerade Linien und Ebenen in analytischer Behandlung von GENESE und J. J. WALKER finden sich Educ. Times XXXIII. 17-18, 86.

O.

H. LAURENT. Réduction des polynômes au 2ième degré. Nouv. Ann. (2) XIX. 12-28.

Eine von den Lehrbüchern nur wenig abweichende Darstellung des Problems, Formen zweiten Grades in n homogenen Veränderlichen als Summen von n Potenzen linearer Formen darzustellen.

My.

A. MAYNZ. Einige Lehrsätze aus der analytischen Geometrie. Pr. Ludwigslust.

Die Arbeit beschäftigt sich mit polaren Beziehungen bei Flächen zweiten Grades und führt hauptsächlich zu folgenden Resultaten:

Sind a, b, c drei beliebige Punkte des Raumes und A, B, C bezüglich ihre Polarebenen in Bezug auf irgend eine Fläche zweiten Grades, so gehen die drei Ebenen $a(BC)$, $b(CA)$ und $c(AB)$ durch dieselbe Gerade, ebenso liegen die drei Punkte $A(bc)$, $B(ca)$, $C(ab)$ in derselben Geraden.

Hieraus folgt weiter:

Sind $a\,b\,c\,d$ und $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ die Eckpunkte zweier in Bezug

uf eine Fläche zweiten Grades conjugirter Tetraeder, so dass edem Eckpunkt des einen die dem entsprechenden Eckpunkte les andern gegenüberliegende Ebene des andern als Polarebene ntspricht, so liegen die vier Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte in einem Hyperboloid und die vier Durchschnittsgeraden ntsprechender Ebenen in dem polaren Hyperboloid, und umgekehrt.

Liegen die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte der die Durchschnittsgeraden entsprechender Ebenen zweier Tetraeder auf einem Hyperboloid, so giebt es stets eine und nur ine Fläche zweiten Grades, für welche die beiden Tetraeder einnder polar entsprechen, und es lässt sich zu jedem fünften Punkt die zugehörige Polarebene E und umgekehrt einfach construiren. Die Fläche zweiten Grades kann aber reell oder imaginär sein, und die Entscheidung darüber, so wie die Construction beliebig vieler Punkte der Fläche lässt sich dann durch Betrachtung von Involutionen leicht durchführen.

Dieser Satz kann auch auf die singulären Fälle übertragen werden, wo die Fläche zweiten Grades in eine Kegelfläche oder eine ebene Curve degenerirt. Nimmt man statt der Fläche den unendlich entfernten Kugelkreis, so entspricht dem unendlich entfernten Punkte irgend einer Geraden l jede Ebene, welche lothrecht zu l steht, als Polarebene, während zu jedem endlichen Punkte die unendlich entfernte Ebene die Polarebene ist. Denkt man sich nun ein beliebiges Tetraeder $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ und fällt von jedem Punkt das Loth auf die gegenüberliegende Ebene, so kann man die unendlich entfernten Punkte $a\ b\ c\ d$ dieser Geraden als die Eckpunkte des zu $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ polar conjugirten Tetraeders betrachten und kommt so auf den bekannten Steiner'schen Satz, dass die vier Höhen eines Tetraeders auf einem Hyperboloid liegen.

Stellt man die Bedingung, dass ein Tetraeder in Bezug auf die zu suchende Fläche sich selbst conjugirt sei, so wird die Fläche noch nicht vollständig bestimmt; sie wird aber bestimmt, wenn ausserdem die zu einem Punkte e gehörige Polarebene gegeben ist. Zum Schluss wird die Beziehung aufgesucht, in welcher zwei Tetraeder stehen müssen, damit jedes derselben in Bezug auf eine und dieselbe Fläche zweiten Grades sich selbst

conjugirt sei. Es zeigt sich, dass, wenn die Eckpunkte des einen Tetraeders beliebig gegeben sind und drei Eckpunkte des andern, der vierte Eckpunkt bestimmt ist, da alle acht Durchschnitte dreier Flächen zweiten Grades, respective des ganzen entsprechenden Flächengebüsches sind. A.

F. Mertens. Zwei Berührungsaufgaben. Schlömilch Z. XXV. 156-171.

Den Ausgangspunkt der Arbeit bildet folgende Betrachtung: Ist

$$F(u_1 u_2 u_3 u_4) = \Sigma A_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 0$$

die Gleichung einer Fläche zweiten Grades in Ebenencoordinaten und sind

$$1) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

$$2) \qquad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0$$

die Gleichungen zweier Ebenen, so ist die Bedingung dafür, dass die Durchschnittslinien beider Ebenen mit der Fläche einander berühren,

$$3) \qquad F_a F_b - (F_{ab})^2 = 0,$$

wenn

$$F_a = \Sigma A_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta, \quad F_b = \Sigma A_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta, \quad F_{a,b} = \Sigma A_{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$$

ist.

Wählt man speciell

$$F_u = u_1^2 + u_2^2 + 2u_3 u_4,$$

so drückt die Gleichung 3) die Bedingung für die Berührung der zwei Kreise

$$a_4(x_1^2 + x_2^2) - 2x_3(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0,$$

$$b_4(x_1^2 + x_2^2) - 2x_3(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) = 0$$

aus, wo x_1, x_2, x_3 homogene Punktcoordinaten in der Ebene bezeichnen.

Kann man also irgend eine auf ebene Schnitte der Fläche F bezügliche Berührungsaufgabe lösen, so hat man damit auch die Lösung der entsprechenden Aufgabe für Kreise in der Ebene.

Der Herr Verfasser behandelt nun den Feuerbach'schen Satz und die Malfatti'sche Aufgabe für die Fläche F. Es wird zu-

nächst die Apollonius'sche Aufgabe gelöst, d. h., es wird ein ebener Schnitt von F bestimmt, der drei gegebene Schnitte berührt. Es ergeben sich bekanntlich acht Lösungen. Wenn insbesondere die drei gegebenen Schnitte durch einen Punkt gehen, so fallen vier derselben in die Tangentialebene dieses Punktes. Hieran schliesst sich der Beweis des Feuerbach'schen Satzes, welcher aussagt, dass, wenn man die gefundenen acht Schnitte auf gewisse Weise in zwei Gruppen zu je vier ordnet, die vier Schnitte einer Gruppe von einem gewissen fünften Schnitt getroffen werden.

Darauf behandelt der Herr Verfasser die Malfatti'sche Aufgabe, welche so formulirt werden kann: Es sind auf F drei ebene Schnitte gegeben; man soll drei andere ebene Schnitte suchen, deren jeder je zwei der gegebenen und die beiden anderen gesuchten Schnitte berührt. Diese Aufgabe ergiebt im Allgemeinen 64 Lösungen.

Eine Andeutung der eleganten Rechnung ist ohne Eingehen in den sehr ausgedehnten Formelapparat nicht möglich. A.

MORET-BLANC. Questions proposées par M. H. Faure. Nouv. Ann. (2) XIX. 411-421.

Es werden folgende Sätze bewiesen:

I. Wird eine Fläche zweiten Grades von einer Ebene P geschnitten und zu einer Tangente der Durchschnittscurve der parallele Durchmesser P gezogen, bezeichnet p den Abstand des Mittelpunktes der Fläche von der Tangentialebene in jenem Punkte, d den Winkel, welchen diese Tangentialebene mit der Ebene P bildet, so ist

1) für jeden Punkt der Durchschnittscurve $\frac{pD}{\sin\alpha} = \text{const.}$, und

2) behält diese Constante denselben Werth, wenn die Ebene P eine der gegebenen confocale Fläche berührt.

II. Es sind drei confocale Flächen zweiten Grades gegeben. Eine Gerade E, welche die beiden ersten berührt, schneidet die dritte in a. Wenn die Tangentialebene in a die zu E parallele

Centrale in m schneidet, so ist Om constant, für jede Wahl der Geraden E.

III. Durch einen Punkt einer Fläche zweiten Grades sind drei zu einander senkrechte Ebenen A, B, C gelegt. Bezeichnet man mit α, β, γ die Krümmungsradien der drei ebenen Schnitte in diesem Punkte, durch T die Tangentialebene, so ist

$$\frac{(\sin TA)^2}{\alpha} + \frac{(\sin TB)^2}{\beta} + \frac{(\sin TC)^2}{\gamma} = \text{const.}$$

A.

H. M. Taylor. Note on the equation of the two planes which can be drawn through two given points to touch a quadric. Proc. L. M. S. XI. 141-143.

Ist $U_i = 0$ die Gleichung einer Fläche zweiten Grades für $x_i\, y_i\, z_i$ und $W_{i,k}$ die Gleichung, welche ausdrückt, dass die Punkte $x_i\, y_i\, z_i$ und $x_k\, y_k\, z_k$ harmonisch durch die Fläche $U = 0$, getrennt sind, so drückt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} U_1 & W_{1,2} & W_{1,3} \\ W_{1,2} & U_2 & W_{2,3} \\ W_{1,3} & W_{2,3} & U_3 \end{vmatrix} = 0$$

die Bedingung aus, dass die drei Punkte $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ in einer Tangentialebene der Fläche $U = 0$ liegen. Diese Bedingung wird zuerst direct entwickelt, dann dadurch, dass vom Punkte 1 der Tangentenkegel an die Fläche U, dann vom Punkte 2 der Tangentenkegel an diesen Tangentenkegel gelegt wird. In einer Note, welche Herr Cayley dieser Mittheilung zufügt, wird die Bedingung in einer noch etwas anderen Form dargestellt. A.

Dziwiński. Allgemeine Gleichung der Berührungscylinder und der Berührungskegel der Flächen zweiten Grades im schiefwinkligen Coordinatensystem auf Grund der Symbole von Professor Zmurko. Pr. Jaroslaw. (Polnisch.)

Dn.

O. Rüthnick. Ueber zwei auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegende Kegelschnitte. Pr. Frankfurt a. O.

Es wird theils durch geometrische Betrachtungen, theils durch Rechnung die Bedingung dafür untersucht, dass zwei Kegelschnitte perspectivisch liegen. Die Lage des Projectionspols wird bestimmt und die Untersuchung schliesslich auf specielle Fälle angewendet. A.

N. Herz. Einige Eigenschaften von Kugelbüscheln und Kugelschaaren. Grunert Arch. LXV. 385-394.

Der Verfasser untersucht analytisch-geometrisch zunächst das Kugelbüschel, d. h. das einstufige System aller derjenigen Kugeln, welche durch drei gegebene Punkte gehen, oder (was dasselbe ist) welche eine und dieselbe Chordalebene haben. Jede Kugel eines solchen Büschels hat die Eigenschaft, dass die von einem Punkte ihrer Oberfläche an irgend zwei andere Kugeln des Büschels gelegten Tangenten dasselbe Verhältnis behalten, wenn jener Punkt alle möglichen Lagen auf der Kugel-Oberfläche einnimmt. An den Beweis dieses Satzes schliesst sich die Berechnung der Lage der beiden Grenzpunkte des Büschels, d. h. derjenigen beiden Punkte auf der Centrale des Büschels, in denen eine Kugel unendlich klein wird. Dann geht der Verfasser zu der Untersuchung der Kugelschaar über, d. h. des zweistufigen Systeme aller derjenigen Kugeln, welche durch zwei gegebene Punkte gehen. Die Grenzpunkte aller in einer Kugelschaar liegenden Büschel bilden einen Kreis, den Grenzpunktkreis der Kugelschaar. Mit jeder Kugelschaar steht ferner ein gewisses Kugelbüschel in dem Zusammenhange, dass der Grenzpunktkreis der Schaar Chordalkreis des Büschels ist, dass die Centralebene der Schaar Radicalebene des Büschels, dass die Radicalaxe der Schaar Centrallinie des Büschels, dass endlich die beiden Radicalpunkte der Schaar die beiden Grenzpunkte des Büschels sind. An die Behandlung der auf vier Kugeln bezüglichen Chordal-Eigenschaften schliesst sich noch ein Capitel über projective

Kugelbüschel, d. h. solche Kugelbüschel, deren Kugeln sich ein eindeutig entsprechen, und über die damit in Zusammenhang stehenden Flächen zweiter Ordnung. Scht.

T. Craig. Determination of a sphere which cuts five given spheres at the same angle. Analyst VII. 13-16.

Analytische Lösung der Aufgabe. Glr. (O.)

Gambey. Solution d'une question de concours. Nouv. Ann. (2) XIX. 82-86.

Gegeben ist eine Kugel S, eine Ebene P und ein Punkt A. Durch A ziehe man eine Gerade, welche die Ebene P im Punkte B schneidet, und construire um AB als Durchmesser eine Kugel S'. Die Radicalebene von S, S' schneidet AB in einem Punkte M. Dreht man nun AB um A, so beschreibt M eine Fläche zweiten Grades, die durch A geht, und deren cyklische Ebenen parallel der Ebene P sind. Die Art des Ortes wird dann weiter discutirt. O.

H. Courbe. Solution d'une question de licence. Nouv. Ann. (2) XIX. 86-89.

Gegeben das Paraboloid $z = \frac{mx^2+y^2}{2a}$. Man betrachte auf dieser Fläche die Curven, deren Tangenten einen constanten Winkel γ mit der Axe Oz machen. Gefordert wird die Differentialgleichung der Projectionen dieser Curve auf die Ebene xOy und der Nachweis, dass sich die Integration dieser Gleichung auf eine Quadratur zurückführen lässt, sowie ihre Ausführung und die Construction der Projection im Falle $m = 1$. Die Differentialgleichung ergiebt sich als

$$y = n\,\frac{\sqrt{1+p^2}}{p} - m\,\frac{x}{p},$$

wo

$$p = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad n = a \operatorname{cotg} \gamma.$$

Das Integral derselben ist $\int_{p_0}^{p} \frac{mdp}{p(p^2+m)}$. Für $m = 1$ ist die Curve die Developpante des Kreises mit dem Radius $n = a \operatorname{cotg} \gamma$.

O.

K. Schwering. Ueber eine eigenthümliche Deformation der Kegelschnitte. Schlömilch Z. XXV. 25-41.

In einer früheren Arbeit (Schlömilch Z. XXIV. 405-407, siehe F. d. M. XI. 1879. 568) hatte der Herr Verfasser gezeigt, dass die Projection einer geodätischen Linie des Rotationsellipsoids auf die Aequatorebene durch die Basis eines geraden elliptischen Kegels erzeugt wird, wenn dieser letztere auf der Aequatorebene abgewickelt wird. Diese Beziehung veranlasste den Herrn Verfasser, in der vorliegenden Arbeit derartige ebene Curven (Saumcurven), in welche sich ein auf einem Kegel befindlicher Kegelschnitt abwickelt, genauer zu betrachten.

Ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Gleichung der Basis des Kegels, dessen Höhe c ist, und sind α, β die Coordinaten des Fusspunktes, so ergeben sich, wenn man setzt: $x = a\cos\psi$, $y = b\sin\psi$, die Polarcoordinaten ϱ und φ der Saumcurve folgendermassen:

$$\varrho^2 = c^2 + (a\cos\psi - \alpha)^2 + (b\sin\psi - \beta)^2,$$
$$\varrho^2 d\varphi^2 = [c^2\cos^2\psi + a^2\sin^2\psi] + (ab\cos\psi + \beta a\sin\psi - ab)^2.$$

Es wird zunächst der besondere Fall betrachtet, dass der Kegel ein gerader Kegel ist, und es zeigt sich, dass, wenn der Sinus des scheinbaren Radius dieses Kegels zu π in einem rationalen Verhältnis steht, wenn also die Saumcurve geschlossen ist, ihre Gleichung algebraisch wird, und dass jede algebraische Curve auf dem Kegel auch eine algebraische Saumcurve erhält.

Es entsteht nun die Frage, ob es auch andere Kegelflächen giebt, welche diese Eigenschaft haben. Hierzu genügt es, zu

untersuchen, ob die Saumcurve eines geraden elliptischen Kegels algebraisch werden kann.

Die Polargleichung der Saumcurve der Ellipse $z = c$ auf dem Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

wird

$$d\varphi = \frac{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)-c^2\varrho^2}}{\sqrt{\varrho^2-(b^2+c^2)}\,\sqrt{(a^2+c^2)-\varrho^2}}\,\frac{d\varrho}{\varrho},$$

und es stellt sich φ als ein elliptisches Integral dritter Gattung dar, welches der Herr Verfasser mit Hülfe der p-Functionen ausdrückt. Dasselbe ist vieldeutig und hat eine reelle Periode ω_1 und eine imaginäre ω_3, d. h. ϱ erhält so oft denselben Werth, als φ um ein vielfaches von ω_3 wächst. Soll nun die Saumcurve geschlossen sein, so muss ω_1 in einem rationalen Verhältnis zu π stehen. Diese Bedingung genügt aber nicht, damit die Curve algebraisch sei, denn sie hat wegen der imaginären Periode ω_3 mit einem Kreise um den Anfangspunkt, dessen Radius $\varrho = \varrho_1$ ist, ausser einer endlichen Anzahl reeller Punkte noch unzählige imaginäre Punkte gemein, ist also im Allgemeinen nicht algebraisch, es tritt vielmehr, damit sie algebraisch sei, die Bedingung hinzu, dass ω_3 Null sei. Der Herr Verfasser bestimmt nun durch eine längere Rechnung die Constanten so, dass $\frac{\omega_1}{\pi}$ rational und $\omega_3 = 0$ ist, kommt aber dabei zu dem Resultat, dass die so bestimmten Curven und Kegel singuläre Fälle repräsentiren. Referent möchte dazu bemerken, dass dieses Resultat wohl von vornherein zu erwarten war, da die imaginäre Periode nur Null werden kann, wenn das elliptische Integral in eine niedere Transcendente übergeht. Dies aber ist nur der Fall, wenn entweder $a = b$ wird, also der Kegel ein Rotationskegel ist, oder eine der Grössen a oder b Null wird, wodurch der Kegel sich auf ein ebenes Winkelblatt zusammenzieht.

Die Saumcurve eines nicht degenerirten elliptischen geraden Kegels, dessen Basis nicht kreisförmig ist, kann also geschlossen, aber nie algebraisch sein. A.

A. Strnad. Ueber die Kegelfläche zweiten Grades.
Casopis IX. 55. (Böhmisch.).

Enthält die analytische Untersuchung der Bedingungen, wann die Kegelfläche zweiten Grades drei wechselseitig vertikal stehende Gerade enthält. Std.

G. Westphal. Ueber das simultane System zweier quaternärer Formen zweiten Grades und eine allgemeine algebraische Parameterdarstellung der Raumcurve vierter Ordnung $p = 1$. Clebsch Ann. XIII. 1-20.

Die Arbeit, welche bereits vor dem Harnack'schen denselben Gegenstand betreffenden Aufsatz (Clebsch Ann. XII. 47ff.; cf. F. d. M. 1877. IX. 550f.) 1876 als Doctordissertation erschienen ist, legt, während Harnack hauptsächlich die algebraische Transformation des auf die Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades bezüglichen Differentials behandelt und zu mannigfachen Untersuchungen verwendet, besonders Werth auf eine ganz allgemeine algebraische Parameterdarstellung, durch welche die Coordinaten eines Curvenpunktes als explicite Functionen einer unabhängigen Variablen und der Functionalinvarianten der beiden Flächen zweiten Grades ausgedrückt werden. Den Ausgangspunkt bildet die Aufstellung einer Identität, welche der in der Theorie der cubischen ternären Formen bekannten Salmon'schen Identität ganz analog ist, und aus welcher sich sofort die Darstellbarkeit der Raumcurvensehnen als Schnitt je zweier covarianter Ebenen ergiebt. Während die geometrische Verwerthung dieser Identität unmittelbar auf schon anderweitig bekannte Eigenschaften der Raumcurve führt, ergiebt die weiter daran geknüpfte algebraische Untersuchung die gewünschte Parameterdarstellung, ganz analog derjenigen, welche Aronhold für die ebenen Curven dritter Ordnung (Berl. Monatsber. April 1861) gegeben hat. Hieran schliesst sich die Transformation des auf die Curve bezüglichen (elliptischen) Differentials nicht blos durch die auch von Harnack l. c. angegebene Substitution, welche der Aronhold'schen für die cubische ternäre Form entspricht, sondern auch

durch eine quadratische Substitution, welche aus jener auch durch einen Grenzübergang gewonnen wird und der Brioschi'schen (C. R. t. 56; cf. Borchardt J. Bd. 63) entspricht. Aus der Transformation des Differentials allein ergiebt sich dann vermittels einfacher Betrachtungen der Satz für die Schnittpunkte einer Ebene mit der Raumcurve (Abel'sches Theorem).

Zum Schluss und als Anwendung wird folgende Verallgemeinerung eines bekannten ebenen Problems behandelt: Es sollen diejenigen Flächen eines Büschels zweiter Ordnung bestimmt werden, auf denen sich Polygone (von grader Seitenzahl) construiren lassen, deren Ecken in der Schnittcurve und deren Seiten abwechselnd in der einen und anderen Schaar von Erzeugenden dieser Fläche enthalten sind. Es giebt eine begrenzte Anzahl solcher Flächen, auf denen sich Polygone der bezeichneten Art (und dann in unendlicher Anzahl) herstellen lassen. Diese Polygone besitzen, wie der Herr Verfasser zeigt, merkwürdige Eigenschaften, von denen hier nur erwähnt sei, dass sie verschiedene sind, je nachdem die halbe Anzahl der Seiten grade oder ungrade ist, ein Umstand, der bei den entsprechenden Problemen in der Ebene nicht in dieser Weise hervortritt. Den Fall des Vierseites hat Herr Harnack (l. c. p. 73) behandelt.

(Vgl. auch die Notiz von Harnack, Clebsch Ann. XV. 560f.; F. d. M. 1879. XI. 568.) T.

J. B. Göbel. Ueber einige Eigenschaften des Cylindroids. Schlömilch Z. XXV. 281-300.

Unter dem Cylindroid ist diejenige geradlinige Fläche dritter Ordnung verstanden, deren Gleichung in die Form

$$z(x^2+y^2)=pxy$$

gebracht werden kann. Dieselbe besitzt vor Allem die Eigenschaft, dass alle auf ihr liegenden Kegelschnitte Ellipsen sind, die sich durch Projectionsstrahlen parallel der z-Axe auf die xy-Ebene in Kreise projiciren. Die vorliegende Arbeit enthält eine genauere Discussion dieser Fläche, namentlich rücksichtlich der auf ihr befindlichen Ellipsen und Raumcurven dritter Ordnung.

Auf die speciellere Betrachtung dieser Fläche ist der Herr Verfasser durch statische Betrachtungen geführt, welche er in seiner Dissertation: „Die wichtigsten Probleme der neueren Statik“ veröffentlicht hat. A.

W. R. Roberts. On the satellite of a line meeting a cubic. Trans. of Dublin. 1880.

In dieser Arbeit wird bewiesen, dass, wenn

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

die Gleichung einer Linie und

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz = 0$$

die Fundamentalcurve dritten Grades ist, die Gleichung des Satelliten lautet:

$$\lambda' x + \mu' y + \nu' z = 0,$$

wo

$$\lambda' = \lambda^4 - 2\lambda(\mu^3 + \nu^3) - 6m\mu^2\nu^2, \quad \mu' = \mu^4 - 2\mu(\lambda^3 + \nu^3) - 6m\lambda^2\nu^2,$$
$$\nu' = \nu^4 - 2\nu(\lambda^3 + \mu^3) - 6m\lambda^2\mu^2.$$

Csy. (O.)

F. Gerbaldi. Sui sistemi di cubiche gobbe o di sviluppabili di 3ª classe stabiliti col mezzo di due cubiche punteggiate proiettivamente. Atti di Torino XV. 810-811.

Ein Bericht der Herren A. Genocchi, G. Bruno, E. d'Ovidio über die genannte Arbeit, welche einige der Fragen untersucht, auf welche Herr d'Ovidio in seiner Abhandlung: „Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie“ aufmerksam gemacht hatte. Bezieht man zwei Raumcurven dritter Ordnung so auf einander, dass jedem Punkte der einen ein Punkt der andern entspricht, so erhält man als Ort der Verbindungslinien eine Fläche sechster Ordnung, auf welcher eine Schaar von Raumcurven dritter Ordnung liegt, und zwar geht durch jeden Punkt der Fläche eine Curve dieser Schaar. Zu dieser Schaar gehören vier ebene Curven mit Doppelpunkten, jede Ebene wird von vier Curven der Schaar berührt, und alle Curven der Schaar berühren dieselben acht Ebenen.

Mit dieser Schaar von Curven hängt eine zweite Schaar von Raumcurven dritter Ordnung zusammen, deren Osculationsebenen auch Osculationsebenen von Curven der ersten Schaar sind. Im Zusammenhange damit werden noch verschiedene andere Gebilde betrachtet. A.

D. Andere specielle Raumgebilde.

H. M. Jeffery. On spherical curves of the third class with three single foci. Quart. J. XVII. 104-129.

Im Anschluss an die früheren Arbeiten des Herrn Verfassers, in welchen ebene und sphärische Curven dritter Classe untersucht wurden, bei denen die drei Brennpunkte in einen Punkt zusammenfallen (s. F. d. M. VIII. 1876. 512) und bei denen zwei Brennpunkte zusammenfallen (s. F. d. M. IX. 1877. 560), wird in dieser Arbeit ebenso wie in einer anderen inzwischen erschienenen (s. F. d. M. X. 1878. 530) der allgemeinste Fall der sphärischen Raumcurven dritter Classe behandelt, nämlich der, in welchem die drei Brennpunkte getrennt liegen. Die Methoden und die Gesichtspunkte des Herrn Verfassers gehen zur Genüge aus den früheren Referaten hervor. A.

Brill. Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut der Königl. technischen Hochschule in München. Darmstadt. Brill.

XII. Darstellung der elliptischen Function $\varphi = am(u, k)$ durch eine Fläche. Von den stud. math. Th. Kuen und Chr. Wolf.

Sieht man u, φ, k als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes an, so definirt die Gleichung

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

die im Modell dargestellte Fläche. Für Moduln, die grösser als

1 sind, ist u dargestellt in der Form

$$u = \frac{1}{k}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}\sin^2\psi}}, \quad \sin\psi = k\sin\varphi.$$

XIV. Ueber die auf die Kugel abwickelbaren Schrauben- und Umdrehungsflächen. Von stud. math. Kuen.

Setzt man

$$\xi = b\sin\frac{u}{b}\cos v,$$

$$\eta = b\sin\frac{u}{b}\sin v,$$

$$\zeta = b\cos\frac{u}{b},$$

so sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes der Kugel; und v und $\frac{u}{b}$ geben die geographische Länge und das Complement der Breite desselben an. Dann ist das Quadrat des Linienelementes

$$d\sigma^2 = b^2\sin\frac{u^2}{b}dv^2 + du^2.$$

Unter einer Schraubenfläche versteht nun der Verfasser eine Fläche, welche von einer beliebigen starren Curve erzeugt wird, wenn dieselbe eine schraubenförmige Bewegung macht, also eine gleichzeitige Rotation um eine mit ihr fest verbundene Axe und eine Translation parallel dieser Axe, beide mit unveränderter Geschwindigkeit. Die Coordinaten eines Punktes einer solchen Schraubenfläche werden dann bei passender Wahl der Axen

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$
$$z = R + a\varphi,$$

wo R irgend eine Function von r ist; und zwar sind R und r die ebenen rechtwinkligen Coordinaten der Meridiancurve der Schraubenfläche, d. h. derjenigen ebenen Curve, in welcher jede durch die Schraubenaxe gelegte Ebene die Fläche schneidet, und $2a\pi$ ist die Höhe eines Schraubenganges. Ist nun ds das Linienelement dieser Schraubenfläche, so wird

$$ds^2 = dr^2\left[1+\frac{r^2}{a^2+r^2}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2\right]+(a^2+r^2)\left[d\varphi+\frac{a\,dR}{a^2+r^2}\right]^2,$$

und die Schraubenfläche ist auf die Kugel abwickelbar, wenn $ds^2 = d\sigma^2$ ist. Dies kann dadurch eintreten, dass

$$dr^2\left[1+\frac{r^2}{a^2+r^2}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2\right] = du^2,$$

$$a^2+r^2 = c^2b^2\sin^2\left(\frac{u}{b}\right),$$

$$d\varphi+\frac{a\,dR}{a^2+r^2} = \frac{dv}{c}$$

ist.

Man kann über R so verfügen, dass diese drei Gleichungen erfüllt werden, und zwar liefert die zweite Gleichung r als Function von u und somit die erste R als Function von u. Da hierdurch die Meridiancurve bekannt ist und ausserdem die Höhe des Schraubenganges, so ist das Problem im Wesentlichen gelöst, ohne dass es nöthig ist, die dritte Gleichung zu betrachten. Man findet nach Substitution von

$$y = b\cos\frac{u}{b}, \quad r^2 = c^2b^2-a^2-by^2$$

$$R = -bc\int\frac{dy}{\sqrt{c^2(b^2-y^2)\left(1-\frac{c^2}{b^2}y^2\right)-a^2}}$$
$$+\frac{c^5}{b}\int\frac{y^2(b^2-y^2)\,dy}{(c^2b^2-a^2-c^2y^2)\sqrt{c^2(b^2-y^2)\left(1-\frac{c^2}{b^2}y^2\right)-a^2}}.$$

Der Ausdruck für R ist ein elliptisches Integral, welches sich in drei Integrale der verschiedenen Gattungen zerlegt. Der Herr Verfasser stellt dieselben zum Zwecke der Berechnung vollständig durch ϑ-Functionen dar.

Ueber die erhaltenen Schraubenflächen ist noch folgendes zu sagen. Die Meridiancurve ist periodisch, die einzelnen Theile hängen zusammen durch Spitzen, deren Tangenten senkrecht zur Axe stehen, und die gleich weit von der Axe abstehen, wie überhaupt jede zwischen zwei Spitzen liegende Ranke symmetrisch ist. Jede solche Ranke beschreibt für sich eine Schraubenfläche,

welche sich in eine Kugelzone abwickeln lässt, und es entsprechen den Parallelkreisen auf der Kugelzone gewisse Schraubenlinien. Die Kugelzone ist begrenzt durch zwei gleiche Parallelkreise. Nennt man das Complement der Breite für einen derselben $\frac{u_0}{b}$, so ist $b^2 \cos \frac{u_0^2}{b} = \beta^2$, wo β^2 der kleinste derjenigen beiden Werthe von y^2 ist, für welchen die Radicale des Integrals verschwinden. Auf die übrigen Theile der Kugel wickelt sich kein Theil der Schraubenfläche reell ab. Der grösste Werth von r entspricht derjenigen Schraubenlinie, welche sich auf den Aequator abwickelt, während der kleinste den Schraubenlinien entspricht, welche auf die Grenzkreise fallen; sie sind gegeben beziehungsweise durch die Gleichungen

$$r_1^2 = c^2b^2 - a^2; \quad r_2^2 = c^2b^2 \sin \frac{u_0^2}{b} - a^2.$$

Zwischen den Constanten c und a existirt der Zusammenhang, dass $c^2b^2 - a^2 > 0$ sein muss, damit die Schraubenfläche reell werde. Wählt man $a = 0$, so reducirt sich die Schraubenfläche auf eine Rotationsfläche, welche durch die Constante c allein charakterisirt ist. In dem Ausdruck für R verschwindet alsdann das Integral dritter Gattung. Der Herr Verfasser hat nun für denselben Werth von b, also für dieselbe Kugel, aber für verschiedene a und c Modelle angefertigt. Ein paar Druckfehler, die in den Formeln übersehen sind, werden bei aufmerksamem Lesen leicht erkannt; sie sind deshalb in dem Referat ohne besondere Notiz verbessert.

XV. Schraubenfläche mit constantem negativen Krümmungsmass.

Dieselbe wird erzeugt, indem man eine Tractrix um ihre Asymptote als Axe schraubt. Sie hat die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad z = m\varphi + c\lg\frac{2+\sqrt{c^2-r^2}}{r} - \sqrt{c^2-r^2}.$$

r und φ sind die Parameter, m und c Constante, und zwar ist $2\pi m$ die Höhe des Schraubenganges, c die Länge der Tangente

der Tractrix. Das Krümmungsmass ist

$$-\frac{1}{c^2+m^2}.$$

Die Fläche bildet ein Gegenstück zu der vorigen, welche constantes positives Krümmungsmass besitzt.

XVIII. Die Enveloppen geodätischer Linien auf dem verlängerten und auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoid. Von Dr. A. v. Braunmühl.

Der Herr Verfasser hat in Clebsch Ann. XIV. S. 557 (siehe F. d. M. Bd. XI. 1879. p. 539) die Enveloppen der von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien der Rotationsflächen zweiten Grades genauer betrachtet. In der vorliegenden Notiz werden die elliptischen Integrale, auf deren Auswerthung es ankommt, auf die Normalform reducirt und es wird hierdurch die Berechnung vermittelt.

XIX. Die vier Arten der Raumcurven dritter Ordnung. Von stud. math. Lange.

Die Raumcurven dritter Ordnung werden nach ihrer Lage zur unendlich entfernten Ebene E_∞ wie folgt eingetheilt:

1) Die cubische Ellipse hat einen reellen Punkt mit E_∞ gemein.

2) Die cubische Hyperbel hat drei getrennte reelle Punkte mit E_∞ gemein.

3) Die cubisch-hyperbolische Parabel schneidet die E_∞ in einem Punkte und berührt sie in einem anderen Punkte.

4) Die cubische Parabel osculirt die E_∞ in einem Punkte.

Ein anderer Fall als die vier genannten kann nicht eintreten. Der Satz, dass der Ort aller Secanten einer cubischen Raumcurve, welche von einem Punkte derselben ausgehen, ein Kegel zweiter Ordnung ist, welcher in einen Cylinder übergeht, wenn jener Punkt in's Unendliche rückt, führt leicht zu folgenden Schlüssen:

1) Durch die cubische Ellipse lässt sich nur ein reeller Cylinder zweiten Grades legen und zwar ein elliptischer und unzählig viele Kegel, deren jeder mit dem Cylinder eine Gerade gemein hat. Umgekehrt ist der Durchschnitt eines elliptischen

Cylinders mit einem Kegel (zweiter Ordnung), die ausserdem eine Gerade gemein haben, eine cubische Ellipse.

2) Durch die cubische Hyperbel lassen sich drei hyperbolische Cylinder legen, von denen je zwei eine unendlich ferne Gerade gemein haben. [Es ist wohl nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, dass der letztere Ausdruck nur im Sinne der perspectivischen Auffassung zu verstehen ist, wie sie streng z. B. in von Staudt's Geometrie der Lage entwickelt ist. Wenn man sagt, eine Fläche habe eine unendlich entfernte Gerade, so ist dadurch nur die Stellung eines Büschels von Parallelebenen angegeben, mit welchen parallel die Fläche in's Unendliche geht. Da ohne Rücksicht auf die strenge perspectivische Auffassung einige Aussprüche des Herrn Verfassers missverstanden werden könnten, so hält es Referent für nöthig, im Folgenden den Sinn jedesmal genau festzustellen. Anm. des Ref.] Der Sinn des obigen Ausspruches ist, dass eine Asymptotenebene des einen Cylinders mit einer Asymptotenebene des andern parallel ist. Die cubische Hyperbel kann demnach als Durchschnitt zweier solcher Cylinder oder auch als Durchschnitt eines hyperbolischen Cylinders mit einem Kegel, der ausserdem mit jenem eine Gerade gemein hat, erzeugt werden.

3) Durch die cubisch-hyperbolische Parabel lässt sich ein hyperbolischer und ein parabolischer Cylinder legen, welche (in perspectivischer Auffassung) eine unendlich entfernte Gerade gemein haben, d. h. welche so liegen, dass die Diametralebenen des parabolischen Cylinders einer Asymptotenebene des hyperbolischen parallel sind. Sie kann erzeugt werden als Durchschnitt zweier solcher Cylinder oder eines parabolischen Cylinders mit einem Kegel, mit dem er ausserdem eine Gerade gemein hat, oder auch eines hyperbolischen Cylinders mit einem Kegel, mit dem er eine Gerade gemein hat, wenn die durch die Kegelspitze parallel einer Asymptotenebene des Cylinders gelegte Ebene den Kegel berührt.

4) Durch die cubische Parabel lässt sich nur ein Cylinder und zwar ein parabolischer legen. Die Curve wird erzeugt als Durchschnitt eines Kegels, mit dem er eine Gerade gemein hat,

wenn die durch die Kegelspitze gelegte Diametralebene des Cylinders den Kegel berührt.

Nach diesen Gesetzen sind die Curven mit den Hülfsmitteln der darstellenden Geometrie und zwar jedesmal als Durchschnitt eines Cylinders und eines Kegels construirt.

XX. Die sphärischen und die ellipsoidalen Curven einer Wellenfläche. Von Dr. Böklen.

Zwei Paar confocaler Kegel, welche die secundären optischen Axen zu reellen Focallinien haben, und von denen das eine Paar das andere (rechtwinklig) schneidet, schneiden aus einem Mantel der Wellenfläche ein Viereck aus, in welchem die Entfernungen je zweier Gegenecken gleich sind. Jeder dieser Kegel schneidet den einen Mantel der Wellenfläche in einer sphärischen, den andern in einer ellipsoidischen Curve. Diese Curven, welche der Herr Verfasser eingehender in Schlömilch Z. XXIV. und XXV. behandelt hat, sind auf dem Modell dargestellt; ferner sind darauf die Nabelpunkte mit Hülfe einer von Herrn Mannheim (C. R. 5. Mai 1879) gegebenen Gleichung verzeichnet. A.

Mathematische Modelle aus der Verlagshandlung von Brill.

Serie III. Gipsmodelle von Flächen zweiter Ordnung, ausgeführt von K. Diesel, Stud. math. in München.

18 Modelle in geeigneter Auswahl, auf denen theils die Krümmungslinien, theils die erzeugenden Geraden, sowie die Axenschnitte dargestellt sind. Die Kegel sind Asymptotenkegel zu beiden Arten von Hyperboloiden. Die Serie ist in zwei Gruppen getheilt. Die erste Gruppe entspricht elementaren, die andere weitergehenden Betrachtungen.

Serie IV. Fadenmodelle von Flächen zweiter Ordnung dargestellt durch Seidenfäden mit Messinggestellen.

Fünf Modelle, theils unveränderlich, theils beweglich, zur Darstellung der beiden Schaaren gerader Linien, des Durchschnitts einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung mit einer Tangentialebene, des Ueberganges eines Hyperboloids in einen Kegel u. dgl.

A.

O. BÖKLEN. Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Schlömilch Z. XXV. 207-214.

Eine Darlegung solcher Eigenschaften der Wellenfläche, welche für eine plastische Darstellung derselben zweckmässige Anhaltspunkte geben. Schn.

O. BÖKLEN. Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Schlömilch Z. XXV. 346-351.

Es wird folgende Erzeugungsart der Wellenfläche begründet: Die Hauptbrennpunkte aller Ellipsoide, welche einen Centralschnitt gemeinschaftlich haben, und deren grosse Axe eine constante Länge hat, liegen auf einer Wellenfläche. Im Anschluss daran werden einige Relationen entwickelt, welche besonders die Beziehungen der Wellenfläche zu ihrer Fusspunktenfläche und die Natur der letzteren zum Gegenstande haben. Schn.

C. SCHILLING. Die Minimalfläche fünfter Classe. Diss. Göttingen.

Die Arbeit stellt die Hauptpunkte einer Untersuchung von S. Lie über algebraische Minimalflächen (Beiträge zur Theorie der Minimalflächen, Clebsch Ann. XIV. 331-416 und XV. 465-506, siehe F. d. M. XI. 1879. 587, vgl. auch F. d. M. IX. 1877. 572 und X. 542), in etwas modificirter Form dar und untersucht specieller die Eigenschaften der Minimalflächen fünfter Classe. In Bezug auf die allgemeineren Untersuchungen kann auf die Arbeiten des Herrn Lie verwiesen werden, nur sei hervorgehoben, dass in der vorliegenden Abhandlung eine Bestimmung von Ordnung, Rang und Classe für Minimalflächen unter besonders einfachen Voraussetzungen enthalten ist.

Die Untersuchung der Minimalflächen fünfter Classe hat deswegen ein besonderes Interesse, weil nach einem Satze von Henneberg es (ausser der Ebene) keine reelle Minimalflächen von anderer als der fünften Classe giebt. Dieselben lassen sich durch rationale Parameter ausdrücken, und sind alle einander

ähnlich. Die Coordinaten lassen sich folgendermassen ausdrücken:

$$x = \left(\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s_1^3}\right) - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1}\right) + 3(s + s_1) - (s^3 + s_1^3),$$

$$y = i\left[\left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s_1^3}\right) + 3\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_1}\right) + 3(s - s_1) + (s^3 - s_1^3)\right],$$

$$z = 3\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s_1^2}\right) + 3(s^2 + s_1^2).$$

Um reelle Punkte der Flächen zu erhalten, hat man für s und s_1 conjugirte Werthe zu setzen. Setzt man

$$s = re^{iq}, \quad s_1 = re^{-iq},$$

so wird

$$\begin{aligned} x &= 2(r^{-3} - r^3)\cos 3q - 6(r^{-1} - r)\cos q, \\ y &= 2(r^{-3} - r^3)\sin 3q + 6(r^{-1} - r)\sin q, \\ z &= 6(r^{-2} + r^2)\cos 2q. \end{aligned}$$

Die Discussion erstreckt sich u. A. auf die Durchschnitte der Fläche mit den Coordinatenebenen und der unendlich entfernten Ebene, auf eine Schaar einhüllender Cylinder sechsten Grades, auf singuläre Punkte und sonstige Singularitäten. Die Fläche besitzt die z-Axe als Doppelgerade, die zwei dreifachen Geraden $z = 0$, $x = \pm y$; eine dreifache Gerade in unendlicher Entfernung in der Ebene $z = 0$; die Fläche hat längs derselben einen neunfachen Contact mit der unendlich entfernten Ebene; zwei dreifache unendlich entfernte conjugirte Gerade in den Ebenen $x \pm iy = 0$; zwei Doppelcurven fünfter Ordnung in den beiden Symmetrieebenen; vier Rückkehrcurven sechster Ordnung. Der Abhandlung ist ein stereoscopisches Bild eines Modelles beigegeben. Zum Schluss macht der Herr Verfasser noch besonders auf eine Abweichung seiner Resultate von denen des Herrn Henneberg aufmerksam; dieser hat nämlich den Grad der Fläche gleich 1[illegible] gefunden, während derselbe nur 10 beträgt, wie dies Herr Li[illegible] bereits gefunden hatte. Der Grund des Irrthums wird nachgewiesen. A.

NIEWENGLOWSKI. Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima de contour donné. Ann. de l'Éc. N. (2) IX. 227-301.

Die Arbeit enthält, wie der Titel besagt, eine eingehende Auseinandersetzung der Riemann'schen Theorie der Minimalflächen, und es scheint, als ob sie einerseits den Zweck verfolgt, die Riemann'schen Methoden in Frankreich bekannter zu machen, andererseits aber auch den, auf die Verdienste Bonnet's um die Erforschung dieser Flächen hinzuweisen. Namentlich macht der Herr Verfasser darauf aufmerksam, dass schon Bonnet complexe Variablen zur Erforschung der Minimalflächen verwendet habe. Die Arbeit enthält ausser der allgemeinen Theorie auch die von Riemann selbst behandelten Beispiele, zu denen aber keine neuen hinzugefügt sind. A.

Capitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

A. HIRST. On the complexes generated by two correlative planes. C. R. XCI. 582.

V.

C. STEPHANOS. Sur la théorie des connexes conjugués. Darboux Bull. (2) IV. 318-328.

Zu einem Connexe $[m, n]$ $f(xu) = 0$ gehört bekanntlich ein Connex $F(y, v) = 0$ $[\mu, \nu]$, welcher der Conjugirte des ersten heisst. F steht zu f in einer analogen Beziehung, wie die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten zu ihrer Gleichung in Punktcoordinaten. Zwischen den Zahlen m, n; μ, ν bestehen demgemäss Relationen, welche nach Art der Plücker'schen Gleichungen erklären, weshalb Ordnung und Classe des conjugirten Connexes von F sich wieder zu m, n erniedrigen. Zur Ermittelung derselben

wird man einerseits die Singularitäten der Connexe, andererseits die conjugirte Beziehung selbst genauer zu untersuchen haben. Mit der letzteren Frage beschäftigt sich insbesondere die vorliegende Arbeit. Durch die conjugirte Beziehung werden zugleich zwei andere Verknüpfungen (liaisons) $\varphi(xy) = 0$ und $\psi(u, v) = 0$ vermittelt, welche die beiden reciproken Formen darstellen; die reciproken Formen von φ und ψ führen dann auf F. Umgekehrt müssen wieder die reciproken Formen von F auf φ und ψ führen. Hierbei treten aber gewisse Factoren auf, deren Anwesenheit die erforderliche Erniedrigung dieser Reciprokalformen erklärt; diese werden ihrer geometrischen Bedeutung und ihrer Multiplicität nach bestimmt. Zugleich ergiebt sich auf Grund der Zwischenformen φ, ψ eine Reihe von Beziehungen zwischen ψ und F, durch welche theils bekannte, theils neue Sätze gewonnen werden, deren Inhalt sich indess nicht wohl im Auszuge wiedergeben lässt. V.

F. Schur. Zur Theorie der Strahlencomplexe zweiten Grades. Clebsch Ann. XVII. 107-109.

Die einfach unendlich vielen adjungirten Formen eines Complexes $\Sigma a_{ik} p_i p_k = 0$ erhält man bekanntlich durch Elimination der p_i aus den Gleichungen:

$$\varrho q_i = \Sigma a_{ik} p_i p_k + \lambda p_{i+3}.$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen wird hier geometrisch interpretirt und so der Satz erhalten, dass die adjungirten Formen ein System von Complexen zweiten Grades mit derselben Singularitätenfläche bilden, ein Satz, der implicite schon in den früheren Untersuchungen von Herrn Klein enthalten war. V.

G. Battaglini. Sui complessi di secondo grado. Battaglini G. XVII. 1-14.

Die Bemerkung, dass, falls durch jeden Punkt des Raumes ein Strahlenkegel n^{ter} Ordnung geht, diese Strahlen im Allgemeinen nicht einem Complexe n^{ter} Ordnung angehören, sondern

erst in ein mehrstufiges System solcher Complexe eingeordnet werden können, wird an dem System der Kegel zweiter Ordnung durch fünf feste Punkte im Zusammenhange mit einer analytischen Untersuchung des tetraedralen Complexes sehr ausführlich erläutert. V.

F. Aschieri. Rappresentazione sullo spazio punteggiato di alcune forme di 3ª specie composte di rette. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII. 182-191.

Die linearen Congruenzen, deren Directricen die projectiv zugeordneten Strahlen zweier linearer Strahlbüschel sind, bilden einen tetraedralen Complex. Ersetzt man eines der Büschel resp. beide durch ein Büschel zweiter Ordnung (serie rigata, Erzeugung eines Hyperboloids), so entsteht ein Complex dritter resp. vierter Ordnung. Die Abbildung dieser drei Gebilde auf den Punktraum vermittelt sich in einfacher Weise durch projective Beziehungen zwischen Ebenen und Punkten. V.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

E. Bertini. Sulle trasformazioni univoche piane e in particolare sulle involutorie. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII. 443-452.

Diese Arbeit ist die Fortsetzung einiger früherer (vgl. das ausführliche Referat in F. d. M. Bd. IX. 1877. p. 484) und erledigt eine dort offen gebliebene Frage betreffend involutorisch-eindeutige ebene Transformationen mittels einiger Sätze über eindeutige Transformationen überhaupt.

Es wird zunächst gezeigt, dass die schon früher betrachteten (L) Curven in zwei verschiedene Systeme zerfallen. Denn, ist ihre Vielfachheit $= \alpha_{ik}$, so gehört das eine System zu der Fundamentalcurve (von der Ordnung r_i) mit α_{ik}-fachem Punkt in dem entsprechenden Fundamentalpunkt der Ordnung r'_k; das andere, indem man i und k vertauscht.

Zu einer Gruppe von Fundamentalpunkten derselben Ordnung gehört eine entsprechende Gruppe von Fundamentalcurven, die bekanntlich alle ω-mal durch alle Punkte der Gruppe gehen, excl. einen, den sie ω'-mal passiren.

Dann zeigt der Herr Verfasser die wichtige Relation unter ihnen

$$\omega' - \omega = 1.$$

Weiter ergiebt sich: „Die Multiplicität einer Fundamentalcurve in einem Fundamentalpunkt ist grösser oder gleich ihrer Multiplicität in einem andern Fundamentalpunkt niedrigerer Ordnung."

Mit Hülfe einer schon früher vom Herrn Verfasser aufgestellten (cfr. F. d. M. IX. 1877. p. 484) Relation für die Zahlen $\alpha_{i\beta}$ einer solchen Fundamentalcurve (β), die die einzige ihrer Ordnung ist, ergiebt sich nunmehr der Hauptsatz: „Wenn in einer der beiden Ebenen keine Gruppen von einfachen und Doppelpunkten (excl. isolirten) existiren, so gehen alle Fundamentalcurven der grössten Ordnung durch alle Fundamentalpunkte." Ist das letztere nicht der Fall, so gehen sie durch alle diese Punkte bis auf einen und bilden entweder (im Fall der einfachen Punkte) eine Gruppe von drei Curven oder (im Fall der Doppelpunkte) eine Gruppe von sechs Curven.

Die Anwendung auf involutorische Systeme liefert dann das gegen früher (F. d. M. IX. p. 580) modificirte Resultat.

Eine involutorische Transformation, deren Fundamentalpunkte nicht zusammengerückt sind, ist mittels einer quadratischen Transformation immer in der Ordnung zu erniedrigen, ausgenommen folgende Fälle:

a) Harmonische Homologie (specielle Jonquières'sche Transformation).

b) Die Jonquières'schen Transformationen der Ordnung $p+2$ mit einer Doppelcurve der Ordnung $p+2$ und dem Geschlecht p.

c) Transformation achter Ordnung mit sieben dreifachen Punkten.

d) Transformation 17ter Ordnung mit acht sechsfachen Punkten.

My.

S. KANTOR. Wie viele cyclische Gruppen giebt es in einer quadratischen Transformation der Ebene? Brioschi Ann. (2) X. 64-71.

S. KANTOR. Beantwortung derselben Frage für Cremona'sche Transformationen. Brioschi Ann. (2) X. 71-74.

S. KANTOR. Sur le nombre des groupes cycliques dans une transformation de l'espace. C. R. XC. 1156-1158.

S. KANTOR. Ueber successive lineare Transformationen. Wien. Ber. LXXXII.

S. KANTOR. Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à r dimensions. Bull. S. M. F. VIII. 208-215.

S. KANTOR. Zur Theorie der successiven quadratischen Transformationen in der Ebene. Wien. Ber. 1880.

Der Herr Verfasser gedenkt nächstens seine Studien über periodische Transformationen vervollständigt und zusammenhängend herauszugeben, so dass hier vorläufig nur das Wichtigste hervorgehoben werden soll.

Es diene als Beispiel eine ebene Collineation. Durch drei Punktepaare aa', bb', cc' ist dieselbe noch nicht bestimmt: entspricht einem vierten festen Punkte d ein in der Ebene variabler Punkt $v = d'$, so hat man ein Sturm-Hirst'sches Collineations-Netz. Dem Punkt v als Punkt des Systems (a, b, c) entspricht wieder ein Punkt v', welche Verwandtschaft besteht dann zwischen v und v'? Es zeigt sich, dass die Verwandtschaft $(v-v')$ eine quadratische, 4-deutige ist. Letzteres heisst also: „Es

giebt vier Punkte v, welche man d entsprechen machen kann, um nach zwei Transformationen v' zu erhalten.“ Den Geraden (v) entspricht ein Kegelschnittnetz (v') und umgekehrt den Geraden (v') ein Kegelschnittnetz (v); die Hermite'sche und Cayley'sche Curve dieser Netze stehen in engster Beziehung zu einander.

Lässt man aber v fest, d sich bewegen, so besteht zwischen d und v' eine ein-eindeutige quadratische Verwandtschaft, deren Hauptdreiecke bezw. (abc) und ($a'b'c'$) sind. Nach Obigem giebt es auch 4 Punkte d, welche man v' (als Punkt des zweiten Systems) entsprechen machen kann, um nach zwei (umgekehrten) Transformationen v zu erhalten. Diese sind die Doppelpunkte der Transformation ($d - v'$).

Kehren wir zurück zu den Punkten d, v, v', so entspricht v' (als Punkt des ersten Systems a, b, c..) wieder v'', etc. So gelangt man zu einem Punkt $v^{(n)}$. „Die Transformation ($v - v^{n}$) ist ($(n+1)^2 - 1$)-deutig und vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade.“ „Also, wenn wieder 3 Paare aa', bb', cc' einer Collineation gegeben sind, so kann man einem gegebenen Punkte d $(n+1)^2$ Punkte v entsprechen lassen, um nach der $(n+1)^{\text{ten}}$ Transformation zu einem gegebenen Punkt $v^{(n)}$ zu gelangen.“

Die Frage nach der Anzahl H_n von Punkten V, welche d erst nach der n^{ten} Transformation in sich zurückführen, liefert die auch zahlentheoretisch interessante Function:

$$H_n = n^2 - \Sigma \frac{n^2}{f_i^2} + \Sigma \frac{n^2}{f_{i_1}^2 f_{i_2}^2} - \cdots (-1)^{\nu} \Sigma \frac{n^2}{f_{i_1}^2 f_{i_2}^2 \ldots f_{i_\nu}^2},$$

wo $f_1 \ldots f_\nu$ sämmtliche Primfactoren von n sind.

Für eine Collineation in einem linearen Raum von r Dimensionen erhält man die entsprechende Function (Zahl der Punkte V, die d erst nach der n^{ten} Transformation in sich überführen), wenn man nur überall statt des Exponenten 2 den Exponenten r setzt.

Andererseits giebt es stets $n^2 - 1$ Collineationen, welche d überhaupt nach n Transformationen in sich zurückführen.

Stellt man die Frage, wie oft es möglich ist, dass in unserm Netz von ebenen Collineationen eine sich befindet, durch welche jeder Punkt der Ebene nach n-maliger Anwendung derselben in sich zurückkehrt, so findet man $(n-1)(n-2)$, im Allgemeinen

$(n-1)(n-2)\dots(n-r)$; soll jedoch jeder Punkt erst nach n-maliger Anwendung der Transformation in sich zurückkehren, so hat man wieder eine modificirte Formel:

$$(n-1)\dots(n-r)-\Sigma\left(\frac{n}{fi_1}-1\right)\dots\left(\frac{n}{fi_1}-r\right)$$
$$+\Sigma\left(\frac{n}{fi_1 fi_2}-1\right)\dots\left(\frac{n}{fi_1 fi_2}-r\right)$$
$$-\dots(-1)^r\Sigma\left(\frac{n}{fi_1\dots fi_r}-1\right)\dots\left(\frac{n}{fi_1\dots fi_r}-r\right).$$

Diese und ähnliche Fragen werden auch für Cremona'sche Transformationen in der Ebene, sowie für die eindeutige Transformationsclasse $\varrho x_i = \frac{k_i}{y_i}$, $i = 1\dots r$ gelöst.

My.

E. Amigues. Recherches sur deux modes de transformation des figures solides. Nouv. Ann. (2) XIX. 433-442, 481-492.

Enthält eine specielle Darlegung der Eigenschaften der eindeutigen cubischen Raum-Transformation $\varrho x_i y_i = k_i$, $i = 1\dots 4$, (mit vier Fundamentalpunkten), die bekanntlich denen der quadratischen Transformation in der Ebene ($i = 1, 2, 3$) ganz analog sind. Desgleichen wird die dazu reciproke $\sigma u_i v_i = \lambda_i$ untersucht, und es werden verschiedene Sätze, die überhaupt für eindeutige Transformationen gelten, hier speciell für den vorliegenden Fall abgeleitet.

Einem Punkte entspricht dann bekanntlich eine Steiner'sche Fläche. Einige Eigenschaften derselben werden mit Rücksicht auf diese Erzeugung abgeleitet und besonders der metrisch interessante Fall, dass die beiden unendlich fernen Ebenen sich entsprechen, auf sie angewandt. Es ergeben sich daraus einige Sätze über den „Centralpunkt" der Steiner'schen Fläche (der dem Mittelpunkt von Kegelschnitten ähnlich ist, cfr. F. d. M. X. 1878. p. 530).

My.

F. Aschieri. Di una particolare corrispondenza univoca fra elementi di spazi a tre dimensioni. Rend. Ist. Lomb. (2) XVI 531-539.

Untersuchung des particulären Complexes zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 0,$$

wo A etc. lineare Complexe vorstellen, nach Analogie der Flächen zweiter Ordnung. Seine Singularitätenfläche ist dargestellt durch

$$\begin{vmatrix} (ABC) & (ABD) \\ (CDA) & (CDB) \end{vmatrix} = 0,$$

wo z. B. $(ABC) = 0$ das den drei Complexen A, B, C gemeinsame Hyperboloid repräsentirt. Es werden verschiedene Erzeugungsweisen jenes Complexes angegèben und gewisse Involutionen der Generatricen der Fläche studirt, und dann wird mittels eines räumlichen Polarsystems eine ein-eindeutige Verwandtschaft zwischen den Punkten des Raumes und den Geraden jenes Complexes begründet und der analytische Ausdruck dafür aufgestellt. My.

B. Conforme Abbildung.

F. Lucas. Géométrie des polynômes. J. de l'Éc. Pol. XXVIII. 1-34.

Es handelt sich um die durch die Beziehung $F(z) = 0$, wo $F(z)$ eine ganze Function p^{ten} Grades von z bedeutet, vermittelte conforme Abbildung, die jedem Punkte L der Ebene eine Gruppe M von p Punkten zuordnet. Von den Resultaten der Untersuchung verspricht sich der Herr Verfasser Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Gleichungen.

Einleitungsweise wird die Abbildung der unendlich fernen Punkte, die der Kreise und Geraden behandelt. Rückt L in's Unendliche, so bilden die Punkte der Gruppe M die (unendlich fernen) Ecken eines regulären Polygons mit demjenigen (von der

Lage von L unabhängigen) Punkte G als Mittelpunkt, welcher der Schwerpunkt der Gruppe M ist. Beschreibt L einen Kreis um L', so beschreibt jeder Punkt M eine „Cassinoïde" mit p Brennpunkten, d. h. eine algebraische Curve $2p^{ten}$ Grades, deren Punkte von den dem Punkte L' entsprechenden Punkten M' Entfernungen haben, deren Product constant ist. Beschreibt L eine Gerade, so beschreiben die Punkte M die p hyperbolischen Aeste einer Curve p^{ten} Grades, die „Stelloïde" genannt wird, und deren Asymptoten von G ausgehend die Ebene in $2p$ gleiche Winkelräume theilen. Eine besondere Rolle spielen die $p-1$ Wurzelpunkte J der abgeleiteten Gleichung $F'(z) = 0$ (Centralpunkte) und die diesen entsprechenden Punkte I (die kritischen Punkte). Um den Verlauf der Abbildungen beliebiger geschlossener Züge zu studiren, werden zunächst die Abbildungen der extremen Fälle, in denen der Zug in's Unendliche sich erweitert, resp. unendlich klein wird, behandelt; im letzteren Falle handelt es sich hauptsächlich darum, ob der Zug einen kritischen Punkt einschliesst oder nicht. Das Ergebnis lässt sich kurz dahin zusammenfassen, dass sich jeder unendlich kleine geschlossene Zug in ebensoviel Züge transformirt, als es verschiedene Punkte in der entsprechenden Gruppe giebt. Nach Vorausschickung noch einiger Hülfsbetrachtungen über die Vereinigungen und Zerlegungen der Curvenzüge, aus denen die Abbildung besteht, welche mit der Deformation des abgebildeten Zuges dann und nur dann eintreten, wenn derselbe kritische Punkte überschreitet, ist der Verfasser dann im Stande, zur Abbildung beliebiger geschlossener Züge überzugehen, bei deren Behandlung es hauptsächlich darauf ankommt, ob sie durch kritische Punkte gehen oder solche umschliessen. Dann wendet sich die Untersuchung nochmals der Abbildung von Geraden zu. In einem besonderen Abschnitte wird der specielle Fall $p = 3$ näher behandelt. T.

A. Cayley. On a theorem relating to conformable figures. Proc. L. M. S. X. 143-146.

Der Herr Verfasser untersucht folgende Art einer conformen

Abbildung: Sind x, y die Coordinaten eines Punktes P der einen Figur, so wird der entsprechende Punkt P' der conformen Figur dadurch entstanden gedacht, dass man den Radius Vector OP durch den Factor $\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ vergrössert und zugleich eine Rotation des Radius Vectors um den Winkel $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y'}{x'}} - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{x}}$ vornimmt. Wird aus der zweiten Figur auf gleiche Weise eine dritte hergeleitet, so ist letztere wieder conform zur ersten. Dieser Satz steht in enger Beziehung zur Theorie der Functionen complexer Variabeln. M.

Ed. Weyr. Ueber die äquivalente Abbildung zweier Flächen. Casopis IX. 200. (Böhmisch).

Unter Anwendung allgemeiner Coordinaten wird die Bedingung dafür entwickelt, dass eine zwischen den Punkten zweier Ebenen festgesetzte Correspondenz von der angeführten Natur ist, d. h., dass Figuren, die einander entsprechen, gleichen Inhalt besitzen, also äquivalent sind. Es werden Abbildungen dieser Art aufgestellt, die ausserdem noch gewissen Bedingungen genügen; so wird z. B. der Fall behandelt, dass einem gegebenen Curvensystem ein anderes entspreche und überdies einer Curve eine gleichfalls vorweg gegebene Linie zugeordnet sei. Die äquivalente Collineation wird dann untersucht, und es wird zum Schlusse gezeigt, dass eine isogonale und äquivalente oder gleichflächige Verwandtschaft zweier Ebenen mit der Congruenz identisch ist. Std.

G. Holzmüller. Ueber die conforme Abbildung mittels ganzer und gebrochener rationaler Functionen und die damit zusammenhängenden isothermischen Curvensysteme. Pr. Hagen i. W.

Die Arbeit enthält eine Verallgemeinerung der bereits früher

vom Herrn Verfasser veröffentlichten Untersuchungen (F. d. M. VIII. 1876. p. 537. und IX. 1877. p. 590). Ist $z = x + yi$ und $Z = X + Yi$, so wird durch die Gleichung

$$Z = f(z),$$

wo $f(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet, also

$$f(z) = a_0(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)$$

ist, eine conforme Abbildung der z-Ebene in die Z-Ebene definirt. Der Factor a_0 kann ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gleich Eins gesetzt werden, weil eine Multiplication mit a_0 nur auf eine Veränderung des Masstabes und eine Drehung der ganzen Abbildung hinauskommt. Verwandelt man jeden Factor in ein Product $p_i e^{\varphi_i i}$, ebenso Z, so erhält man

$$Re^{i\theta} = (p_1 p_2 \dots p_n)\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\dots\varphi_n)},$$

also

$$R = p_1 p_2 \dots p_n, \quad \Theta = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_n.$$

Hieraus ergiebt sich sofort, dass die Kreise um den Anfangspunkt der Z-Ebene sich in die Curven der z-Ebene abbilden, für welche $p_1\, p_2 \dots p_n$, d. h. das Product der Entfernungen von den Punkten $a_1 \dots a_n$ constant ist, während die Geraden durch den Anfangspunkt der Z-Ebene sich in Curven der z-Ebene abbilden, für deren Punkte die Summe der Richtungswinkel constant ist. Diese beiden Curvenschaaren bilden ein Isothermensystem; die erste Art von Curven hat Analogie mit den Lemniscaten, die zweite mit den Hyperbeln.

Nimmt man allgemein statt $f(z)$ eine rationale Function, etwa

$$Z = \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)}{(z-b_1)(z-b_2)\dots(z-b_n)},$$

wo der constante Factor, der noch hinzutreten könnte, aus demselben Grunde wie oben unterdrückt ist, so liefert dieselbe Zerlegung

$$Re^{i\theta} = \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{q_1 q_2 \dots q_m}\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\dots\varphi_n-\chi_1-\chi_2-\dots\chi_m)},$$

also

$$R = \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{q_1 q_2 \dots q_m}, \quad \Theta = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_n - \chi_1 - \chi_2 - \cdots \chi_m,$$

woraus in analoger Weise der geometrische Charakter der Curven

zu erkennen ist, wenn man die Kreise $R = \text{const.}$ und die Geraden $\Theta = \text{const.}$ der Z-Ebene in die z-Ebene abbildet.

Ebenso sind in den beiden betrachteten Abbildungsarten geometrische Eigenschaften derjenigen Curve zu erkennen, welche man durch Abbildung einer durch ihre Polargleichung $F(R, \Theta) = 0$ gegebenen Curve der Z-Ebene in die z-Ebene erhält.

Mit den hier angedeuteten Eigenschaften und einigen daraus sich ergebenden Folgerungen, sowie einigen Specialisirungen beschäftigt sich die vorliegende Abhandlung. Uebrigens hat Herr Lucas in den C. R. LXXXVIII. (siehe F. d. M. VI. 1874. p. 414) ähnliche Untersuchungen angestellt. A.

Th. Craig. Orthomorphic projection of an ellipsoid upon a sphere. Am. J. III. 114-128.

Der Herr Verfasser giebt an, in einer früheren Arbeit bereits die conforme Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene untersucht zu haben, ein Problem, welches übrigens auch Herr Hoppe im Jahre 1870 behandelt hat (Clebsch Ann. II. 504, siehe F. d. M. II. 1870. 628.). Hierdurch ist die Aufgabe der conformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel bereits mit gelöst. Nichts destoweniger hat der Verfasser die Rechnung noch einmal durchgeführt, weil er derselben wegen der möglichen Gestalt der Erde eine gewisse praktische Bedeutung beimisst. Jedenfalls bietet die vorliegende Bearbeitung, mag man sie nun zur Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel oder auf die Ebene verwenden, ein durchgeführtes Beispiel der Rechnung mit elliptischen Integralen dritter Gattung dar.

Sind

$$\xi = R\cos u \sin v, \quad \eta = R \sin u \sin v, \quad \zeta = R\cos v$$

die Coordinaten eines Punktes der Kugel, so ist das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = R^2 \sin^2 v \left[du^2 + \frac{dv^2}{\sin^2 v}\right] = R^2 \sin^2 v \left[du^2 + d\left(\ln \operatorname{ctg}\frac{1}{2}v\right)^2\right].$$

Andererseits stellen die Gleichungen

$$x^2 = \frac{a^2(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}; \quad y^2 = \frac{b^2(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)};$$

$$z^2 = \frac{c^2(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

die Coordinaten eines Punktes eines Ellipsoids durch die Parameter λ_1, λ_2 dar, die den Krümmungslinien entsprechen. Das Quadrat des Linienelementes stellt sich in der Form dar:

$$ds_1^2 = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{4}\left[\frac{\lambda_1 d\lambda_1^2}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)} + \frac{\lambda_2 d\lambda_2^2}{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}\right],$$

oder, wenn man setzt:

$$p = \int\sqrt{\frac{\lambda_1}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}}\,d\lambda_1;$$

$$q = \int\sqrt{\frac{\lambda_2}{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}}\,d\lambda_2;$$

$$ds_1^2 = \left[\frac{\lambda_1-\lambda_2}{4}\right][dp^2+dq^2].$$

Dann ist die eine Fläche bekanntlich conform auf die andere abgebildet, wenn

$$u + i \ln \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}v = f(p+qi)$$

ist, wo $f(z)$ eine beliebige Function der complexen Variablen z bedeutet. Die einfachste Abbildung erhält man, wenn man $f(z) = Z$, also

$$u = p, \quad \ln \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}v = q$$

setzt. In diesem Falle entspricht die eine Schaar der Krümmungslinien einer Schaar von Parallelkreisen der Kugel und die andere Schaar derjenigen der dazu orthogonalen grössten Kreise. Es werden nun die Integrale p und q unter der Festsetzung, dass

$$-c^2 > \lambda_1 > -b^2 > \lambda_2 > -a^2$$

ist, durch geeignete Substitutionen auf die Normalform gebracht und die Rechnungen mit Hülfe der Θ- und Z-Functionen übersichtlich durchgeführt. A.

A. Tissot. Mémoire sur la représentation des surface et les projections des cartes géographiques. Nouv. Ann (2) XVIII. 337-356, 385-397, 532-548, 1879; Nouv. Ann. (2) XIX. Supp 1-40, 1880.

In dieser Fortsetzung einer früheren Arbeit (cfr. F. d. M X. 1878. p. 557) stellt der Verfasser zunächst folgende Bedingungen auf, die ein Kartennetz erfüllen soll. 1) Die Winkel der Karte brauchen nur annähernd den entsprechenden Winkeln der abzubildenden Fläche gleich zu sein; 2) die Variation des Längenmasstabes soll möglichst klein; 3) die Formeln für die Abbildung sollen möglichst einfach sein. Er stellt diesen Forderungen gemäss Formeln für die Abbildung von kleineren Theilen der Erdoberfläche auf, etwa von der Grösse Frankreichs oder Spaniens. Zu dem Zwecke denkt er im Innern des abzubildenden Gebietes einen Centralpunkt gewählt, nennt den durch diesen hindurchgehenden Meridian und Parallelkreis den mittleren, und bestimmt die Lage eines beliebigen Punktes durch die Länge s des durch den Punkt gehenden Meridians, gemessen von dem mittleren Parallelkreis an, sowie durch die Länge t des Parallelkreisbogens, gemessen vom mittleren Meridian an. Wird der Aequatorialhalbmesser der Erde zur Einheit genommen, so werden s und t nur kleine Grössen sein, z. B. für Spanien ist $s=\frac{1}{14}$, $t=\frac{1}{13}$. In der Bildebene wird Alles auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt das Bild des Centralpunktes ist, während die x-Axe das Bild des mittleren Meridians, die y-Axe das Bild des mittleren Parallelkreises berührt. Die Coordinaten x, y eines Bildpunktes sind unbekannte Functionen der Coordinaten s, t des entsprechenden Punktes der Erde; diese Functionen denke man nach Potenzen von s und t entwickelt und breche bei der dritten Potenz ab. Die unbestimmten Coefficienten der Entwickelung lassen sich dadurch bestimmen, dass 1) das Verhältnis eines Meridianbogens zu dem entsprechenden Bogen der Karte sich von der Einheit nur um Grössen zweiter Ordnung unterscheide; 2) dass dieselbe Forderung für einen Bogen eines Parallelkreises erfüllt werde;

dass endlich die Aenderung des Winkels zwischen Meridian
:l Parallelkreis eine Grösse dritter Ordnung wird. Dann er-
bt sich

$$x = s + \frac{\sin l_0}{2r_0} t^2 + \frac{A}{3} s^3 - Bs^2 t + Cst^2 + \frac{B}{3} t^3,$$

$$y = \frac{r}{r_0} t + \frac{B}{3} s^3 + As^2 t - Bst^2 + \frac{C}{3} t^3,$$

l_0 die Breite des mittleren Parallelkreises, r_0 dessen Radius während r den Radius des durch den Punkt s, t gehenden rallelkreises bezeichnet. Zwischen den Constanten A und C steht die Gleichung

$$2(A + C) \cos^2 l_0 = \cos 2l_0,$$

dass eine dieser Constanten, sowie auch B^2 willkürlich bleibt. s Verhältnis einer Bogenlänge auf der Erde zu der entsprechen-
ı auf der Karte weicht (sowohl für Meridian als Parallelkreis) a der Einheit ab um die Grösse

$$\varepsilon = As^2 - 2Bst + (\tfrac{1}{2} - A)t^2,$$

nn also keinesfalls auf Grössen dritter Ordnung herabsinken, e die Winkeländerung. Ueber die Coefficienten A, B, sowie er die Lage des Centralpunkts ist nun noch so zu disponiren, ss in der ganzen Ausdehnung der Karte ε möglichst kleine erthe annimmt. Der Verfasser giebt ein graphisches Versuchs-rfahren an, diese Bestimmung auszuführen; dasselbe ist mehr n praktischem, als mathematischem Interesse.

Nach Betrachtung einiger specieller Fälle wendet sich der erfasser zu einer ausführlicheren Besprechung der Kartennetze r Frankreich und Spanien, und giebt für letzteres die genauen ch seiner Methode berechneten Zahlen. Für eine Karte von rankreich würde die nach obigen Formeln ausgeführte Pro-ction bei zweckmässiger Bestimmung der Constanten, wie des entralpunktes die Winkeländerung (die bei der Generalstabs-arte 18 Minuten beträgt) auf 25 Sekunden reduciren, die Aende-ng des Längenmasstabes auf $\frac{1}{1100}$.

Im dritten und vierten Abschnitt werden circa 50 ver-

schiedene bisher benutzte Projectionsarten besprochen und i
Bezug auf die Erfüllung der oben genannten Forderungen g
prüft, woran sich Erörterungen über die in jedem specielle
Falle passendste Projectionsart anschliessen. Dieser umfan
reiche Theil der Arbeit, der für den Geographen von ungeme
nem Interesse ist, bietet doch in mathematischer Hinsicht nich
Neues. Wir müssen daher in Bezug auf die Einzelnheiten a
die Arbeit selbst verweisen. Wn.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

ↄAPLACE. Oeuvres complètes. IV. Paris. Gauthier-Villars.

Enthält den vierten Band der Mécanique céleste. Der Inalt des Bandes ist: Seconde Partie: Théories particulières des ıouvements célestes. Livre VIII. Théorie des satellites de Juiter, de Saturne et d'Uranus. Livre IX. Théorie des comètes. ivre X. Sur différents points relatifs au système du monde. upplement zur Capillartheorie. O.

V. SCHELL. Theorie der Bewegung und Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik. II. Band. 2te umgearbeitete Auflage. Leipzig. Teubner.

Ueber den ersten Band der neuen Auflage dieses Buches t bereits im vorigen Jahrgang des Jahrbuchs p. 603 referirt rorden. Der vorliegende zweite Band enthält den dritten und ierten Theil des Gesammtwerkes. Theil III. hat zum Titel: 'heorie der Kräfte und ihrer Aequivalenz (Dynamik im weiteren inne, einschliesslich Statik). Der vierte Theil behandelt die 'heorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung (Kinetik oder

Dynamik im engeren Sinne). Ueber die Aenderungen, die diese neue Auflage erfahren, ist bereits früher gesprochen worden. Ganz neu ist der im Capitel 9 enthaltene Abriss der Ball'schen kinetischen Theorie des unveränderlichen Systems. O.

Gilles. Die Newton'sche Anziehungskraft ist auf Bewegung nicht zurückführbar. Pr. Düsseldorf.

Enthält philosophische Speculationen über das Wesen von Kraft etc., verbunden mit einer Kritik zahlreicher früherer Versuche, unter denen Isenkrahe's: „Das Räthsel der Schwerkraft" specielle Berücksichtigung findet. Mathematisch Neues enthält die Arbeit nicht. O.

Capitel 2.

Kinematik.

H. Résal. Note sur les différentes branches de la cinématique. Liouville J. (3) VI. 49-50.

Abdruck der Arbeit aus den C. R. LXXXIX. 1090-1092, über die bereits im Jahrbuch Bd. XI. 1879. p. 611-612 berichtet worden ist. O.

A. Mannheim. Cours de géométrie descriptive de l'École polytechnique, comprenant les éléments de la géométrie cinématique. Paris. Gauthier-Villars.

Das vorliegende Werk enthält die Vorlesungen, welche Herr Mannheim an der École polytechnique während des Winters 1878/79 gehalten hat. Da diejenigen, welche an dem Unterricht der École polytechnique theilnehmen, bereits mit den Elementen der descriptiven Geometrie vertraut sind, so geht Herr Mannheim auf diese nicht weiter ein, sondern setzt sie als bekannt voraus

Sein Werk scheidet sich in zwei Theile. Der erste beschäftigt sich im Wesentlichen mit den verschiedenen Formen perspectivischer Darstellung, der zweite giebt eine Fülle interessanter Methoden für synthetische Behandlung von Curven und Flächen mit besonderer Berücksichtigung von solchen, welche in der Praxis häufig auftreten, wie Regelflächen, Umdrehungsflächen, Schraubenflächen, und führt zugleich in das Wissensgebiet ein, welches Herr Mannheim mit dem Namen „géométrie cinématique“ bezeichnet, und aus welchem er eine Reihe wissenschaftlicher werthvoller Ergebnisse im Laufe der Jahre veröffentlicht hat.

Der Lehre von der Perspective werden zwei Vorlesungen vorausgeschickt, von denen die eine sich mit den Schattenlinien und dem Schlagschatten der Körper befasst, die andere die sogenannten „projections cotées“ zum Gegenstande hat. Diese Projectionen finden eine zweckmässige Anwendung, wenn die horizontale Ausdehnung des Objects verhältnismässig viel grösser ist, als die verticale Erhebung, z. B. bei der Darstellung von Fortificationen. Man giebt in diesem Falle nur eine Horizontalprojection und vermerkt die verticale Erhebung durch Zahlenangaben. Eine Gerade im Raum stellt sich als Gerade im Bilde dar, und indem für zwei Punkte derselben die verticalen Erhebungen notirt werden, erhält man eine Vorstellung von ihrer Lage im Raum. Um eine Ebene zu verzeichnen, entwirft man das Bild einer Linie, welche in jener Ebene gelegen ist und die grösste Neigung zur Bildebene hat, und verdoppelt diese Gerade durch einen ihr parallelen Zug, so dass sie die Gestalt einer Doppellinie gewinnt, um sie von dem Bilde einer Geraden zu unterscheiden. In diese Projectionsmethode führt der Verfasser durch Lösung einer Anzahl elementarer Aufgaben ein, z. B.: „Aus der Bildebene zweier Ebenen das Bild ihres Durchschnitts zu finden“ oder „Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, welche gegen die Horizontalebene eine gegebene Neigung hat,“ und schliesst mit der Lösung der Aufgabe, den Schlagschatten eines Kegels zu construiren, der mit der Basis auf einer geneigten Ebene ruht, und auf diese seinen Schatten wirft. Bei der Behandlung der Perspective verfolgt Herr Mannheim den Lehrgang, den vor

ihm Herr de la Gournerie genommen. An eine treffliche Dar-
legung der Elemente der conischen Perspective reiht sich di
Cavalierperspective, an diese die axonometrische und deren be
sondere Form, die isometrische Perspective. Zweckmässige Bei
spiele für die Darstellung von beleuchteten Objecten mit ihre
Schattenlinien und Schlagschatten erläutern die verschiedene
Formen perspectivischer Darstellung und lassen die praktisch
Bedeutung der theoretischen Betrachtungen klar erkennen, da
gegen hat der Verfasser die Entwickelung von Eigenschafte
geometrischer Gebilde aus den perspectivischen Darstellung
formen, wie sie sich etwa in dem „Traité des propriétés projective
des figures" von Poncelet finden, als seinen Zwecken nicht en
sprechend bei Seite gelassen, und giebt nur hin und wieder eine
Hinweis, wenn ein solcher sich ihm unmittelbar bietet.

Der zweite Theil enthält eine zum ersten Mal zu eine
Lehrgang zusammengefasste Einführung in die kinematische Ge
metrie. Während die Kinematik die Bewegung unabhängig vo
den bewegenden Kräften behandelt, beschäftigt sich die kinema
tische Geometrie mit solchen Bewegungen ohne Rücksicht a
die Kräfte und auf die Zeit. Wie fruchtbar die darin üblich
Betrachtungsweise für das Studium der räumlichen Formen is
haben viele Arbeiten Mannheim's dargethan, über welche i
dieser Zeitschrift berichtet worden ist. Alle die reichen Ergeb
nisse seiner Untersuchungen finden sich hier im zweiten Thei
des Werkes vereinigt, seine Behandlung der Regelflächen, d
Wellenfläche, eine durchsichtige Entwickelung des Theorems vo
Malus und Dupin, dass ein Normalensystem einer Fläche na
der Brechung an einer zweiten Fläche wieder als ein Normale
system einer Fläche aufgefasst werden kann, ferner die allg
meine Theorie der Verrückung starrer Körper und die Constru
tionen für die Normalen der Bahnen, mögen diese als Curve
oder als Flächen auftreten, die sinnreiche Benutzung der Hülf
geraden für das Studium der Regelflächen und die darauf si
gründende allgemeine Behandlung der Strahlenbündel, die Krüm
mung der Flächen mit Hülfe der von ihm eingeführten Element
die er mit dem Namen „normalies" bezeichnet hat, und die E

örterung mancher anderer Fragen, welche für die Erkenntnis der Raumwelt von weit tragender Bedeutung sind. In der Form von Supplementen sind solche interessante geometrische Entwickelungen den einzelnen Capiteln beigefügt. Nach den allgemeineren geometrischen Betrachtungen beschäftigt sich der Verfasser mit den Schattenlinien von beleuchteten Flächen, im Besonderen mit denen von Umdrehungsflächen, giebt Constructionen für die Tangenten an solche Linien und wendet sich in den letzten Capiteln zum Studium besonderer Flächenformen. Eingehend wird die Natur der Schraubenflächen durchforscht; es werden eigenthümliche Arten von Schatten- und Halbschatten untersucht, wenn an Stelle eines leuchtenden Punktes einfache Formen leuchtender Flächen treten, und Flächen behandelt, die als „surfaces d'égale pente" und „surfaces gauches" von ihm bezeichnet werden. Jene werden erzeugt durch Bewegung einer Tangentialebene, welche während ihrer Bewegung die Neigung gegen eine Horizontalebene bewahrt, diese durch eine Gerade, welche längs dreier Leitcurven gleitet. Das Werk schliesst mit einer Darstellung von topographischen Flächen nach der Methode der Linien gleichen Niveaus und der Behandlung von Aufgaben, welche den Leser mit dieser Darstellungsform auf eine zweckmässige Weise vertraut machen.

Es ist kein Zweifel, dass das gehaltreiche Werk nicht nur in hohem Grade geeignet ist, die Jünger der mathematischen Wissenschaft in geistvolle Methoden der Geometrie einzuführen, sondern auch dem Kundigen vielseitiges Interesse bietet, und daher weiten Kreiseneine reiche Anregung zur Förderung der Wissenschaft gewähren wird. Schn.

W. Kapteyn. Théorème de géométrie plane.
Grunert Arch. LXV. 221-224.

Sind $a_1, a_2, \dots a_n$ die Seiten eines Polygons, $b_1, b_2 \dots b_n$ die Seiten eines zweiten Polygons von derselben Seitenzahl, so lässt sich eine gebrochene Linie construiren, deren aufeinander

folgende Elemente gleiche Länge und Richtung haben wi $a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots a_n, b_n$. Diese Linie muss sich schliessen; den da der Punkt, zu dem man in der genannten Weise gelangt unabhängig von der Ordnung der Elemente ist, so kommt ma zu demselben Punkt, wenn man zu aufeinander folgenden Ele menten erst die $a_1, a_2, \ldots a_n$ und dann die $b_1, b_2 \ldots b_n$ wählt. Is für das zweite Polygon irgend ein Punkt M gegeben, und sin seine Verbindungsstrecken mit den Ecken bezüglich $p_1, p_2 \ldots p$ so kann man in dem dritten Polygon $a_1\, b_1\, a_2\, b_2 \ldots a_n\, b_n$ auf de Seiten $b_1\, b_2 \ldots b_n$ Dreiecke construiren, deren Seiten bezüglic gleich und parallel mit $p_1\, p_2 \ldots p_n$ sind. Das dritte Polygo setzt sich nunmehr zusammen aus dem ersten Polygon, der Summ der Dreiecke, die das zweite Polygon ausmachen, und Parallelo grammen, deren Summenwerth durch

$$a_1 p_1 \sin(a_1 p_1) + a_2 p_2 \sin(a_2 p_2) + \cdots + a_n p_n \sin(a_n p_n)$$

bestimmt ist. Verändert man die Lage des Punktes M, so bleibe die drei Polygone unverändert, also bewahrt die Summe

$$a_1 p_1 \sin(a_1 p_1) + a_2 p_2 \sin(a_2 p_2) + \cdots + a_n p_n \sin(a_n p_n)$$

für jede Lage von M denselben Werth. Schn.

F. Wittenbauer. Theorie der Beschleunigungscurven
Wien. Anz. 1880. 225-226; Wien. Ber. 1880.

Bewegt sich ein Punkt nach irgend einem Gesetz in eine krummlinigen Bahn, so werden die Richtungen der Beschleuni gungen in jedem Punkte der Bahn eine Curve umhüllen. Dies nennt der Verfasser Beschleunigungscurve. Ihre Beziehung zu Bahncurve und zu dem noch in irgend einer Form gegebene Bewegungsgesetz des beschreibenden Punktes macht Herr Witten bauer zum Gegenstand seiner Studien. Besonders Bemerkens werthes aus denselben ist nicht zu verzeichnen.

Schn.

H. Résal. Sur quelques théorèmes de cinématique.
C. R. XC. 769-773.

Herr J. Habich hatte den Satz aufgestellt: „Wenn die Richtung der Beschleunigung eines Punktes constant ist, so ist sie proportional dem Quotienten aus dem Cubus seiner Geschwindigkeit und dem Krümmungsradius seiner Bahn.“ Dieses Theorem entwickelt Herr H. Résal aus folgenden einfachen Gesichtspunkten: Wenn v, ϱ, α bezüglich die Geschwindigkeit eines Punktes, den Krümmungsradius der Bahn und den Winkel bedeuten, welchen die Beschleunigungsrichtung mit der Normale der Bahn zu einer bestimmten Zeit einschliesst, so ist $\varphi\cos\alpha = \frac{v^2}{\varrho}$, also $\varphi = \frac{v^3}{\varrho v\cos\alpha}\cdot$ Da $v\cos\alpha$ die Geschwindigkeitscomponente normal zur Beschleunigungsrichtung bedeutet, so ist $v\cos\alpha$ constant, also der Satz von Herrn Habich bewiesen. Zur Zeit 0 mag $v = v_0$, $\alpha = \alpha_0$ sein, die Relation von Habich stellt sich alsdann in der Form dar: $\varphi = \frac{v^3}{\varrho v_0\cos\alpha_0}\cdot$ Ist c die Sehne, welche die Beschleunigungsrichtung im Krümmungskreise abschneidet, so ist $\varphi = \frac{2v^2}{c}$, also $\frac{\varrho}{c} = \frac{v}{2v_0\cos\alpha_0}$, mithin ist das Verhältnis des Krümmungsradius zu der Sehne, welche die Beschleunigungsrichtung im Krümmungskreise abschneidet, der Geschwindigkeit des Punktes proportional. Diese Relationen werden zweckmässig angewendet, um aus dem Gesetz der Beschleunigung den Krümmungsradius der Bahn zu finden. So durcheilt ein materieller Punkt eine Parabel, wenn er horizontal geworfen der Schwere überlassen bleibt. Stellt man diese Bahn in der Form dar: $x = \frac{g}{2}t^2$; $y = v_0 t$, so ist, wenn $2p$ den Parameter der Bahn bedeutet, $p = \frac{v_0^2}{g}$ und $\alpha_0 = 0$. Aus dem Princip der lebendigen Kräfte folgt

$$v^2 = v_0^2 + 2gx = g(p+2x),$$

und man erkennt mit Bezug auf obige Relation, welche für φ

aufgestellt wurde, die Gleichung

$$\varrho = \sqrt{\frac{(p+2x)}{p}}\,(p+2x) = 2\sqrt{\frac{Fm}{Fm_0}} \cdot Fm,$$

wenn F den Brennpunkt und m die augenblickliche Lage de Punktes bedeuten.

Wirkt auf einen materiellen Punkt eine positive oder nega tive Centralbeschleunigung, so folgt aus dem Princip der Fläche

$$v_0 r_0 \cos\alpha_0 = vr\cos\alpha;$$

es wird demnach

$$\varphi = \pm \frac{rv^3}{\varrho r_0 v_0 \cos\alpha_0}.$$

Die Beschleunigung ist demnach ihrem absoluten Werthe nac proportional dem Cubus der Geschwindigkeit, dem Vector und de Krümmung der Bahn. Bewegt sich ein Punkt nach dem Geset $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, so bewegt er sich in der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = -r.$$

Setzt man $v_0 = b$, $\alpha_0 = 0$, $r_0 = a$, so giebt die Gleichung de lebendigen Kräfte $v^2 - b^2 = -r^2 + a^2$, und in Rücksicht auf obig Relation für φ entwickelt man für den Krümmungsradius ϱ di Formel

$$\varrho = \frac{(a^2+b^2-r^2)^3}{ab}$$

Wenn r und φ die Polarcoordinaten irgend einer Curve be deuten, so lässt sich dieselbe beschrieben denken durch eine materiellen Punkt, welcher einer Centralbeschleunigung unter worfen ist. Ist k irgend eine Constante, ω aber die Winkel geschwindigkeit des Vectors, so ist $v_0 r_0 \cos\alpha_0 = \omega r^2 = k$, und φ drückt sich aus in der Form $\varphi = \pm \frac{rv^3}{\varrho k}$. Nach denselbe Principien wird aus dieser Formel eine Relation entwickelt, welch den Krümmungsradius ϱ aus dem Gesetz der Curve darzustelle gestattet.

Schn.

L. GEISENHEIMER. Beziehung zwischen den Krümmungsradien reciproker, collinearer und inverser ebener Curven. Schlömilch Z. XXV. 300-316.

Die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems lässt sich in der Form veranschaulichen, dass auf einer festen Polbahn eine Polcurve sich bewegt, welche nach einem bestimmten Gesetz während der Bewegung ihre Grössenverhältnisse ändert. Eine beliebige feste Strecke der Polbahnebene behält eine während der Bewegung wechselnde Beziehung zu einer Strecke der Polcurvenebene, welche durch die Bewegungsphase in Lage und Grösse jeden Moment bedingt ist. Denkt man diese Ebene der Polcurve in irgend einer Phase erstarrt und nun die Ebene der Polbahn so bewegt und geändert, dass 1) die sich bewegende und verändernde Strecke der Polbahnebene gleiche Lagen und Grössenverhältnisse gegen die jetzt festgedachte Strecke in der Polcurvenebene annimmt wie vorhin und 2) die Dimensionen der Polbahnebene proportional der Strecke in dieser Ebene sich ändern, so erhalten jetzt die Punkte der Polbahnebene eine ähnlich-veränderliche Bewegung. Die Beziehungen dieser gegenseitigen Bewegungen bilden den Ausgangspunkt vorliegender Untersuchungen, welche in ihrem Verfolg zu einigen Relationen zwischen den Krümmungsradien von Curven führen, welche in den oben angegebenen geometrischen Verwandtschaftsverhältnissen stehen. Schn.

L. GEISENHEIMER. Beziehung zwischen den Krümmungsradien collinearer Curven. Schlömilch Z. XXV. 214-215.

Erweiterung einer Relation zwischen den Krümmungsradien entsprechender Punkte affiner Curven, welche der Verfasser in Schlömilch Z. XXIV. p. 357 (siehe F. d. M. XI. 1879. p. 612) gegeben, auf collinear verwandte Curven. Schn.

L. BURMESTER. Ueber das bifocal-veränderliche System. Clebsch Ann. XVI. 89-112.

Werden zwei ebene Systeme Σ_1 und Σ_2 in der Art in eine geometrische Verwandtschaft gesetzt, dass einem Punktepaar $\Phi_1 \Psi_1$ in Σ_1 ein Punktepaar $\Phi_2 \Psi_2$ in Σ_2 entspricht, ein jeder Punkt P_1 im ersten System aber mit P_2 im anderen durch die beiden Gleichungen verbunden wird $\Phi_1 P_1 = \Phi_2 P_2$ und $\Psi_1 P_1 = \Psi_2 P_2$, so sind beide Systeme bifocal, und $\Phi_1 \Psi_1$, bezüglich $\Phi_2 \Psi_2$ heissen ihre Focalpunkte. Zu dem ersten System Σ_1 lässt sich alsdann stets ein ihm ähnliches Σ_1' construiren der Art, dass dieses und Σ_2 als Grundriss und Aufrissprojection eines einschaligen Hyperboloids aufgefasst werden können, von dem zwei Axen bezüglich auf den Projectionsebenen senkrecht stehen. Diese Auffassung bildet die Grundlage für die vorliegenden Studien der oben definirten geometrischen Verwandtschaft.

Aendert sich ein ebenes System derartig, dass alle Phasen desselben geometrisch verwandte bifocale Systeme sind, so nennt der Verfasser das System bifocal-veränderlich. Die Natur der Veränderung ist durch die Bewegung der beiden Focalpunkte bedingt. Ist deren Geschwindigkeit in Grösse und Richtung gegeben, so ist die Geschwindigkeit jedes Systempunktes aus diesen Elementen zu ermitteln. Es wird die Construction derselben gegeben und die Untersuchung dann auf den geometrischen Ort der Systempunkte ausgedehnt, deren Bewegungsform gewissen Bedingungen unterworfen ist. So wird der Satz hergeleitet, dass alle Systempunkte, welche parallel gerichtete Geschwindigkeiten haben, in einer Hyperbel enthalten sind, dass der geometrische Ort der Punkte, welche eine gleich grosse Geschwindigkeit besitzen, eine gewisse Curve vierter Ordnung bildet u. s. w.

Auf die analoge Verwandtschaft räumlicher Gebilde hat bereits Jacobi die Aufmerksamkeit gelenkt; dieselbe ist später von Herrn Hermes (Borchardt J. LXXIII. p. 209, siehe F. d. M. III. 1871. p. 380) und von Herrn Darboux (Mém. de Bord. VIII p. 197, siehe F. d. M. IV. 1872. p. 420) eingehender behandelt worden. Herr Burmester nennt sie die trifocale, und lässt ein System sich so während der Bewegung ändern, dass jede Phase mit dem Anfangszustand diese geometrische Verwandtschaft beibehält. Sind Φ, Ψ, Ω drei beliebig bewegliche Punkte, so ist

ein Systempunkt P an die Bedingung geknüpft, dass seine Distancen von jenen Focalpunkten unveränderlich bleiben. Ist die Geschwindigkeit jener in einem Zeitmoment bekannt, so ist die Geschwindigkeit eines Systempunktes bestimmt; die Construction dieser Geschwindigkeit wird aus den bedingenden Elementen hergeleitet. Schn.

M. d'Ocagne. Applications de géométrie cinématique plane. Nouv. Ann. (2) XIX. 264-289.

Einige Sätze der kinematischen Geometrie, welche Mannheim in seinem „Cours de géométrie descriptive" mitgetheilt hat, werden hier angewendet, um einen Satz über confocale Parabeln zu beweisen, und die Krümmungsmittelpunkte einiger interessanter Curven zu construiren. W. St.

C. F. Geiser. Ueber einen fundamentalen Satz aus der kinematischen Geometrie des Raumes. Borchardt J. XC. 39-44.

Der Satz, um den es sich handelt, ist folgender: „Wenn ein starrer Körper mit vier Punkten auf vier festen Flächen gleitet, so gehen die Normalen der Flächentrajectorien, die irgend welche Punkte des Körpers bei der Bewegung beschreiben, durch dieselben zwei Geraden." Auf dieses Theorem gründet Herr Mannheim viele seiner interessanten kinematischen Untersuchungen und ist der Meinung, er habe es zum ersten Mal in Liouville J. XI. 1866 ausgesprochen. Nachdem Herr Geiser darauf hingewiesen, dass dasselbe bereits 1855 in den Berl. Monatsber. pag. 255 vom Professor Schönemann veröffentlicht worden, wendet er sich zu einer analytischen Ableitung des Theorems und zeigt aus den analytischen Formen, in denen sich die Gesammtheit der Normalen der Flächentrajectorien darstellt, dass diese Normalen eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden, und zwar eine solche, die man nach Herrn Kummer ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe nennt. Schn.

Schönemann. Ueber die Construction von Normalen und Normalebenen gewisser krummer Flächen und Linien. Borchardt J. XC. 44-49.

Die soeben besprochene Arbeit des Herrn Geiser hat der Redaction des Borchardt'schen Journals Veranlassung gegeben, die 1855 in den Berl. Monatsberichten publicirte Arbeit des verstorbenen Professor Schönemann in dem Journal noch einmal zum Abdruck zu bringen. Diese Arbeit enthält jenen fundamentalen Satz aus der kinematischen Geometrie und knüpft daran eine Reihe wichtiger Folgerungen. Von diesen mag hier im Besonderen auf zwei hingewiesen werden. Wenn ein Körper mit fünf Punkten auf fünf festen Flächen gleitet, so beschreibt jeder Punkt eine Linientrajectorie. Die Normalen jener fünf Punkte lassen sich fünfmal zu je vier combiniren, und je eine Combination giebt zu einem Linienpaar Veranlassung, den sogenannten Richtlinien, welches die vier Geraden einer Combination schneidet. Es entstehen mithin fünf Paare von Richtlinien. Zieht man von einem beliebigen Punkte des Körpers eine Gerade, welche ein Paar Richtlinien schneidet, so sind, je nach der Auswahl des Paares Richtlinien, fünf solcher Geraden möglich. Diese fünf Geraden liegen in einer Ebene, und das Bahnelement des gewählten Punktes steht auf dieser Ebene senkrecht. Ist ein Körper dagegen in seiner Bewegung nur der Bedingung unterworfen, dass drei seiner Punkte auf drei festen Flächen gleiten, so wird sich im Allgemeinen jeder Punkt desselben innerhalb eines bestimmten körperlichen Raums bewegen, doch giebt es Punkte des Körpers, welche in einer gegebenen Bewegungsphase nur Flächentrajectorien beschreiben können. Diese Punkte liegen auf dem Hyperboloid, welches durch die Normalen jener drei Punkte bestimmt ist. Die Normale der Flächentrajectorie eines solchen Punktes ist die Gerade des Hyperboloids, welche der Schaar jener drei Normalen angehört. Andere Sätze entspringen aus der Erörterung singulärer Fälle. Schn.

R. S. Ball. Notes on non-euclidean geometry.
Rep. Brit. Ass. 1880.

Das in dieser Arbeit betrachtete Problem bezieht sich auf die Kinematik eines starren Körpers. Die allgemeinste Verrückung eines starren Körpers ist eine Rotation um eine Axe, combinirt mit einer Rotation um die Polaraxe in Bezug auf die erste. Das Problem, das der Verfasser löst, ist die Bestimmung einer Verrückung, welche der verbundenen Wirkung zweier Verrückungen äquivalent ist, wenn man es nur mit kleinen Verrückungen zu thun hat. Csy. (O.)

G. Halphén. Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide. Bull. S. M. F. VIII. 18-21.

Wenn drei Punkte einer Geraden gezwungen sind, auf drei Ebenen α, β, γ sich zu bewegen, so beschreibt jeder Punkt a der Geraden ein Ellipsoid ε. Verlangt man, dass d in einer Ebene δ bleibe, so kann sich d nur in einer Ellipse bewegen. Ist δ im Besonderen Tangentialebene, so ist eine Verrückung der Geraden nicht möglich, und die vier Normalen auf α, β, γ, δ in den Punkten a, b, c, d sind vier Gerade desselben Hyperboloids. Wenn demnach durch vier Punkte a, b, c, d einer Geraden G vier Ebenen α, β, γ, δ gehen, deren Normalen in a, b, c, d auf ein und demselben Hyperboloid gelegen sind, so ist es nicht mehr möglich, die Gerade G so zu verschieben, dass a, b, c, d bezüglich in den Ebenen α, β, γ, δ verbleiben.

Ersetzt man die Ebenen durch beliebige Flächen, so ergiebt sich der Satz: „Wenn durch vier Punkte a, b, c, d einer Geraden G vier Flächen α, β, γ, δ gehen, deren Normalen in a, b, c, d Gerade eines und desselben Hyperboloids sind, so ist es im Allgemeinen unmöglich (oder wenigstens zweifelhaft), die Gerade aus dieser Lage so zu leiten, dass die Punkte a, b, c, d der Geraden bezüglich auf den Flächen α, β, γ, δ verbleiben."

Sind fünf Punkte a, b, c, d, e eines starren Körpers gezwungen, auf fünf festen Flächen α, β, γ, δ, ε zu gleiten, so beschreibt

jeder Punkt des Körpers eine Linientrajectorie. Haben aber jene Punkte auf ihren Flächen eine solche Lage, dass die Normalen in ihnen durch dieselben zwei Geraden geschnitten werden, so ist eine Verrückung des Körpers unmöglich oder zweifelhaft. Schn.

Ad. Schumann. Ueber die Flächenräume und Bogenlängen, welche bei der Bewegung eines starren Systems von einer Geraden umschrieben werden. Schlömilch Z. XXV. 87-95.

Herr Darboux hat in dem Darboux Bull. (2) II. (siehe F. d. M. X. 1878. 562 ff.) eine Reihe bemerkenswerther Relationen veröffentlicht, welche sich auf Bogenlängen beziehen, die eine Gerade bei der Bewegung eines starren Gebildes umschreibt. Einen Theil dieser Gesetze hat der Verfasser vorliegender Abhandlung bereits im Jahre 1867 (Pr. Berlin) veröffentlicht, und aus Anlass der Darboux'schen Arbeit legt er dieselben in generellerer Form vor und weist auf einige Beziehungen hin, welche Herrn Darboux entgangen sind, und welche sich auf den von ihm eingeschlagenen Wege leicht ergeben. Als eins der bemerkenswerthesten Ergebnisse möge der Satz angeführt werden:

„Rollt eine beliebig gestaltete geschlossene Curve auf einer willkürlichen Bahn sich einmal vollständig ab, so umschreibt die Gerade, der das kleinste Trägheitsmoment in Bezug auf den in Steiner'schem Sinne belasteten Curvenbogen zukommt, die Minimalfläche V_1. Sie unterscheidet sich von der Fläche der rollenden Curve um die Hälfte jenes Trägheitsmomentes. Diese ausgezeichnete Gerade läuft durch den Krümmungsschwerpunkt; durch ihn führt senkrecht zu ihr eine zweite Gerade, und diese umzieht von allen Geraden, welche sich in ihm schneiden, die Maximalfläche V_2. Beide Gerade, Hauptträgheitsaxen der rollenden Curve, bilden die Axen einer Schaar confocaler Kegelschnitte, deren Excentricität durch $\sqrt{\frac{2(V_2-V_1)}{O}}$ gemessen wird, wenn O die Gesammtdrehung der rollenden Curve bedeutet. Die Tan-

;enten jedes einzelnen Gliedes dieser Schaar umschreiben bei ler Bewegung gleiche Flächen V_1, und zwar unterscheidet sich :ine solche Fläche von der Minimalfläche um einen Kreissector, lessen Winkel gleich der Gesammtdrehung und dessen Radius nit der grossen Axe übereinstimmt. Ist im Besonderen die Bahn, ıuf der sich die Abrollung vollzieht, geradlinig, so ist die Ge- ıammtdrehung gleich 2π, und der Unterschied der Fläche V von ler Minimalfläche ist gleich dem Kreise, der den entsprechenden Kegelschnitt in den Scheiteln der grossen Axe berührt."

Schn.

G. Gautero. Sul movimento di una superficie che ne tocca costantemente un' altra fissa. Acc. R. d. L. (3) IV. 106-109.

Der Verfasser entwickelt auf analytischem Wege die Bedingungen, denen zwei Flächen, von denen die eine beweglich, die andere fest ist, genügen müssen, damit sie sich stets berühren. Die allgemeinen Resultate werden dann auf Regelflächen angewandt. Dabei kommt der Verfasser zu einer speciellen Formel, welche sich von der durch Résal in seiner „Cinématique pure" p. 146 gegebenen um ein additives Glied unterscheidet.

O.

W. Hess. Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariablen Ebene. Diss. München.

Eine Fläche zweiten Grades mit gegebenem festen Mittelpunkt O drehe sich so um diesen, dass die Fläche auf einer unveränderlichen Tangentialebene, ohne zu gleiten, rollt, dass sie also stets diese invariable Ebene mit einem ihrer Punkte berührt und um die Verbindungslinie dieses Punktes mit O sich dreht. Dadurch ist auf der Fläche und auf der Ebene je eine Curve bestimmt, welche in der Beziehung zu einander stehen, dass durch Aufeinanderlegen zweier entsprechender Punkte dieser Curven die Lage der Fläche gegen die invariabele Ebene bestimmt ist. Diese

Drehung lässt sich durch das Abwälzen der Flächencurve auf der Curve der Ebene oder auch der durch sie repräsentirten in O concentrischen Kegel versinnlichen. Im Augenblick der Drehung ist die gemeinsame Generatrix der zwei Kegel die Drehaxe, der gemeinsame Punkt der Drehpol. Die dabei von dem Drehpol auf der Fläche beschriebene Curve ist die „Polhodie“, die in der Ebene beschriebene die „Herpolhodie.“ Der Verfasser giebt nun in der vorliegenden Arbeit eine detaillirte Untersuchung der Curven. Er behandelt demgemäss nach Aufstellung des Problems im ersten Abschnitt den beweglichen Kegel der momentanen Drehaxe uud die Polhodie. Im zweiten Abschnitt wird die Herpolhodie speciell untersucht. Dann folgen die Differential- und Integralgleichungen der Polcurven. Hier findet sich namentlich eine Erweiterung der früheren Untersuchungen auf das ein- und zweischalige Hyperboloid und die Rotationsflächen, denen sich eine Classification der Formen der Herpolhodie anschliesst.

O.

A. Mannheim. Construction de la normale à la surface de Glaisher. Quart. J. XVII. 147-149.

Die Fläche, welche Herr Glaisher in der Abhandlung „On a space-locus connected with the ellipsoid“ (Quart. J. XVI. 283, s. F. d. M. XI. 1879. 580) untersucht hat, lässt sich nach den Darlegungen des Herrn Mannheim in folgender Form erzeugt denken: Wenn eine Sehne von constanter Länge sich mit ihren Endpunkten in einem Ellipsoide so bewegt, dass die in den Endpunkten der Sehne errichteten Normalen sich gegenseitig schneiden, so beschreibt der Mittelpunkt m der Sehne die Fläche von Glaisher. Verbindet man ihn mit dem Schnittpunkt der Normalen, so erhält man in dieser Verbindungslinie die Normale im Punkte m der genannten Fläche.

Schn.

A. Mannheim. La surface de l'onde considérée comme surface limite. C. R. XC. 971-974.

Wenn die Bewegung eines starren Körpers nur drei Bedingungen unterworfen ist, so lässt irgend ein Punkt desselben im Allgemeinen noch nach jeder Richtung eine Verschiebung zu. Es giebt aber eine gewisse Fläche in ihm der Art, dass ihre Punkte nur Flächentrajectorien beschreiben können. Diese Fläche heisst Grenzfläche. Wie es Grenzflächen für Punkte giebt, so existiren auch Grenzflächen für Gerade und für Ebenen des starren Körpers.

Die Kante eines rechtwinkligen Zweiflachs, dessen Ebenen sich als Tangentialebenen eines Ellipsoids bewegen, kann von einer Lage aus in jede andere Nachbarlage sich bewegen. Wenn aber die Normalen des Ellipsoids A und B, welche von den Berührungspunkten a und b des Zweiflachs ausgehen, sich schneiden, so nimmt die Kante eine Grenzlage ein, d. h. sie kann aus dieser nicht in jede Nachbarlage durch Verschiebung übergeführt werden. Die Kante G berührt in diesem Fall eine Grenzfläche, und diese Grenzfläche ist eine Wellenfläche; der Berührungspunkt ist derjenige Punkt c, in welchem G von der Ebene (A, B) durchschnitten wird. Die Wellenfläche kann demnach auf folgende Art erzeugt werden: „Wenn ein rechter Winkel acb mit seinen Schenkeln auf einem Ellipsoid dergestalt gleitet, dass seine Ebene stets normal an der Fläche in den beiden Berührungspunkten bleibt, so beschreibt seine Spitze eine Wellenfläche $[c]$." Der Brennpunkt für eine Verrückung der Ebene ist der Punkt f, in welchem sich die Normalen A und B des Ellipsoides schneiden, und die Gerade cf ist eine Normale der Wellenfläche.

Die Kegel, welche einem Ellipsoide umgeschrieben sind, und von denen ein Hauptschnitt ein rechter Winkel ist, haben ihre Spitzen auf einer Wellenfläche; die Spitzen derjenigen Kegel, welche Rotationskegel im Besonderen sind, liegen in den conischen Punkten dieser Wellenfläche.

Eine Anzahl anderer Relationen zwischen Wellenfläche und Ellipsoid werden noch angeführt, doch erscheinen die oben angegebenen als die bemerkenswerthesten.

Schn.

A. Mannheim. Nouvelle génération de la surface de l'onde et constructions diverses. C. R. XC. 1333-1336.

Die oben angegebene Erzeugungsart wird in folgende Form verallgemeinert: Die Kante eines rechtwinkligen Zwei flachs, dessen Seiten auf zwei confocalen Ellipsoiden als Tan gentialebenen gleiten, bilden einen Complex zweiter Ordnung Wenn die Normalen A und B an den Ellipsoiden in den Be rührungspunkten a und b des Zweiflachs sich schneiden, so nimm die Kante eine Grenzlage ein. Die Grenzlagen der Kanten sin Tangenten einer Wellenfläche. Der Berührungspunkt c der Weller fläche [c] ist der Punkt, in welchem die Ebene (A, B) die Kant schneidet. Bewegt sich also ein rechter Winkel derartig, das seine Schenkel als Tangenten auf zwei confocalen Ellipsoide gleiten, und ist seine Ebene stets eine Normalebene der Fläche in den Berührungspunkten a und b, so beschreibt seine Spitz eine Wellenfläche. Der Brennpunkt für eine Verrückung des s beweglichen rechten Winkels ist der Punkt f, in welchem di Normalen A und B sich treffen, und die Verbindungslinie de Spitze c mit f ist eine Normale der Wellenfläche [c].

Die Kanten G des unter obigen Bedingungen geleitete Zweiflachs bilden eine Congruenz, deren Brennfläche sich au zwei Schalen zusammensetzt, die eine ist [c], die andere ein bestimmte Fläche [e]. Eine Kante G berührt [e] in e, der Be rührungspunkt e wird construirt und eine Construction für di Normale ε in diesem Punkte an [e] angegeben.

Schn.

L. Burmester. Ueber die momentane Bewegung ebene kinematischer Ketten. Civiling. XXVI. 248-285.

Für die Untersuchung der Bewegung von Mechanisme deren Glieder sich in parallelen Ebenen bewegen, bildet die Be stimmung der momentanen Drehaxen das wichtigste Elemen Solche Mechanismen können als ebene kinematische Ketten be handelt werden, deren Glieder als starre ebene Systeme betrach

tet sich curvenläufig in einer festen Ebene bewegen. Die Spur einer momentanen Drehaxe in dieser Ebene ist dann als der selbstentsprechende Punkt zweier unendlich naher Lagen je eines Systems gegen jedes andere aufzufassen, und diese Punkte werden die Pole der kinematischen Kette genannt.

Da je zwei ebene Systeme einen Pol haben, so haben n ebene Systeme, welche sich in einer festen Ebene bewegen, $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Pole, und da je drei Systeme drei Pole liefern, welche auf einer Geraden liegen, so ist die Anzahl der drei Pole enthaltenden Geraden durch $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ angegeben. Ist von jenen Polen eine bestimmte Anzahl bekannt, so sind die übrigen durch sie bedingt; die Anzahl derjenigen Pole, welche für die Bestimmung der übrigen nöthig ist, richtet sich nach ihrer Constellation. Dies ist im Wesentlichen der Gegenstand, mit dem sich die vorliegende Abhandlung beschäftigt; die theoretischen Ergebnisse werden demnächst angewendet auf derartige kinematische Ketten, welche in der Technik mannigfache Benutzung finden.

Schn.

P. Wiecke. Beitrag zur Theorie des Watt'schen Parallelogrammes. Z. dtsch. Ing. XXIII. 324-331.

O.

A. de Saint-Germain. Sur le parallélogramme de Watt. Liouville J. (3) VI. 19-26.

Tchébycheff hat Regeln angegeben, durch welche es möglich wurde, die Abweichung des Watt'schen Parallelogramms von der geraden Linie auf zwei Drittel zu reduciren. Von Prony ist dann diese Abweichung in einem speciellen Falle berechnet worden. Aber diese Berechnung ist, wie der Verfasser bemerkt, in mehrere Werke in einer solchen Form aufgenommen worden, dass die Resultate ungenau wurden. Diese auf Grundlage der

Tchébycheff'schen Disposition richtig zu stellen, ist der Zweck der Arbeit, die überall auf die Praxis recurrirt. O.

F. Masi. Dei giunti derivati del quadrilatero sferico. Mem. di Bologna (4) I. 349-358.

Behandelt (im Reulaux'schen Sinne) eine Reihe von kinematischen Apparaten, die sich aus dem sphärischen Vierseit ableiten lassen. Der Inhalt bietet der Hauptsache nach nur vom maschinen-mechanischen Gesichtspunkte aus Interesse. O.

G. Gautero. Di una classe di meccanismi a tre membri. Mem. di Bologna (4) I. 203-208.

In demselben Sinne wie die obige Arbeit von Masi behandelt die von Gautero eine Classe von Mechanismen, die aus drei Gliedern bestehen. Der Zweck der Arbeit ist, die sämmtlichen Mechanismen dieser Art als specielle Fälle eines allgemeinen Mechanismus darzustellen. O.

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

E. W. Hyde. Mechanics by quaternions. Analyst VII 137-144, 177-184.

Mit Hülfe von Quaternionen werden die elementaren Sätze der Statik über das Gleichgewicht von Kräften abgeleitet und die Methode auch zur Lösung einiger elementarer Probleme der Statik benutzt. Glr. (O.)

M. d'Ocagne. Sur la composition des forces dans le plan. Nouv. Ann. (2) XIX. 115-120.

Der Verfasser geht von dem folgenden bekannten Satz aus: „Betrachtet man in einer Ebene zwei Kräfte, welche in beliebigen Punkten angreifen, und lässt man diese Kräfte sich in demselben Sinn und um gleiche Winkel um ihre Angriffspunkte drehen, so beschreibt der Schnittpunkt ihrer Richtungen einen Kreis, die Richtung der Resultante geht durch einen festen Punkt dieses Kreises, und diese Richtung dreht sich um denselben Winkel, wie die Componenten." Den festen Punkt nun, durch den die Resultante geht, nennt der Verfasser Zusammensetzungsmittelpunkt (centre de composition) und benutzt ihn zu einer Methode der Zusammensetzung von Kräften, die sich auch auf parallele Kräfte übertragen lässt. O.

G. Chrystal. On Minding's system of forces. Trans. of Edinb. XXIX. 519-530; Proc. of Edinb. X. 397-400.

Minding hat einen bemerkenswerthen Satz über ein System einer beliebigen Anzahl von Kräften bewiesen, die in folgender Weise bestimmt sind: Die Angriffspunkte und die Grössen der Kräfte sind gegeben, während ihre Richtungen so beschaffen sind, dass sich ein Strahlenbündel durch einen festen Punkt und parallel den Kräften wie ein fester Körper bewegt. Die Systeme von Kräften sind dann ein dreifach unendliches System, während die Kräftesysteme, welche eine einzelne Resultante haben, ein zweifach unendliches System bilden. Der Satz sagt nun aus, dass diese Resultanten alle zwei feste Kegelschnitte schneiden, indem sie also ein zweifach unendliches System oder eine Congruenz der vierten Ordnung bilden. Es wird bemerkt, dass seit Minding's ursprünglichen Untersuchungen mehrere andere gegeben worden sind, die letzte von Tait mit Hülfe von Quaternionen (siehe F. d. M. XI. 1879. p. 629). Der Verfasser hat die ganze Untersuchung mit Hülfe der gewöhnlichen Methode von Neuem

aufgenommen, und giebt zwei Methoden, durch welche er auch zu weiteren Schlüssen kommt. Als die Arbeit selbst schon geschrieben war, hat der Verfasser einen Beweis gefunden, der mit dem in Somoff's Mechanik Aehnlichkeit hat.

Cly. (O.)

P. G. Tait. On Minding's theorem. Proc. of Edinb. X. 675-685.

Enthält einen kurzen Bericht über Untersuchungen, die der Verfasser bei verschiedenen Gelegenheiten der Royal Society mitgetheilt hat. Die Arbeit von Chrystal gab Veranlassung zur Wiederaufnahme der Untersuchung, welche mit Hülfe von Quaternionen geführt wird.

Cly. (O.)

F. J. van den Berg. Oplossing eener prijsvraag. Nieuw Arch. VI. 67-97.

Die Aufgabe, deren Auflösung hier gegeben wird, lautet folgendermassen:

Es seien drei Ebenen gegeben, welche sich schneidend einen körperlichen Winkel bilden. In welcher Stellung wird nun ein gegebenes schweres massives Dreieck mit jedem seiner Winkelpunkte auf einer dieser geneigten Ebenen ruhen können, so dass das Gewicht des Dreiecks durch den Widerstand der Flächen im Gleichgewicht gehalten wird? Man wünscht diese Frage für die beiden Fälle, dass die Reibung der Winkelpunkte auf den Flächen berücksichtigt und nicht berücksichtigt wird, aufgelöst zu sehen. Die Aufgabe wird sowohl auf geometrischem als analytischem Wege behandelt und daraus verschiedene Folgerungen gezogen.

G.

F. J. VAN DEN BERG. Over de vergelijking des door drie gegeven richtlijnen bepaalde hyperboloïde, in verband met het eventricht van vier krachten in de ruimte. Nieuw Arch. VI. 183-195.

Einige Betrachtungen über das Hyperboloid, welches durch drei Richtlinien bestimmt ist, im Zusammenhang mit der Gleichgewichtsbedingung von vier Kräften im Raume. Die Aufgabe ist auch durch Möbius, Schell und Todhunter behandelt, wird aber hier von einer andern Seite betrachtet. G.

R. HOPPE. Elementarer Beweis für die Existenz eines Mittelpunktes gleichgerichteter Kräfte. Grunert Arch. LXIV. 373-378.

Der erste Paragraph der vorliegenden Arbeit enthält als Einleitung das Hauptsächlichste von den statischen Momenten; namentlich wird der Begriff der Gleichgewichtsebene erläutert und ihre Construction gegeben. Im § 2 folgt dann der Nachweis der Existenz des Kräftemittelpunkts dadurch, dass gezeigt wird, dass, wenn man drei sich rechtwinklig schneidende Gleichgewichtsebenen hat, jede durch ihren Schnittpunkt gehende Ebene ebenfalls Gleichgewichtsebene ist. O.

C. J. MONRO, M. JENKINS. Solutions of a question (6191). Educ. Times XXXIII. 36.

Der gemeinsame Schwerpunkt zweier Bogen AB, $A'B'$ eines Kreises liegt auf dem Durchmesser, der auf der Verbindungslinie der Halbirungspunkte der Sehnen AA', BB' senkrecht steht.

O.

G. DOSTOR. Détermination algébrique très simple du centre de gravité du trapèze et du centre de gravité du tronc de pyramide à base quelconque. Grunert Arch. LXV. 204-207.

Herleitung der bekannten Formeln in elementarer Weise aus den beiden Dreiecken, deren Differenz das Trapez ist. Der Pyramidenstumpf wird in ähnlicher Weise behandelt.

O.

R. Hoppe. Schwerpunkt eines Vielecks. Grunert Arch. LXV. 439.

P. Jolmen. Schwerpunkt des Vierecks. Grunert Arch. LXV. 221.

E. Nöggerath. Ueber den Schwerpunkt des Vierecks. Grunert Arch. LXV. 218-221.

Stoll. Ueber den Schwerpunkt des Vierecks. Grunert Arch. LXV. 445-446.

Herr Hoppe giebt folgende Construction für den Schwerpunkt des Vierecks: „Es seien A und B die Schwerpunkte der Dreiecke, in welche eine Diagonale das Viereck theilt. AB schneide die Diagonale in C. Man trage CA auf AB nach BE ab. Dann ist E der Schwerpunkt.“ Darauf gründet Herr Hoppe eine einfache Construction für den Schwerpunkt eines n-ecks. Herr Jolmen construirt ein Dreieck, welches denselben Schwerpunkt hat wie das Viereck. Herr Nöggerath knüpft an den bekannten Satz an, dass, wenn a, b, c die Abstände der Ecken eines Dreiecks von einer Ebene sind, der Abstand des Schwerpunkts von derselben gleich $\frac{a+b+c}{3}$ sei, und überträgt dies auf das Viereck. In der letzten Arbeit des Herrn Stoll endlich wird aus dem Resultat des Herrn Nöggerath gefolgert, dass in jedem Viereck der Durchschnittspunkt der Diagonalen, der Durchschnittspunkt der Geraden, welche die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten verbinden, und der Schwerpunkt in einer geraden Linie liegen, und zwar so, dass die Entfernung des ersten und dritten Punktes durch den zweiten im Verhältnis von 3 zu 1 getheilt wird.

O.

C. Guidi. Sulla determinazione grafica delle forze interne nelle travi omogenee e reticolari, appoggiate agli estremi, e soggette ad un sopracarico mobile. Acc. R. d. L. (3) IV. 31-33.

Das hier Vorliegende ist ein Bericht der Herren Cremona und Battaglini über die Arbeit. Das Problem, welches in derselben mit Hülfe des Seilpolygons behandelt wird, ist aus dem Titel ersichtlich. Da die Arbeit noch in extenso erscheinen wird, bleibt ein ausführliches Referat besser bis dahin verschoben.

O.

G. Schubring. Gleichgewicht einer Kette in einem besonderen Falle. Pr. Erfurt.

In der Einleitung stellt der Verfasser eine Tabelle mit den hauptsächlichsten Formeln für die hyperbolischen Functionen zusammen, wobei er sich aber nicht der gewöhnlichen Bezeichnung bedient, sondern sie als Sinus und Cosinus mit imaginären Argumenten darstellt. Die eigentliche Aufgabe des Verfassers heisst: „Eine vollkommen biegsame, nicht ausdehnbare materielle Linie ist in einem ihrer Endpunkte an einem gegebenen Orte, mit dem andern an einer materiellen Kugel befestigt, die sich ohne Reibung auf einer geneigten Ebene befindet. Wie ist die Gestalt der Kette im Gleichgewicht?“ Die Arbeit enthält eine sehr eingehende Darstellung der Lösung; namentlich wird auch die Constantenbestimmung vollständig durchgeführt, und an einem numerischen Beispiel erläutert.

O.

F. Wagner. Grundträk af Ligevägtsläaren og deres Anvendelse paa Byggearbejder. Kjöbenhavn. Gyldendalske Boghandel.

Gm.

Gustav Schnack. Foreläsninger over grafisk Statik for Officeerskolens äldste Klasse. Kjöbenhavn. Andr. Schou.

Gm.

TH. EDDY. Neue Constructionen aus der graphischen Statik. Leipzig. Teubner. O.

G. BELLAVITIS. Sulla statica. Acc. R. d. L. (3) IV. 20-21.

Nach dem vorliegenden kurzen Auszug setzt der Verfasser die Umständlichkeit in den Constructionen der graphischen Statik zur Bestimmung der Resultante eines Kräftesystems im Raume auseinander. Er glaubt, dass der analytische Weg zu diesem Zwecke vorzuziehen sei und giebt eine Methode, bei der er sich Plücker'scher Coordinaten und des Princips der Aequipollenzen bedient. Anwendungen erläutern die Methode. O.

A. FAVARO. Sopra alcuni esercizii di statica grafica proposti dal Prof. H. G. Zeuthen. Atti d. Ist. Ven. (5) V. 719-748.

Reproduction der Arbeit des Herrn Zeuthen aus Zeuthen Tidsskr. (4) I. 27-53, über die in Bd. IX. 1877. des Jahrbuchs p. 618-619 berichtet worden ist. O.

Lösungen von Aufgaben aus der Statik fester Körper von J. J. WALKER, R. LEIDHOLD, T. R. TERRY, WOLSTENHOLME, E. W. SYMONS, E. RUTTER, TOWNSEND, J. C. SHARP, W. J. C. MILLER, MONCOURT, J. HAMMOND finden sich Educ. Times XXXIII. 33-34, 36-37, 37, 44, 55-56, 59-60, 90-91. O.

G. JUNG. Soluzione geomeccanica di alcuni problemi d'interpolazione. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII. 226-237.

Die experimentellen Wissenschaften führen, wie der Verfasser im Eingange ausführt und an Beispielen zeigt, häufig auf Fragen, deren Lösung von folgendem Problem abhängt: „Gegeben

sind durch directe Beobachtungen n Daten x_i, y_i einer Erscheinung, deren Gesetz sich der Voraussetzung gemäss durch eine lineare Function darstellen lässt: die Constanten α, β so zu bestimmen, dass das Gesetz so gut als möglich durch die Function $y = \alpha + \beta x$ dargestellt wird." Dieses Problem wird zunächst in folgende Form umgesetzt: „In einer Ebene sind n Punkte gegeben, welche nicht in einer Geraden liegen. Man soll in der Ebene eine Gerade ziehen, welche sich ihnen so viel als möglich nähert, d. h. die Summe der Quadrate ihrer Entfernungen von der Geraden (und diese Entfernungen sollen parallel einer gegebenen Geraden gemessen werden), soll ein Minimum sein." Dies Problem löst der Verfasser, indem er die Punkte als materielle Punkte betrachtet. Daran schliessen sich dann Specialisirungen und Modificationen des ursprünglichen Problems.

O.

B. Hydrostatik.

L. Matthiessen. Ueber die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren der Satelliten der Erde und des Jupiter. Schlömilch Z. XXV. 72-86.

Der Verfasser setzt jeden Satelliten als ein homogenes dreiaxiges Ellipsoid voraus, dessen Rotationsaxe auf der Bahnebene, welche durch das Centrum des Hauptplaneten geht, senkrecht steht. Diese Axe ($2a$) ist die kürzeste, die gegen den Planeten gerichtete Centralaxe ($2c$) die längste. Er bestimmt dann das Axenverhältnis unter der Voraussetzung, dass auf den Satelliten 1) die Anziehung des sehr entfernten Centralkörpers, 2) die gegenseitige Anziehung seiner einzelnen Theile, 3) die Centrifugalkraft in Folge der Rotation, deren Dauer gleich der Revolutionsdauer ist, wirkt. Die beiden transcendenten Gleichungen, von denen die Axenverhältnisse abhängen, werden auf bekannte Art abgeleitet und die Wurzeln derselben zunächst unter der

Voraussetzung entwickelt, dass die drei Axen sehr wenig von einander verschieden sind. Hier ergiebt sich:

$$a:b:c = 1:\left(1+\frac{15}{8}V\right):\left(1+\frac{15}{2}V\right),$$

wo $V = \frac{\omega^2}{2\pi f \varrho_1}$ ist und ω die Winkelgeschwindigkeit, ϱ_1 die Dichtigkeit des Satelliten, f den Attractionsfactor bezeichnen. Für den Erdenmond, wie für die Jupitertrabanten werden hiernach die numerischen Werthe der Axenverhältnisse berechnet.

Neben der so ermittelten Gleichgewichtsfigur existirt für dasselbe V stets noch eine zweite, die eines langgestreckten Ellipsoids. Auch für diese wird das Axenverhältnis berechnet. Hier würde jedoch die Centralaxe eine solche Länge erhalten, dass die ellipsoidische Gleichgewichtsfigur wahrscheinlich nicht mehr gewahrt würde.

Welche von den beiden Gleichgewichtsfiguren, die bei gegebener Rotationsgeschwindigkeit möglich sind, wirklich eintritt, hängt von der ursprünglichen Energie der rotirenden Masse oder der Summe der Momente ihrer Bewegungsquantitäten ab. Diese ist gleich der doppelten Energie, und ihr Princip ist gleichbedeutend mit demjenigen von der Erhaltung der Flächensumme der frei rotirenden Masse.

Es folgt die Bestimmung des Maximums von V, für welches überhaupt noch ellipsoidische Gleichgewichtsfiguren eintreten, durch eine Näherungsrechnung. Endlich werden die Gleichgewichtsbedingungen für ringförmige Satelliten untersucht, d. h. für solche, die die Form concentrischer Ringe mit elliptischem Querschnitt besitzen. Wn.

K. Stier. Ueber die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren und die Umdrehungsgeschwindigkeit einer flüssigen Masse bei gegebener Energie. Schlömilch Z. XXV. 405-410.

Mit Matthiessen (cfr. F. d. M. III. 1871. p. 450) definirt der Verfasser die Energie einer um eine feste Axe mit constanter

Winkelgeschwindigkeit rotirenden Flüssigkeit als die halbe Summe der in Bezug auf die Rotationsaxe genommenen Momente der den einzelnen Massenelementen entsprechenden Bewegungsgrössen, oder, was dasselbe, als das Product aus der halben Winkelgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment. Da die Energie constant bleibt, wenn die in eine frei rotirende Bewegung versetzte flüssige Kugel in das Gleichgewichtsellipsoid übergeht, so lässt sich leicht ausrechnen, wie gross die ursprüngliche Rotationsdauer der kugelförmig gedachten Erde gewesen ist, damit sie grade die jetzige Gestalt und Rotationsdauer annehmen musste, resp. welches die ursprüngliche Rotationsdauer hätte sein müssen für die Laplace'sche und Jacobi'sche Gleichgewichtsfigur.

Wn.

K. Zöppritz. Ueber Schwankungen des Meeresspiegels infolge von geologischen Veränderungen. Pogg. Ann. (2) XI. 1016-1034.

Jede Aenderung in der Vertheilung der Massen auf der Erdoberfläche ruft eine Veränderung des Potentials und somit eine Niveauschwankung hervor, die vorzugsweise auf dem betroffenen Theile merkbar ist. Diese Niveauschwankung wird hier für ein Flussdelta und für ein grosses Meeresbecken (etwa das Nordpolarbecken) untersucht für den Fall, dass in denselben durch Sedimentablagerungen Aenderungen der Massenvertheilung vor sich gehen. Für ein Flussdelta wird die Gestalt des abgelagerten Sediments als die eines auf einer geeigneten Ebene ruhenden homogenen Kugelabschnitts angenommen, für ein Meeresbecken dagegen als eine Masse, die mit gleichförmiger Dichte und Höhe über einer Kugelkappe ausgebreitet ist. Das Potential dieser Massen (das der Niveauschwankung proportional ist) wird jedesmal berechnet für einen Punkt des Randes der betreffenden Masse, im zweiten Falle auch für einen äusseren Kugelflächenpunkt, und daraus wird schliesslich das Potential eines zonenförmigen Sediments abgeleitet. Wn.

A. Angot. Tables nouvelles pour calculer les hauteurs au moyen des observations barométriques. C. R. XC. 851-854.

Hinweis auf die in den Annales du Bureau central météorologique 1879 enthaltenen Tafeln des Verfassers. Als Vorzüge derselben gegen frühere führt er unter anderen an, dass sie die Höhen der Station über der Fläche von 760 mm Druck angeben; eine Eigenschaft, welche jedoch auch andere Tafeln besitzen. In der vorliegenden Notiz ist angegeben, welche Modificationen an der Legendre'schen Formel angebracht wurden, behufs Aufstellung der Tafeln der Correcturen. Bn.

E. Rouché. Sur la machine pneumatique. Nouv. Ann. (2) XIX. 42-44.

Es wird eine sehr einfache Ableitung der Formel für die Spannung im Recipienten der Luftpumpe gegeben. Indem man

$$H_k - \frac{u}{v} H = \varepsilon_k$$

setzt, ergiebt sich direct

$$\varepsilon_k = \frac{V}{V+v} \varepsilon_{k-1}$$

und daraus

$$H_n - \frac{u}{v} H = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \left(H_0 - \frac{u}{v} H\right).$$

Es ist hier V der Inhalt des Recipienten, v der des Stiefels, u der schädliche Raum. Bn.

H. von Jettmar. Ueber das Metacentrum. Zeitschr. f. d. Realsch. V. 595-603.

Wenn gemeiniglich gesagt wird, das Metacentrum eines schwimmenden Körpers liege da, wo bei einer Drehung des Körpers die ursprüngliche Schwimmaxe von der neuen Auftriebsrichtung geschnitten wird, so bleibt volle Unsicherheit darüber bestehen, wie gross man sich denn jene Drehung zu denken

habe. Der Verfasser untersucht mechanisch die Lage des Metacentrums genauer und gelangt zu der folgenden befriedigenderen Erklärung: „Der Durchschnitt der Richtung des Auftriebs und der Schwimmaxe ist kein bestimmter Punkt, sondern rückt während der Drehung des Körpers auf der Schwimmaxe auf und nieder. Er nähert sich aber einem gewissen festen Punkt in der Schwimmaxe, wenn der Winkel gegen die Gleichgewichtslage unendlich gegen Null abnimmt. Dieser feste Punkt in der Schwimmaxe heisst Metacentrum.“ Gr.

Capitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

G. Helm. Beiträge zur geometrischen Behandlung der Mechanik. Schlömilch Z. XXV. 217-233.

In demselben Verhältnis, wie das Kräftepolygon zum Seilpolygon, steht der von Hamilton eingeführte Hodograph zur beschriebenen Bahn. Der Verfasser benutzt denselben um die Lösung einer Anzahl mechanischer Probleme in geometrische Form zu bringen. In Nr. 1 wird zunächst der Begriff des Hodographen bei Bewegung in einem Polygon erläutert und der Unterschied zwischen Parallel- und Normallage desselben festgestellt. In Nr. 2 wird dann der Flächensatz betrachtet. Es ergiebt sich: „Sind die Beschleunigungsstrahlen nach einem Punkte gerichtet, so ist der Hodograph in der Normallage polar verwandt der Bahn in einem ebenen Polarsystem.“ Als Beispiel wird die Bewegung eines Punktes durch die Seiten eines regulären Polygons mit gleichbleibender Geschwindigkeit benutzt. Im § 3 erfolgt der Uebergang vom Bahnpolygon zur Bahncurve. Zum Beispiel wird die Wurfbewegung verwendet. Nr. 4 enthält eine Besprechung des Princips der Projection. Namentlich wird seine Verwendung

zur Bestimmung und graphischen Darstellung der Zeit betont. Hier dienen das Cycloidenpendel und die Bewegung in einer Ellipse mit der Richtung der Beschleunigungen nach dem Mittelpunkt zur Erläuterung. In Nr. 5 werden einige Massbeziehungen an Bahn und Hodograph abgeleitet und die Bewegung nach dem Newton'schen Gesetz zur Verdeutlichung benutzt. Nachdem dann in Nr. 6 noch die Verwendung bei der Bewegung eines Punktes auf gegebener Fläche angedeutet ist, enthält der Schlussparagraph eine Parallele zwischen der geometrischen und analytischen Behandlung mechanischer Probleme im Allgemeinen.

O.

A. Mayer. Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwerthung durch die Methoden von Lie. Clebsch Ann. XVII. 332-354.

Allen dynamischen Probleme, bei denen es sich um die Bewegung eines Systems materieller Punkte handelt, das nur inneren Kräften unterworfen ist und sich wie ein freier starrer Körper zu bewegen vermag, sind die neun Integrale gemeinsam, welche die Principe der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts und der Erhaltung der Flächen liefern. Der Verfasser weist zunächst nach, dass es keine anderen Integrale dieser Art giebt, und zeigt sodann, wie weit man durch Anwendung der Lie'schen Integrationsmethoden ein jedes Problem aus der Dynamik eines Systems materieller Punkte führen kann, in welchem jene Integrale und der Satz der lebendigen Kraft gelten; wodurch es möglich wird, sobald der Freiheitsgrad des materiellen Systems gegeben ist, durch eine einfache Abzählung a priori zu entscheiden, ob das Problem lösbar ist, resp. wieviel weitere Integrale man höchstens nur noch zu entdecken brauche, um dasselbe vollständig lösen zu können. Neben der gewöhnlichen Art, durch identische Erfüllung der Bedingungsgleichungen die dynamischen Differentialgleichungen auf die canonische Form zu bringen, wird in diesem zweiten Theile des Aufsatzes noch eine zweite Methode zur Reduction auf die canonische Form benutzt, bei der die Be-

dingungsgleichungen des Systems beibehalten werden, und die sich daher in jedem Falle wirklich durchführen lässt.

Mr.

F. Siacci. Nota intorno ad una legge di reciprocità dinamica. Atti di Torino. XV. 519-520.

Die Variabeln in den canonischen Gleichungen der Dynamik lassen sich als von zweierlei Art unterscheiden. Die ersten, Hauptvariable genannt, sind im Allgemeinen irgend welche Functionen der Coordinaten des Systems, während die zweiten, die conjugirten Variabeln, Functionen der Coordinaten und der Geschwindigkeiten sind, welche mit den ersten in einem gewissen Zusammenhang stehen. Ebenso lassen sich die Constanten der Integralgleichungen als Hauptconstante und conjugirte Constante unterscheiden. Das vom Verfasser hier ausgesprochene Reciprocitätsgesetz sagt nun aus, dass als Hauptvariabele resp. Hauptconstante alle oder einige der conjugirten Variabeln oder Constanten betrachtet werden können, wenn man nur das Zeichen vertauscht und die betreffenden Hauptvariabeln resp. Hauptconstanten zu conjugirten nimmt.

O.

Ph. Gilbert. Rectification aux formules sur les mouvements relatifs. Ann. Soc. scient. Brux. IV. A. 53-55.

Der Verfasser hat in seinen Noten über relative Bewegungen eine und dieselbe Grösse durch verschiedene Buchstaben bezeichnet, wodurch die Resultate in Bd. III. A. p. 76, 77, 86, 88, 89 (siehe F. d. M. XI. 1879. p. 645) verwickelt werden. Er giebt hier diese Formeln genau.

Mn. (O.)

J. Loudon. Notes on relative motion. Am. J. III. 174-178.

Es werden in Nr. 1 die Componenten der absoluten Beschleunigung bei der Bewegung eines Punktes in einer Ebene abgeleitet, in Nr. 2 für die Bewegung eines Körpers um eine Axe, und in Nr. 3 für die Bewegung eines Körpers um einen

Punkt. In den übrigen Nummern 4) bis 6) werden ähnliche Fragen behandelt. O.

N. Herz. Die lebendige Kraft eines bewegten Körpers. Zeitschr. f. d. Realsch. V. 335-338.

Um den fraglichen Begriff auch beim elementaren Unterrichte verständlich zu machen, soll man die beiden Sätze „Die Energie eines bewegten Körpers wächst so wie die Masse“ und „Die Energie eines bewegten Körpers wächst wie das Quadrat der Geschwindigkeit“ gesondert behandeln. Gr.

O. Simony. Ueber eine Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen einiger allgemeiner Sätze der Mechanik. Wien. Ber. LXXXI., Wien. Anz. 1880. 47-48, Carl Rep. XVI. 259-260.

Der Verfasser behandelt ein freies materielles System von n Punkten. Diese haben zur Zeit $t=0$ ihre Gleichgewichtslagen mit endlichen Anfangsgeschwindigkeiten $c_1, c_2, \dots c_n$ verlassen und sind bei ihrer Bewegung nur dem Einflusse innerer Anziehungskräfte unterworfen, welche nach den Verbindungslinien der Systempunkte wirken und dem dritten Newton'schen Bewegungsgesetze genügen. Bezeichnet man dann mit $v_1, v_2, \dots v_n$ die Geschwindigkeiten der Punkte zur Zeit t und mit f und φ zwei einwerthige stetige und endliche Functionen, so ist die Wechselwirkung W zweier Massen m, m' der Systeme in der Entfernung r

$$W = kmm'f(r)[\varphi(t, v_1^2, v_2^2, \dots v_n^2)]^2.$$

Für das dadurch ausgedrückte Wirkungsgesetz folgt dann aus der Addition aller auf dieselbe Coordinatenaxe bezüglichen Bewegungsgleichungen unmittelbar der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes. Ferner liefert ebenso eine einfache Transformation der Formel

$$\Sigma\tfrac{1}{2}mv^2 - \Sigma\tfrac{1}{2}mc^2 = \int_0^t \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

für das obige Gesetz den Satz der Erhaltung der Kraft, so dass also beide auch hier noch Geltung haben, trotzdem sich in W

ein von den Geschwindigkeiten der bewegten Massen und der Zeit abhängiger Factor befindet. O.

G. J. Michaelis. Over het beginsel van het behoud der energie. Nieuw Arch. VI. 1-18.

In der neuesten Zeit ist man bestrebt gewesen, einige Naturerscheinungen aus Kräften zu erklären, welche nicht nur von dem Abstand der materiellen Punkte eines Systems, sondern auch von ihrer Bewegung abhängen. Soll nun für ein solches System das Princip der Erhaltung der Energie gelten, so müssen die Bewegungsgleichungen ein Integral haben von der Form

$$T+V=E,$$

worin T die lebendige Kraft, V die Kräftefunction, E die Energie bedeuten. Die Function V wird in diesem Fall ausser von den Coordinaten auch von den Differentialquotienten nach der der Zeit abhängen. Wenn eine solche Function gegeben ist, so können die Kraftcomponenten in einem Punkt des Systems nicht durch gewöhnliche Differentiation gefunden werden. Nun hat aber Herr Schering eine neue Definition der Kräftefunction gegeben, woraus in jedem Falle die Kraftcomponenten in einem beliebigen Punkt des Körpers abgeleitet werden können. Diese stimmt mit der obengenannten Function V überein, wenn die Kräfte unabhängig von der Bewegung ihrer Angriffspunkte sind. Wenn nun eine solche Schering'sche Kräftefunction besteht, dann nehmen die Bewegungsgleichungen immer eine einfache Form an und liefern ein Integral, welches das Princip der Erhaltung der Energie ausdrückt. Hiervon ausgehend werden in dem oben genannten Aufsatz die wichtigsten mechanischen Principien in Bezug auf Kräfte, welche von der Bewegung der Theilchen, auf welche sie wirken, abhängig sind und eine Schering'sche Kräftefunction haben, besprochen. Insbesondere wird das Princip der Erhaltung der Energie behandelt, weil dasselbe auf die Anschauungen von Helmholtz, Weber und einiger anderer Forscher, die mit einander im Streit liegen, führt. Die allgemeinen Formeln werden nach dem Vorgange von Schering abgeleitet und

auf die gegenseitige Einwirkung zweier Theilchen angewendet, welche sich in Bezug auf einander bewegen. Die Function V, von welcher hierbei ausgegangen wird, stimmt nicht ganz mit der überein, welche von Riemann als das Potential angezogen wird, sondern ist allgemeiner. Als Gleichung, welche das Princip der Erhaltung der Kraft ausdrückt, wird gefunden

$$\Sigma pq' - T + V = E,$$

worin q die neuen unabhängigen Coordinaten bedeuten und

$$p = \frac{\partial(T - V)}{\partial q'}$$

gesetzt ist.

Die Kraft, welche nach Weber ausgedrückt ist in der Formel

$$R = \frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}(r'^2 - 2rr')\right],$$

wird besonders behandelt. Hier ist die Schering'sche Kräftefunction

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 + \frac{1}{c^2} r'^2\right),$$

während die Gleichung für das Princip der Erhaltung der Energie in die Form

$$\frac{1}{2}\frac{mm'}{m + m'}(v' - v)^2 + \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{c^2} r'^2\right) = E$$

gebracht wird, worin v und v' die Geschwindigkeiten der beiden Theilchen vorstellen.

Der Streit, welcher, durch diese Gleichung veranlasst, zwischen Weber und Helmholtz geführt worden ist, wird besprochen. Die Verwirrung, welche hieraus entstand, wird dem Umstande zugeschrieben, dass verschiedene Grössen mit demselben Namen bezeichnet worden sind. Besonders ist dies der Fall mit der potentiellen Energie und der Anwendung des Princips von der Erhaltung der Kraft. Zum Schlusse zeigt der Verfasser, dass bei Kräften, welche von der Bewegung der Angriffspunkte abhängen, allen mechanischen Grundsätzen genügt werden kann, ohne dass die Kräfte in der Richtung der Verbindungslinien der Theilchen wirken. G.

A. HANDL. Neue Art der elementaren Ableitung der Formel für die Fliehkraft. Zeitschr. f. d. Realsch. V. 16-17.

Es wird mit Recht getadelt, dass bei der in den meisten Lehrbüchern enthaltenen Methode der Herleitung von $c = \frac{mv^2}{r}$ (c Centrifugalbeschleunigung, m Masse, v Geschwindigkeit, r Bahnradius) dem Schüler mehr oder minder verhüllt die Zumuthung gemacht wird, sich ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln vorzustellen. Der Verfasser hilft dem dadurch ab, dass er den beweglichen Punkt statt auf dem Kreisbogen selbst auf den beiden diesen einschliessenden Tangenten sich bewegen lässt. Die hierbei angewandten Infinitesimalbetrachtungen sind in der That einfacher und correcter, als die dem üblichen Verfahren eigenthümlichen. Gr.

K. L. BAUER. Zur Behandlung der Lehre von der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Hoffmann Z. XI. 85-100.

Der Verfasser setzt in der vorliegenden Arbeit die Art auseinander, in der nach seiner Ansicht die Lehre von der gleichförmig beschleunigten Bewegung auf der Schule behandelt werden soll. Neues zu bringen ist nicht die Absicht. Die Darstellung ist klar und einfach. O.

H. HART. On the path of a projectile. Messenger (2) X. 64.

Methode zur Herleitung der Formeln der parabolischen Bewegung. Glr. (O.)

A. J. PICK. Elementare Ableitung der Formel für die östliche Abweichung frei fallender Körper. Hoffmann Z. XI. 338-342.

Verfasser findet die gewöhnlich in den Lehrbüchern stehende Erklärung der östlichen Abweichung nicht genügend und sucht

nun hier eine Herleitung der Formel in elementarer Weise durch Umgehung der Differentiation und Integration zu geben.

O.

H. H. Bates. On the movement of a particle attracted towards a point. Wash. Bull. II. 19-20.

Der Verfasser sucht nach dem hier vorliegenden Auszuge nachzuweisen, dass die Annahme einer verschwindenden Kleinheit der angezogenen Theilchen zu Absurditäten führt. Diese Theilchen müssten immer als Masse oder Kugel, wenn auch noch so klein, betrachtet werden. Im Weiteren beschäftigt sich der Verfasser mit der Anziehung einer homogenen Kugel. O.

Nordmann. Ueber eine Art der Centralbewegung, welche die Planetenbewegung als Specialfall einschliesst. Pr. Halberstadt.

Die Arbeit schliesst sich an eine Arbeit von Menzzer, die im ersten Bande des Jahrbuchs 1868 p. 398 eine Besprechung erfahren hat, an. Der Verfasser stellt hier Bewegungsgleichungen für den Planetenmittelpunkt auf, die „von befreundeter Hand auf durchaus exacte Manier" hergeleitet sind, und giebt dann näherungsweise Lösungen, welche als Resultate die Kepler'schen Gesetze und Aehnliches ergeben. O.

R. Hoppe. Ueber die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze. Grunert Arch. LXVI. 107-112.

Das Vorliegende ist nur ein Theil der Arbeit. Daher wird das Referat verschoben, bis sie vollendet vorliegt. O.

G. Bardelli. Intorno ad alcune relazioni geometriche e meccaniche concernenti le linee gobbe. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII. 52-58.

Der Verfasser knüpft an eine Arbeit über die Ableitungen der Coefficienten einer orthogonalen Substitution (Rend. Ist. Lomb. (2) IX. 167—174 siehe F. d. M. VIII. 1876. p. 68) an und giebt nochmals eine Ableitung der dort ermittelten Eigenschaften. Daran schliesst sich die Herleitung einiger Sätze über Raumcurven, wie: „Die Tangente an den Ort der Projectionen des Anfangspunktes auf die osculirende Ebene ist der Normalebene an die gegebene Curve parallel.“ Diese Sätze werden dann benutzt, um in etwas allgemeinerer Form den Satz herzuleiten, den Herr Siacci im Jahre 1879 (Atti di Torino XIV. 946—952 siehe F. d. M. XI. 654) veröffentlicht hatte. O.

H. A. Howe. Three approximate solutions of Kepler's problem. Cincinnati Soc. of Nat. a. Hist. 1880. 205-210.

Grunert hat in einer Arbeit: „Neue näherungsweise Auflösung der Kepler'schen Aufgabe“ die Gleichung

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{\cos\frac{1}{2}M\sin(E-\frac{1}{2}M)+F(E)}{\sin\frac{1}{2}M\cos(E-\frac{1}{2}M)-F(E)}$$

gegeben, wo e, M und E resp. die Excentricität, die mittlere und die excentrische Anomalie bezeichnen und

$$F(E) = \tfrac{1}{2}[E-M-\sin(E-M)]$$

ist. In der vorliegenden Arbeit giebt der Verfasser durch verschiedene Substitutionen drei Näherungsmethoden zur Lösung derselben. O.

H. Hart. Integration of the rectangular equations of motion in the case of a central force varying inversely as the square of the distance. Messenger (2) IX. 131-132.

Einfache Methode zur Integration der Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{x}{r^3},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu\frac{y}{r^3}.$$

Glr. (O.)

H. Gyldén. Sur l'orbite que parcourt un point matériel attiré par un sphéroide. C. R. XCI. 957-959.

Das zu Grunde gelegte Anziehungsgesetz ist das Newton'sche. Die anziehende Kraft des Sphäroids wird gleich $-\frac{\mu_1}{r^2}-\frac{3\mu_2}{r^4}$ angenommen, was eine den Forderungen der Astronomie genügende Annäherung giebt. Indem nun als erste Annäherung die Bewegung im Aequator vorausgesetzt wird, ergeben sich die Gleichungen

$$r^2\frac{d^2v}{dt^2}+2r\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dt}=0,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{\mu_1}{r^2}+\frac{3\mu_2}{r^4}=0,$$

wo r der Radiusvector und v der Winkel ist, den derselbe mit der festen X-Axe bildet. An Stelle von t führt der Verfasser eine neue unabhängige Variable u ein, die mit t durch die Gleichung $dt=\gamma r^2 du$ verbunden ist, wo γ eine verfügbare Constante bedeutet. Dadurch nehmen die obigen Gleichungen die Form an:

$$dv=\gamma\sqrt{c}\,du;\quad \frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{dr}{du}\right)^2=r(2\mu_2-cr+2\mu_1r^2-hr^3),$$

wo $\sqrt{c}$ und h Integrationsconstante sind. Ist die Bahn eine geschlossene, so hat der auf der rechten Seite in Klammern stehende Factor in der zweiten Gleichung zwei positive Wurzeln. Mit deren Hülfe und den Constanten des dritten Factors der obenerwähnten Gleichung lassen sich dann die Constanten μ_2, c, μ_1, h ausdrücken. Durch die weitere Substitution $r=\frac{r_1-my}{1-ny}$, wo m und n bestimmten Bedingungen unterworfen sind, findet sich dann

$$dt=\gamma r_1^2\frac{dn\,u^4}{(1-sn\,u^2)^2}du.$$

Weiter werden für γ zwei Ausdrücke hergeleitet, nämlich

$$\gamma=\sqrt{\frac{2r_1}{\mu_2}}\frac{1}{sn(i\omega+K)}$$

und

$$\gamma=\sqrt{\frac{r_1+r_2}{r_1r_2}}\,k'[sn(\sigma+\omega)+sn(\sigma-\omega)].$$

O.

H. Gyldén. Ueber die Bahn eines materiellen Punktes, der sich unter dem Einfluss einer Centralkraft von der Form $\frac{\mu_1}{r^2}+\mu=\nu$ bewegt. Stockholm Handl. XVII.

M. L.

H. G. Zeuthen. Nogle tilsyneladende Paradoxer i Läeren om Centralbevogelse. Zeuthen Tidsskr. (4) IV. 3-9.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass die Bestimmung des anziehenden Gesetzes bei einer gegebenen Centralbewegung mittels der Formel $R=\frac{k^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right)$ bisweilen unmöglich wird. Dieser Fall tritt ein, theils wenn die gegebene Curve irgendwo eine Tangente hat, welche durch das Centrum der Anziehung geht, theils wenn sie Rückkehrpunkte besitzt. Für alle Curvenstücke, welche keine solche Punkte enthalten, lässt sich dagegen immer ein anziehendes Gesetz bestimmen. Es ergiebt sich daher die Frage, wie die Bewegung über einen solchen kritischen Punkt hinaus fortgesetzt werden kann, wenn das Anziehungsgesetz keine Veränderung erleidet.

Der Verfasser behandelt diese Frage insbesondere für Rückkehrpunkte der zweiten Art, wo wirklich eine solche Fortsetzung möglich wird, wenn nämlich die Tangente im Rückkehrpunkte senkrecht auf dem Radiusvector steht.

Gm.

A. H. Curtis. On free motion under the action of several central forces. Messenger (2) X. 3-12.

In der vorliegenden Arbeit werden die Bedingungen aufgestellt, die erfüllt werden müssen, damit ein materieller Punkt unter der Wirkung einer beliebigen Anzahl centraler Kräfte eine gegebene Curve beschreibt. Speciell wird der Fall der Ellipse in Betracht gezogen. Ferner werden auch die Bedingungen dafür untersucht,

dass eine Saite in gegebener Form unter der Wirkung einer b liebigen Anzahl von Kräften im Gleichgewicht sei.

Glr. (O.)

G. Morera. Sul moto di un punto attratto da du centri fissi colla legge di Newton. Battaglini G. XVII 34-71.

Enthält eine eingehende Behandlung des Problems. Nachdem im § 1 historische Notizen vorausgeschickt sind und das Problem auf die Ebene beschränkt ist, leitet der Verfasser die Bewegungsgleichungen des Problems her und stellt die Gleichung der Bahn in einer von Liouville gegebenen Form auf. Es gelingt ihm im Folgenden die Euler'schen Integralgleichungen herzuleiten. Speciell wird dann der Fall behandelt, dass die Anziehung des einen und dass die Anziehung der beiden Centren verschwindet. Dann wendet sich die Untersuchung zu dem Fall, dass die Bahn ein Kegelschnitt ist, in dessen Brennpunkten die Centren sich befinden, mit Specialisirungen auf Ellipse und Hyperbel. Allgemeinere Untersuchungen über die Bahn bilden den Schluss der Arbeit.

O.

A. Legoux. Sur les trajectoires d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale. Nouv. Ann. (2) XIX. 340-347.

Der Verfasser stellt zunächst für das Anziehungsgesetz $m\mu r^n$ die Differentialgleichung der Bahn des beweglichen Punktes auf. Er zeigt dann, wie es möglich ist, auch ohne dass man sie ganz integriren kann, doch gewisse Eigenschaften der Form der Bahn zu erkennen. Es sind das namentlich die Maxima und Minima der Radiusvectoren, die Concavität, die Asymptote und der Krümmungsradius. Zum Schluss führt er die Integration eines speciellen Falls der Gleichung durch.

O.

. Wex. Aufgaben aus der rationellen Mechanik, betreffend die Bewegung eines materiellen Punktes. Pr. Dortmund.

Der Verfasser giebt eine ausführliche Lösung von acht Aufaben aus dem im Titel bezeichneten Gebiete. Zur Charakristik derselben führen wir an No. II.: „Ein materieller Punkt eschreibt eine Conchoide unter der Einwirkung einer Kraft, die egen den Pol der Curve gerichtet ist. Das Gesetz dieser Kraft stzustellen und die Bewegung des Punktes zu untersuchen" und o. VII: „Auf welcher in einer verticalen Ebene gelegenen Curve uss ein materieller Punkt, der nur der Wirkung der Schwere nterliegt, sich bewegen, wenn der aus der Schwere auf die urve resultirende Druck proportional sein soll der Entfernung es Punktes von einer gegebenen verticalen Geraden?" Es eriebt sich eine Huygens'sche Tractorie. O.

---

7. G. Imchénetsky. Détermination en fonction des coordonnées de la force qui fait mouvoir un point matériel sur une section conique. Mém. de Bord. (2) IV. 31-40.

Der Verfasser behandelt das Problem, das im Jahre 1877 on Bertrand aufgestellt worden ist und dann Bearbeitungen von)arboux, Halphén, Battaglini, Siacci gefunden hat (siehe F. d. I. IX. 1877. p. 638—642, X. 1878 p. 618—619, XI. 1879. p. 647.). Er gelangt zu folgenden Resultaten: Wenn ein freier Körper einen Kegelschnitt beschreibt unter Wirkung einer beschleunigenden Kraft, welche sich nur mit der Lage des Körpers ändert, so geht rstens die Richtung der Kraft stets durch einen festen Punkt in ler Ebene des Kegelschnitts, zweitens muss sich die Intensität ler Kraft nicht allein mit der Entfernung des Kräftemittelpunkts om bewegten Körper, sondern auch mit der Richtung seines Radiusvectors ändern. Zum Schluss erläutert der Verfasser das Verhältnis seiner Resultate zu denen des Herrn Darboux.

O.

U. Dainelli. Sul movimento per una linea qualunque. Battaglini G. XVIII. 271-300.

Angeregt durch die früher besprochenen Arbeiten von Bertrand, Darboux, Halphén, Battaglini (siehe das vorige Referat) hat sich der Verfasser folgendes Problem gestellt: Die Componenten der Kräfte so als Functionen der Coordinaten eines bewegten Punktes zu bestimmen, dass er eine gegebene Bahn durchläuft. Der Verfasser behandelt im ersten Abschnitt die Frage für die Ebene. Ist $\varphi(x, y) = 0$ die Bahn in orthogonalen Coordinaten, so findet er:

$$X = -k^2 \cdot \left[\frac{d^2\varphi}{dy^2} \cdot \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} \cdot \frac{d\varphi}{dy}\right] t^2 + k^2 \frac{d\varphi}{dy}\left[\frac{df}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right] f;$$

$$Y = -k^2 \cdot \left[\frac{d^2\varphi}{dx^2} \cdot \frac{d\varphi}{dy} - \frac{d^2\varphi}{dy\,dx} \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right] t^2 - k^2 \frac{d\varphi}{dx}\left[\frac{df}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right] f.$$

Hierbei ist k eine Constante, welche von der Anfangsgeschwindigkeit im Anfangspunkt der Bewegung abhängt, und f eine willkürliche Function. Die Bestimmung dieser willkürlichen Function wird in einer Reihe specieller Fälle erläutert, namentlich einer centralen Kraft und einer Kraft von constanter Richtung. Im zweiten Abschnitt wird die Untersuchung auf den Raum ausgedehnt. Auch hier wird die Lösung an speciellen Fällen erläutert. O.

J. G. Wallentin. Bemerkungen zur elementaren Ableitung der allgemeinen Gleichungen der oscillatorischen Bewegung. Zeitschr. f. d. Realsch. V. 468-476.

An die Spitze gestellt wird der Satz, dass, wenn zwei Körper resp. in einer begrenzten Curve und in einer Geraden sich so bewegen, dass die Geschwindigkeit des letzteren der Parallelprojection von der Geschwindigkeit des ersteren gleich ist, alsdann das Curvenstück und seine Projection auf die fragliche

Gerade in gleichen Zeiträumen durchlaufen werden. Auf diesen Satz führt der Verfasser zuerst den gewöhnlichen Fall oscillirender Bewegung zurück, sodann den weiteren Fall, wo ausser der in die Gleichgewichtslage zurückführenden Kraft noch ein gewisser Widerstand vorhanden ist, so dass also resp. die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ax, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -ax - b\frac{dx}{dt}$$

elementar gelöst werden. Neu vom didaktischen Standpunkt ist dabei die umfassende Verwerthung des Hamilton'schen Hodographen. Gr.

H. Résal. Théorie élémentaire des brachistochrones.
Nouv. Ann. (2) XIX. 385-397.

Die Arbeit ist ihrem Inhalte nach dieselbe, die der Verfasser in demselben Journal ((2) XVI. p. 97—104 siehe F. d. M. IX. 1877. p. 644) bereits veröffentlicht hatte. Da im Grunde nur die Form verändert ist, genügt der Hinweis auf das damalige Referat. O.

R. R. Webb. The brachistochrone problem of a system.
Messenger (2) IX. 151-158.

Das gewöhnliche Problem der Brachistochrone beschäftigt sich nur mit einem materiellen Punkt und kann in folgender Weise ausgesprochen werden: „Man soll die ebene Curve bestimmen, auf der ein materieller Punkt sich zu bewegen gezwungen sein muss, um in kürzester Zeit von einer Lage in eine andere zu gelangen, während die Kräfte ungeändert bleiben.“ Das in dieser Arbeit behandelte Problem zielt auf die Bestimmung der Bedingungen, die einem dynamischen System bei Conservirung der Kräfte auferlegt werden müssen, damit es in möglichst kurzer Zeit aus einer Configuration in eine andere übergehe. Es ist klar, dass in allen Fällen die eingeführten Bedingungen den Freiheitsgrad des Systems auf die Einheit reduciren müssen,

so dass das Problem darauf hinausläuft, die Functionen mehrerer unabhängiger Variablen, deren jede eine unabhängige Coordinate des freien Systems ist, so zu bestimmen, dass die Uebergangszeit ein Minimum ist. Glr. (O.)

G. Formenti. Sul problema delle tautocrone. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII. 266-281.

Der Verfasser entwickelt zunächst die Form der Functionen $f(z, z_0)$, für welche der Ausdruck $T = \int^{z_0} f(z, z_0) dz$ von z und z_0 unabhängig ist. Er benutzt dies, um zu dem allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeit bei einer tautochronen Bewegung zu gelangen. Im Weiteren bespricht er den Zusammenhang seines Resultats mit denen von Lagrange, Brioschi und Jullien.

O.

C. Müller. Ueber barytrope und tautobaryde Curven. Pr. Hadamar.

Nachdem im ersten Paragraphen eine historische Uebersicht über die bisherigen Bearbeitungen dieses Problems gegeben ist, stellt der Verfasser sich folgende Aufgabe: „Es sind diejenigen ebenen Curven zu bestimmen, auf denen sich ein materieller Punkt unter dem Einflusse einer treibenden Kraft der Art bewegt, dass das Verhältnis zwischen dem durch die Kraftcomponente allein ausgeübten Druck zu dem von der Centrifugalkraft herrührenden ein bestimmter sei.“ Der Verfasser stellt die Differentialgleichung des Problems allgemein auf und giebt dann diesem Verhältnis n eine Reihe von bestimmten Werthen, für welche sich die Curven wirklich bestimmen lassen. Für $n = 0$ ergiebt sich die verticale, für $n = \pm\infty$ die horizontale Axe als Bahn. Der Fall $n = +1$ ergiebt die Parabel, während $n = -1$ auf die Cycloide führt. $n = +\frac{1}{2}$ führt auf die gemeine Kettenlinie und $n = -\frac{1}{2}$ auf einen Kreis. O.

H. Geelmuyden. Die conische Pendelbewegung. Arch. f. Math. og Nat. V. 307-327.

Der Verfasser entwickelt die Theorie des conischen Pendels in einer für die numerische Berechnung zweckmässigen Form.

L.

H. Résal. Du problème inverse du mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution. C. R. XC. 889-893, 937-940.

Wenn man sich auf einer Rotationsfläche eine Curve gezeichnet denkt, so kann man sich vorstellen', dieselbe sei von einem materiellen Punkte beschrieben, der sich auf dem Meridian bewegt, während dieser sich gleichzeitig um die Rotationsaxe dreht. Dazu muss aber eine gewisse Beziehung zwischen den beiden Bewegungen stattfinden, welche von der beschriebenen Curve abhängig sein wird. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich darum, die Bedingungen aufzustellen, welche zwischen den Componenten der Kraft nach dem Meridian und nach der Tangente zum Parallelkreis stattfinden müssen, damit eine gegebene Curve beschrieben wird. Diese Aufgabe wird in der ersten Notiz unter Anwendung sphärischer, in der zweiten unter Anwendung cylindrischer Coordinaten mit Hülfe des Satzes von Coriolis behandelt. Specialisirt werden die Resultate für die geodätischen Linien. O.

F. Wittenbauer. Theorie der Bewegung auf developpabeln Flächen. Wien. Anz. 1880. 65; Wien. Ber. LXXXI.

Der Verfasser beweist zunächst folgenden Satz: „Wenn ein Punkt genöthigt ist, sich unter dem Einflusse irgend einer Beschleunigung auf einer developpabeln Fläche zu bewegen, und letztere zu irgend einer Zeit in eine Ebene ausgebreitet ist, so beschreibt der Punkt die Deformationscurve seiner Bahn mit derselben Geschwindigkeit, mit welcher er seine Bahn auf der Fläche durchläuft, vorausgesetzt, dass die Beschleunigung ungeändert bleibt, sowohl nach ihrer Grösse, als nach ihrer Richtung gegen

die Tangentenebene der Fläche.“ Dem folgen dann im Weiteren Anwendungen. In § 5 wird die Bewegung eines schweren Punktes auf der abwickelbaren Schraubenfläche behandelt, in §6 auf einem schiefliegenden Cylinder. Der bewegte Punkt kann in diesem Falle drei Arten von Bahnen zurücklegen. Er beschreibt entweder volle Umläufe, oder er oscillirt im Cylinder, ohne die höchste Erzeugende desselben je zu erreichen, oder endlich er nähert sich der letzteren asymptotisch. In § 7 folgt die Bewegung auf der Kegelfläche, welche dann in § 8 für den Kreiskegel specialisirt wird. § 9 enthält zwei weitere Specialisirungen dieser Bewegung. Dann wird in § 10 an den Beispielen der Kreispendelbewegung auf cylindrischen und conischen Flächen erläutert, wie sich die gegebenen Betrachtungen auch zur Untersuchung von Bewegungen auf vorgeschriebenen Bahnen in developpablen Flächen benutzen lassen. § 11 endlich bespricht die Möglichkeit der Verallgemeinerung der im § 10 gegebenen Betrachtungen. O.

J. Farkas. Mittlerer verticaler Druck des symmetrischen Pendels auf seine Axe. Grunert Arch. LXV. 435-438.

Der Verfasser betrachtet als symmetrisch jedes Pendel, dessen sämmtliche zur Axe senkrechte Schichten ihre Schwerpunkte in einer und derselben Ebene oder Axe haben. Unter dieser Voraussetzung leitet er den Ausdruck für den mittleren verticalen Druck während einer Zeit her, die erforderlich ist, um zu einem gewissen Ausschlagswinkel zu gelangen. Er behandelt dann die beiden speciellen Fälle, dass das Pendel ruhig hin und her schwingt, und dass es beständig im Kreise herumläuft. Im ersten Fall ergiebt sich als Resultat: „Der mittlere verticale Druck ist während einer halben Schwingung beim physischen Pendel kleiner als sein Gewicht, beim mathematischen gleich dem Gewicht.“ Dasselbe findet sich für den zweiten Fall. O.

G. Govi. Nouvelle méthode pour déterminer la longueur du pendule simple. C. R. XCI. 105-106.

Um die Länge des Sekundenpendels an einem Orte zu bestimmen, hat der Verfasser ein Pendel mit einem Laufgewicht am Ende benutzt. Er bestimmt die Dauer einer Schwingung für die unterste Lage t und dann die dreier anderer t_1, t_2, t_3, bei denen das Laufgewicht um die Strecken resp. b_1, b_2, b_3 vom Ende entfernt worden ist. Die Länge des Sekundenpendels ist dann:

$$L = \frac{b_1 b_3 (b_3 - b_1)(t^2 - t_2^2) - b_1 b_2 (b_2 - b_1)(t^2 - t_3^2) - b_2 b_3 (b_3 - b_2)(t^2 - t_1^2)}{b_1 b_3 (t_1^2 - t_3^2)(t^2 - t_2^2) - b_1 b_2 (t_1^2 - t_2^2)(t^2 - t_3^2) - b_2 b_3 (t_2^2 - t_3^2)(t^2 - t_1^2)}.$$

O.

G. Darboux. Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps. Darboux Bull. (2) IV. 126-160.

Detaillirte Ausführung der Arbeiten, die der Verfasser im Jahre 1874 in den C. R. (siehe F. d. M. VI. 1874. p. 608—609) veröffentlicht hatte, mit Erläuterungen der dort gegebenen Resultate.

O.

H. Léauté. Sur l'établissement des équations données par M. Résal pour présenter le mouvement d'une courbe funiculaire plane. Liouville J. (3) VI. 215-234.

H. Léauté. Équations des petites oscillations d'un fil inextensible en mouvement dans l'espace. C. R. XC. 290-293.

H. Léauté. Détermination des torsions moyennes développées aux extrémités d'une corde pesante oscillante autour d'une position de repos apparent. C. R. XC. 354-357.

Herr Résal hat früher die Bewegungsgleichungen einer ebenen Seilcurve gegeben und dann in seinem: Traité de mécanique gé-

nérale“ (I. p. 321) sie auf den Fall der langsamen Bewegung eines Seiles angewandt, wenn ein Punkt fest ist. In der Herleitung findet sich indess nach dem Verfasser eine Schwierigkeit, die dadurch entstanden ist, dass Herr Résal nur den Fall hat behandeln wollen, wo das Seil der geraden Linie sehr nahe kommt. In dem ersten Abschnitt seiner Arbeit unterzieht daher der Verfasser die Résal'sche Ableitung einer Discussion und zeigt, dass die aufgestellte Gleichung $\frac{dv}{ds} = 0$ nur dann streng ist, wenn das Seil geradlinig ist oder es sich um einen Inflexionspunkt handelt, dass sie aber unter gewissen Umständen als Annäherung betrachtet werden könne. Im zweiten Abschnitt werden die Gleichungen für kleine Oscillationen eines Seiles im Raume aufgestellt und untersucht. Die allgemeinen Gleichungen werden dann für den Fall der Ebene specialisirt und der Verfasser gelangt dabei zu Resultaten, welche für den betreffenden speciellen Fall mit den von Herrn Résal gefundenen übereinstimmen. Er setzt sodann weiter auseinander, wie es gekommen, dass die Résal'schen Resultate für den speciellen Fall richtig seien, trotzdem die Ausgangsgleichung nicht genau gewesen sei. Im Abschnitt III erfolgt endlich die Aufstellung der Gleichungen für kleine Bewegungen einer dieser Seilcurven durch Betrachtung der relativen Bewegungen. O.

R. Hoppe. Ueber die freie Bewegung eines Körpers ohne Einwirkung eines Kräftepaares. Grunert Arch. LXIV. 363-372.

Ein Körper, dessen Masse m, dessen Hauptträgheitsmomente A, B, C sind, sei in beliebiger freier Bewegung. Dann resultirt aus den auf ihn wirkenden Kräften eine Kraft und ein Kräftepaar. Indem die erste als durch den Schwerpunkt gehend angenommen wird, wird das Kräftepaar als Null vorausgesetzt. Dann ist die Bewegung des Schwerpunkts, die nur von jener Kraft und der Masse bedingt wird, und die Bewegung des Körpers

relativ zum Schwerpunkt von einander unabhängig. Die Bewegung des Schwerpunktes, die eine Frage für sich bildet, wird im Folgenden nicht berücksichtigt. Die zweite Aufgabe ist von Jacobi und constructiv von Poinsot gelöst worden. Der Verfasser nimmt sie indessen hier noch einmal auf, um zu zeigen, dass sich die Lösung derselben auf directem analytischem Wege ganz ohne Kunstgriffe in viel einfacherer Weise ergebe, als dies bei der Poinsot'schen auf Grund der constructiven Lösung gegebenen Berechnung geschehe. In § 1 der Arbeit wird die Lösung der Aufgabe gegeben, indem der Verfasser von den Laplace'schen Gleichungen für den Fall des Nullseins der Kräftepaare ausgeht. In § 2 folgt dann eine eingehende Discussion für die verschiedenen möglichen Fälle. O.

A. G. Greenhill. The application of elliptic coordinates and Lagrange's equations of motion to Euler's problem of two centres of forces. Proc. L. M. S. XI. 104-108.

Die Anziehung von den beiden Kräftecentren erfolgt umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Mit Benutzung elliptischer Coordinaten leitet der Verfasser von den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen ausgehend die Differentialgleichung der Bahn her. Diese ergiebt sich als

$$\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2\,\frac{A-B}{2}\cos\theta - \frac{1}{4}Cc^2\cos^2.\theta - D + H\cos 2\theta}{2\,\frac{A+B}{2}\cosh\varphi + \frac{1}{4}Cc^2\cosh^2 2\varphi + D - H\cosh 2\varphi}.$$

Er führt dann die von Euler benutzte Substitution $u = \tan\frac{1}{2}\theta$, $v = \tanh\frac{1}{2}\varphi$ zur weiteren Behandlung dieser Gleichung ein und gelangt zu folgender Form:

$$\left[H+D+2\sqrt{HD+\left(\frac{A-B}{2}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\arg\operatorname{sn}\left\{\frac{H-D-2\frac{A-B}{2}}{H+D-2\sqrt{HD+\left(\frac{A-B}{2}\right)^2}}u, k_1\right\}$$

$$\pm\left[D+H+2\sqrt{DH+\left(\frac{A+B}{2}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\arg\operatorname{sn}\left\{\frac{D-H-2\frac{A+B}{2}}{D+H-2\sqrt{DH+\left(\frac{A+B}{2}\right)^2}}v, k_2\right\} = \text{Const.}$$

Hier ist

$$\arg\operatorname{sn}(x, k) \text{ für } \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

geschrieben, und

$$\left.\begin{matrix}k_1\\k_2\end{matrix}\right\} = \left[H+D-2\sqrt{HD+\left(\frac{A\mp B}{c}\right)^2}\right]:\left[H+D+2\sqrt{HD+\left(\frac{A\mp B}{c}\right)^2}\right].$$

Betreffs einer Discussion der verschiedenen Fälle wird auf Legendre's „Traité des fonctions elliptiques" Bd. I verwiesen.

O.

E. Brassinne. Détermination des trois axes d'un corps solide sur lesquelles les forces centrifuges exercent par suite de la rotation, un effet maximum. C. R. XC 1271-1272; Mém. de Toul. (8) II. 93-96.

Enthalten einen Beweis des folgenden Satzes: „Wenn man in einem Punkt eines Körpers die drei Hauptaxen bestimmt und durch jede eine Ebene legt, welche den Winkel der rechtwinkligen Ebenen, deren Schnitt er ist, in zwei gleiche Theile theilt, so sind die drei Lothe von dem Punkte auf die winkelhalbirende Ebene die Axen, auf welche die Centrifugalkräfte die Maximalwirkung üben."

O.

Lösungen von Aufgaben aus der Dynamik fester Körper von S. Tebay, Townsend, T. R. Terry, Matz, C. J. Monro, J. J. Walker, G. S. Carr finden sich Educ. Times XXXIII. 37-38, 42-43, 46-47, 91, 103-104.

O.

M. Deprez. Sur un nouvel indicateur dynamométrique. C. R. XC. 861-863.

Verfasser bespricht kurz die Uebelstände der gewöhnlichen Indicatoren, welche namentlich bei schnellgehenden Maschinen einen häufigen Bruch der Feder in der Trommel herbeiführen, und giebt dann die wesentliche Zusammensetzung eines neuen Indicators, bei welchem das Papier still steht und nur nach Vollendung jedes Diagramms ein Stück vorrückt. Ein Storchschnabel wird so befestigt, dass einer der drei Punkte mit der Kolbenstange verbunden ist, der zweite mit der Indicatorstange, der dritte zeichnet das Diagramm.

Bn.

F. van Rysselberghe. Description d'un régulateur elliptique isochrone dont on peut faire varier à volonté la vitesse de régime. Bull. de Belg. (2) XLIX. 9-24.

Mn.

Y. Villarceau. Sur les régulateurs à ailettes, construits par M. Breguet. C. R. XC. 1515-1518.

Bericht über die durch Verbesserungen an den Windflügelregulatoren neuerdings erreichten Resultate; die Verbesserungen bestehen namentlich in der Anwendung von Frictionsrädern. Die angegebenen Zahlen zeigen, dass bei den betrachteten drei Uhrwerken der Isochronismus so weit erreicht war, dass bei Treibgewichten von 10 bis 45 Kilogramm die Abweichungen nur bez. $\frac{1}{134000}$, $\frac{1}{17600}$, $\frac{1}{40000}$ betrugen. (Vergl. C. R. 1873.)

Bn.

PHILIPPS. De la compensation des températures dans les chronomètres. C. R. XC. 483-487, 561-566, 659-663.

Die Abhandlungen betreffen den zuerst von Dent gefundenen secundären Fehler im Gange der Chronometer, der darin besteht, dass ein für mittlere Temperaturen compensirtes Werk bei extremen Temperaturen nachgeht, während ein für extreme compensirtes bei der mittleren Temperatur vorgeht. Verfasser entwickelt hier, dass dieser Fehler von zwei Ursachen herrührt, von der Wirkung der Temperatur auf die Spiralfeder, und von dem zweiten Ausdehnungscoefficienten der im Balancier angewandten Metalle (d. h. Coefficienten der zweiten Potenz der Temperaturdifferenz, welche Fizeau bestimmt hat C. R. 68). Zunächst wird der Satz bewiesen, dass der ganze Fehler gleich ist der Summe der beiden Fehler, welche die Temperaturänderung des Balanciers und der Spiralfeder für sich hervorrufen, vermehrt um das Product derselben. Alsdann werden beide Fehler als Functionen zweiten Grades der Abweichung von der Mitteltemperatur bestimmt und der secundäre Fehler berechnet. Derjenige Theil desselben, welcher dem zweiten Ausdehnungscoefficienten zuzuschreiben ist, und die Form $N\frac{\delta''-\delta'}{\gamma''-\gamma'}\vartheta^2$ besitzt (γ die ersten, δ die zweiten Ausdehnungscoefficienten der Metalle, aus welches der Balancier zusammengesetzt ist), wird für verschiedene Metallcombinationen in einer Tabelle gegeben; der von der Spiralfeder herrührende Theil wird für solche von Stahl bestimmt. Besonders wird auf die Federn aus Palladiumlegirung aufmerksam gemacht, und es werden Beispiele gegeben von Chronometern von Ekegren und von Leroy, deren Abweichungen im Gange sehr gering sind.

Bn.

C. ROZÉ. Études sur la chronométrie; la compensation. C. R. XC. 807-809, 858-861.

Die durch Temperaturunterschiede verursachten Aenderungen im Gange werden als Functionen zweiten Grades der Temperaturdifferenzen dargestellt, und die Coefficienten werden alsdann be-

rechnet aus den Coefficienten, welche die Aenderungen des Trägheitsmomentes, der Elasticität und des elastischen Momentes der Spirale bestimmen. Andererseits sind diese ersteren Coefficienten ermittelt worden an nicht compensirten Chronometern aus verschiedenen Metallen und es zeigt sich besonders Palladium ausserordentlich geeignet als Material für die Federn. In dem zweiten Theile giebt der Verfasser zunächst die genaue Formel für die Krümmung der Segmente, welche die compensirenden Massen tragen, so wie die Formel für die Aenderungen des Trägheitsmomentes mit der Temperatur. Beide Aufsätze sind Auszüge einer noch nicht publicirten grösseren Abhandlung, welche Verfasser zurückhält, um der französischen Industrie die Vortheile der gefundenen Resultate zu sichern. Bn.

Ph. Gilbert. Sur l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités des aiguilles d'une montre. Ann. Soc. scient. Brux. IV. B. 139-142.

Lösung mit Hülfe der früher vom Verfasser über relative Bewegung aufgestellten Theorie. Mn. (O.)

H. Léauté. Recherche du coefficient de régularité du mouvement dans les transmissions par câbles. C. R. XC. 498-501.

H. Léauté. Règles pratiques pour l'établissement des transmissions télodynamiques. C. R. XC. 587-590.

Beide Abhandlungen bilden die Fortsetzung der im selben Bande Seite 290–293 und 354–357 (s. p. 683) enthaltenen, in denen die kleinen Schwankungen eines unelastischens Fadens und die dadurch hervorgerufenen Spannungsänderungen an den beiden Enden discutirt werden. Aus den dort gewonnenen allgemeinen Gleichungen, werden hier die specielleren abgeleitet für den Fall, dass die äusseren Kräfte sich auf die Schwerkraft und die von der führenden Rolle übertragenen Spannungen beschränken. Die

Endformel stimmt mit der von Kretz (C. R. Juli 1865) für die Uebertragung durch elastische Riemen gefundenen überein, wenn man den Elasticitätscoefficienten ersetzt durch die Grösse

$$\frac{3}{16}pl^3\left(\frac{1}{f_1^3}+\frac{1}{f_2^3}\right).$$

f_1 und f_2 sind die Pfeile der durch die Drahtseile in der Ruhelage gebildeten Bogen.

In der zweiten Note werden hieraus die Formeln für die Dimensionen eines solchen Drahtseiles abgeleitet; es zeigt sich, dass die Pfeilhöhe nicht zu gering sein darf im Verhältnis zur Seillänge. Bn.

B. Hydrodynamik.

J. M. Hill. Some properties of the equations of hydrodynamics. Quart. J. XVII. 1-20, 168-175.

Der Verfasser leitet aus den hydrodynamischen Gleichungen für homogene incompressible reibungslose Flüssigkeiten die folgenden Resultate ab:

1) Sind, unter u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten verstanden, P, Q, R drei unabhängige Integrale der Gleichung

$$(1)\qquad \frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+w\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

so ist der Ausdruck

$$u\,dx+v\,dy+w\,dz-(f_1dP+f_2dQ+f_3dR)$$

ein vollständiges Differential; dabei sind f_1, f_2, f_3 gewisse Functionen von P, Q, R, die von der Natur der Flüssigkeitsbewegung abhängen und für jede Art dieser Bewegung bestimmte sind.

2) Die Wirbellinien sind stets die Durchschnitte zweier Schaaren von Flächen

$$(2)\qquad \begin{cases}F_1(P,Q,R)=C_1,\\ F_2(P,Q,R)=C_2,\end{cases}$$

wo C_1 und C_2 willkürliche Constante sind.

3) Die vollständige Lösung der vier hydrodynamischen Gleichungen lässt sich auf die zweier partieller Differentialgleichungen zurückführen.

4) Construirt man einen Faden, indem man durch jeden Punkt des Umfangs einer kleinen Fäche die Schnittlinien zweier Flächenschaaren zieht, deren Gleichungen Integrale der Differentialgleichung 1) sind, so enthält dieser Faden stets dieselben Flüssigkeitstheilchen und hat überhaupt alle Eigenschaften der Wirbelfäden. Wn.

H. A. Rowland. On the motion of a perfect incompressible fluid when no solid bodies are present. Am. J. III. 226-268.

In einer incompressiblen reibungslosen Flüssigkeit seien F_0, G_0, H_0 die Geschwindigkeitscomponenten, dann sind bekanntlich die drei Grössen

$$F_1 = \frac{\partial H_0}{\partial y} - \frac{\partial G_0}{\partial z}, \quad G_1 = \frac{\partial F_0}{\partial z} - \frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad H_1 = \frac{\partial G_0}{\partial x} - \frac{\partial F_0}{\partial y}$$

die doppelten Rotationsgeschwindigkeiten der Wassertheilchen. Der Verfasser bildet nun eine Reihe weiterer Functionen, so dass F_2, G_2, H_2 ebenso von F_1, G_1, H_1 abhängen, wie die letzteren von F_0, G_0, H_0; F_3, G_3, H_3 in gleicher Weise von F_2, G_2, H_2 etc. Der erste Theil der Arbeit beschäftigt sich mit allgemeinen Eigenschaften einer Reihe derart zusammenhängender Functionen, Vectoren (vector quantities) genannt, resp. mit den dadurch dargestellten Bewegungen unabhängig von der hydrodynamischen Bedeutung von F_0, G_0, H_0, so dass diese Grössen auch nicht der Continuitätsgleichung zu genügen brauchen. Hauptsächlich wird gezeigt, wie man aus einem Vectorsystem höherer Ordnung (mit grösserem Index) successive die zugehörigen Systeme niederer Ordnung ableiten kann; wie man ein Vectorsystem, das der Continuitätsgleichung nicht genügt, durch ein anderes ersetzen kann, welches jener Gleichung genügt etc. Im zweiten Theile werden die so gewonnenen Resultate angewandt zur Discussion von möglichen Bewegungen einer unbegrenzten Flüssigkeit, in der keine

festen Körper vorhanden sind. Die Vectorsysteme mit gradem Index stellen dabei Translations-, die mit ungradem Index Rotations-Bewegungen dar. Im dritten Theile endlich wird aus den hydrodynamischen Gleichungen ein neuer Ausdruck für den hydrodynamischen Druck abgeleitet, ohne dass weitere Schlüsse daraus gezogen würden. Wn.

P. Paci. Sopra una trasformazione delle equazioni fondamentali della idrodinamica. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII 209-217.

Transformation der allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen auf ein Coordinatensystem, dessen z-Axe Tangente an diejenige Curve ist, in welcher sich der betrachtete Punkt bewegt, während die Axen x und y Tangenten an die Krümmungslinien derjenigen Fläche sind, die auf der Bewegungsrichtung senkrecht steht. Angewandt werden die transformirten Gleichungen nur auf die bekannten Probleme der Fortpflanzung des Schalles in einer Röhre, sowie in Kugelwellen. Wn.

O. Tumlirz. Ueber die Fortpflanzung von Kugel- und Cylinderwellen endlicher Schwingungsweiten. Wien. Ber. LXXXII.

Um die Fortpflanzung von Wellen in einer compressiblen Flüssigkeit ohne die gewöhnliche Voraussetzung, wonach die Quadrate der Geschwindigkeiten und Schwingungsweiten vernachlässigt werden, der Rechnung zu unterwerfen, geht der Verfasser von folgendem Princip aus. Er betrachtet zwei Nachbarzustände, die durch die Moleculargeschwindigkeiten u und $u+\frac{\partial u}{\partial r}dr$ und die Dichtigkeiten ϱ und $\varrho+\frac{\partial \varrho}{\partial r}dr$ charakterisirt sind, und stellt sich das Fortschreiten des Zustandes

$$\left(u+\frac{\partial u}{\partial r}dr,\quad \varrho+\frac{\partial \varrho}{\partial r}dr\right)$$

so vor, als ob es in einem Medium erfolge, das allenthalben die

Dichtigkeit ϱ und die Strömungsgeschwindigkeit u hat. Da nun die betrachteten Zustände unendlich wenig verschieden sind, so nimmt er an, dass $\frac{\partial u}{\partial r}dr$ und $\frac{\partial \varrho}{\partial r}dr$ zu einander in derselben Beziehung stehen, welche für Schwingungen unendlich kleiner Amplituden gilt. Für Kugelwellen unendlich kleiner Amplituden gelten z. B. unter Annahme eines Geschwindigkeitspotentials φ die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \pm a \log\varrho - \frac{\varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -a^2 \log\varrho.$$

Vermöge des eben genannten Princips setzt der Verfasser daher für Kugelwellen von endlicher Amplitude

$$\frac{\partial u}{\partial r}dr = \pm a\frac{\partial \log\varrho}{\partial r}dr - \frac{\chi}{r}$$

und

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -a^2 \log\left(\frac{\varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial r}dr}{\varrho}\right),$$

wenn χ das Geschwindigkeitspotential für diesen Fall bezeichnet. Setzt man dies in die hydrodynamischen Gleichungen ein, so folgt unter gewissen Vernachlässigungen, die für grosse r gestattet sind,

$$\frac{dr}{u^2-a^2} = \frac{dt}{u\mp a} = r\frac{du}{a^2u\mp 2au^2}.$$

Hieraus ergiebt sich weiter

$$r-(u\pm a)t = \text{Const.},$$

$$ur = (a\pm 2u)^{\frac{1}{2}}e^{\pm\frac{u}{2a}}f[r-(u\pm a)t].$$

Diese Resultate werden durch Entwickelung nach Potenzen von $\frac{u}{a}$ umgeformt und die Formänderungen der Geschwindigkeitscurve ausführlich discutirt.

Dieselbe Betrachtung wird darauf für Cylinderwellen durchgeführt, nachdem durch eine längere vorausgeschickte Entwickelung gezeigt ist, dass für Cylinderwellen von unendlich kleiner Amplitude zwischen der Geschwindigkeit und der Verdichtung

ähnliche einfache Beziehungen bestehen, wie für Kugelwellen. Die Resultate für Cylinderwellen von endlicher Amplitude sind:

$$r-(u+a)t = \text{Const.}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{r}}(2u-a)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2a}}f[r-(u+a)t].$$

Wn.

W. M. Hicks. On the motion of two spheres in a fluid. Phil. Trans. CLXXI. 455-492.

Der Verfasser bemerkt, dass die allgemeine Theorie der Bewegung eines einzelnen festen Körpers in einer unbegrenzten incompressiblen Flüssigkeit wohlbekannt ist, hauptsächlich durch die Bücher von Thomson und Tait, sowie von Kirchhoff. Man ist demnach im Stande, die Resultate numerisch zu berechnen für den Fall der Kugel, des Ellipsoids und für eine grosse Zahl von Cylinderflächen. Aber die Theorie der Bewegung von zwei oder mehr Körpern in einer Flüssigkeit ist naturgemäss noch nicht soweit entwickelt, und man ist noch nicht im Stande, die Form der betreffenden Ausdrücke für irgend welche speciellen Körper zu bestimmen. Der Verfasser verweist insbesondere auf eine Arbeit von Stokes „On some cases of fluid motion“, die schon 1843 in den Cambr. Phil. Trans. veröffentlicht ist, aber den Mathematikern auf dem Continente wenig bekannt geworden zu sein scheint. Er bespricht sodann die Untersuchungen über die Bewegung einer oder mehrerer Kugeln und erwähnt von andern Fällen das von Kirchhoff behandelte Problem der Bewegung zweier unendlich dünner Ringe. Schliesslich erwähnt er seine eigne Arbeit über das Problem der Bewegung zweier Cylinder mit parallelen Axen (cfr. F. d. M. X. 1878. p. 646, XI. 1879. p. 676). Er hat das Geschwindigkeitspotential für die Bewegung der beiden Cylinder in Form bestimmter Integrale ausgedrückt, die sich für den Fall, wo die Cylinder sich als starre Körper bewegen, mittels bipolarer Coordinaten durch elliptische Functionen ausdrücken lassen. Die in dem Ausdruck für die Energie in den Coefficienten der Geschwindigkeit vorkommenden Functionen sind ganz

analog den entsprechenden für zwei Kugeln, auf die die vorliegende Arbeit führt.

Was nun die vorliegende Arbeit selbst betrifft, so wird zunächst das Geschwindigkeitspotential gesucht für die Bewegung einer Flüssigkeit, in der sich eine unbewegliche Kugel befindet, während zugleich irgend eine Quelle der Bewegung in der Flüssigkeit vorhanden ist. Es wird nun der Begriff des „Bildes der Quelle" eingeführt, d. h. es wird eine neue Quelle der Bewegung innerhalb der Kugel angenommen von der Beschaffenheit, dass die von dieser ausserhalb der Kugel hervorgebrachte Bewegung zusammen mit der von der ursprünglichen Quelle herrührenden Bewegung an der Kugelfläche selbst keine Componente senkrecht zur Kugelfläche giebt. Mit andern Worten, es wird eine positive oder negative Quelle von gewisser Grösse bestimmt, die an der Kugeloberfläche eine normale Bewegung der Flüssigkeit hervorbringt gleich und entgegengesetzt der von der äusseren Quelle herrührenden normalen Bewegung. Ist dies „Bild" gefunden, so ist auch der Weg zur Ermittelung des Geschwindigkeitspotentials für den Fall, dass zwei feste Kugeln sich in der Flüssigkeit befinden, gegeben. Denkt man sich dann noch über die Oberflächen beider Kugeln Quellen vertheilt, die proportional sind der normalen Bewegung der Oberfläche in dem betrachteten Punkte, so kann man auch das Geschwindigkeitspotential bestimmen, wenn die Kugeln sich irgend wie bewegen. Die nöthigen analytischen Entwickelungen ergeben sich vollständig aus der Methode der Bilder. Cly. (Wn.)

W. M. Hicks. On the problem of two pulsating spheres in a fluid. Proc. of Cambr. IV. 29-36.

In einer früheren Arbeit (Proc. of Cambr. III., cfr. F. d. M. XI. 1879. p. 677) hatte der Verfasser gezeigt, wie sich die zwischen zwei pulsirenden Kugeln wirksame Kraft mit Hülfe der Spiegelung bestimmen lasse, dabei war fälschlich der Term, der von dem Quadrate der Geschwindigkeit abhängt, als ohne jeden Einfluss auf die resultirende Kraft angesehen. Das ist jedoch nur

richtig, wenn man höhere Potenzen der reciproken Entfernung als die zweite vernachlässigt. Im Allgemeinen jedoch ist diese Vernachlässigung nicht gestattet. In dem vorliegenden Aufsatze wird nun gezeigt, wie man die fehlenden Glieder finden kann.

Glr. (Wn.)

A. G. Greenhill. On the general motion of a liquid ellipsoid under the gravitation of its own parts. Proc. of Cambr. IV. 4-14.

Fortsetzung einer früheren Arbeit (siehe F. d. M. XI. 1879. p. 678). Für die Lösung des im Titel genannten Problems wird eine neue Methode angegeben, die auf Einführung eines gewissen Systems beweglicher Axen beruht. Glr. (Wn.)

W. M. Hicks. On the condition of steady motion of two cylinders in a fluid. Quart. J. XVII. 194-203.

Fortsetzung der Arbeit, über die F. d. M. X. 1878. p. 646, XI. 1879. p. 676 referirt ist. Hier wird vorzugsweise der Fall der Bewegung zweier Cylinder mit gleichem Radius betrachtet. Im Allgemeinen können dieselben keine stationäre Bewegung besitzen, sondern üben auf einander eine scheinbare Anziehungskraft aus, deren Grösse genau discutirt wird. Wn.

A. G. Greenhill. On the steady motion of a top and of a solid of revolution moving in infinite liquid, an elementary demonstration. Quart. J. XVII. 86-89.

Unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Rotation lässt sich bei einem Kreisel die zwischen der Rotationsgeschwindigkeit und der constanten Neigung der Axe bestehende Gleichung auf elementare Weise durch Zusammensetzen der auf den Kreisel wirkenden Kräftepaare bestimmen. Dieselben Betrachtungen lassen sich anwenden auf einen in einer unbegrenzten Flüssigkeit fortbewegten Rotationskörper, der gleichzeitig um seine Axe rotirt.

Wn.

N. M. Ferrers. On the motion of water contained in certain cylindrical vessels; and on certain analytical theorems connected with the problem. Quart. J. XVII. 227-244.

Der Verfasser bestimmt die Strömungsfunction einer Wassermasse, die in einem mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotirenden Cylinder enthalten ist, falls der Querschnitt 1) von Bogen confocaler Ellipsen und Hyperbeln, 2) von Bogen confocaler Parabeln begrenzt ist. Die Strömungsfunction φ ist bekanntlich dadurch bestimmt, dass sie der Gleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

genügt und an den Grenzen

$$\psi=\frac{1}{2}\Omega(x^2+y^2)$$

wird, wenn Ω die Rotationsgeschwindigkeit ist. Die Gleichungen werden nun im vorliegenden Falle auf elliptische Coordinaten transformirt und die resultirenden Gleichungen auf bekannte Weise durch Reihen integrirt, deren Constanten aus den Randbedingungen leicht zu bestimmen sind. Aus dem allgemeinen Resultat lassen sich auch die bekannten Fälle ableiten, in denen der Querschnitt von einem Kreisbogen und zwei Radien begrenzt wird oder ein Rechteck ist. Ganz analog wie beim elliptischen ist die Behandlung des Problems bei dem parabolischen Cylinder. Zum Schluss wird gezeigt, wie sich die beiden unendlichen Reihen, als deren Summe sich ψ ergiebt, auf eine einzige reduciren lassen. Wn.

J. J. Adair. To find the velocity potential for a liquid contained between a fixed ellipsoid and a moving confocal ellipsoid within the former. Herm. 1880.

Csy.

W. Thomson. On vortex statics. Phil. Mag. 1880.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der stationären Bewegung von Wirbelfäden. Csy. (Wn.)

W. Thomson. Vibrations of a columnar vortex. Phil. Mag. 1880., Proc. of Edinb. X. 443-456.

Das hier behandelte Problem betrifft den Fall der Bewegung einer Flüssigkeit, in dem die Strömungslinien nahezu kreisförmig sind, während die Mittelpunkte der Kreise in einer Geraden (der Axe des Wirbels) liegen, die Geschwindigkeiten ferner nahezu von der Zeit unabhängig und in gleichen Entfernungen von der Axe sehr nahe gleich sind. Csy. (Wn.)

M. Margules. Ueber diskrete Wirbelfäden. Wien. Anz. 1880. 66-67.

M. Margules. Notiz über die Rotation einer Flüssigkeit in einem rechtwinkligen vierseitigen Prisma. Wien. Anz. 1880. 195-196.

Der Verfasser erhebt Einwände gegen die bisherige Behandlung gewisser Aufgaben aus der Theorie der Wirbelbewegungen, speciell gegen die Arbeit von Greenhill über die Bewegung einer Flüssigkeit in einem rechteckigen Prisma (F. d. M. IX. 1877. p. 671). Die Einwände beziehen sich darauf, dass man nicht von der Bewegung innerhalb der Wirbelfäden absehen könne, dass ferner an gewissen Flächen im Innern der Druck sich discontinuirlich ändere. Ueber die Begründung ist aus dem hier vorliegenden kurzen Auszuge nichts zu ersehen. Wn.

L. Graetz. Ueber Wirbelbewegungen in compressiblen Flüssigkeiten. Schlömilch Z. XXV. 1-11.

Aus den bekannten Differentialgleichungen für compressible nicht reibende Flüssigkeiten ergiebt sich, dass, wenn man darin die üblichen vereinfachenden Voraussetzungen einführt, wonach die Quadrate der Geschwindigkeiten und der Dichtigkeitsänderungen vernachlässigt werden, die Drehungsgeschwindigkeiten ξ, η, ζ von der Zeit unabhängig werden; d. h. dass dann die Wirbelbewegung an jedem Orte mit der Zeit unveränderlich sein muss. Ferner werden die Verdichtungen von den Wirbelbewe-

gungen nicht beeinflusst. Weiter zeigt der Verfasser, dass (immer unter den oben genannten Voraussetzungen) die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w vollkommen bestimmt sind, wenn gegeben sind 1) $\dot{\xi}, \eta, \zeta$ für alle Punkte, 2) $u, v, w, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ für $t = 0$ als Functionen des Ortes, 3) $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}, \frac{\partial w}{\partial n}$ für alle Elemente der Grenzfläche als Functionen von t. Die betreffenden Ausdrücke für u, v, w werden mit Hülfe des Green'schen Satzes aufgestellt und auf den Fall angewandt, dass eine einzelne Trombe parallel der z-Axe vorhanden ist. Auf die in der Trombenaxe liegenden Theilchen hat die Wirbelbewegung gar keinen Einfluss; alle ausserhalb der Axe liegenden Theilchen haben neben der Eigenbewegung eine kreisende Bewegung um die Axe. Ueber die Druckverminderung in der Axe der Trombe giebt die vorliegende Analyse keinen Aufschluss. Wn.

G. Kirchhoff. Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit. Pogg. Ann. (2) X. 34-46.

G. Kirchhoff und G. Hansemann. Versuche über stehende Schwingungen des Wassers. Pogg. Ann. (2) X. 337-378.

Ueber die erste der oben genannten Arbeiten ist schon im vorigen Jahre ausführlich referirt (cfr. F. d. M. XI. 1879. p. 681). Es wurde darin die Theorie der stehenden Schwingungen entwickelt, die eine schwere Flüssigkeit in einem prismatischen Gefässe ausführen kann, dessen verticaler Querschnitt aus zwei geraden Linien besteht, die mit einander einen rechten Winkel bilden und gleich geneigt gegen die Verticale sind.

In der zweiten Arbeit werden einige der dort abgeleiteten Resultate, namentlich die dort berechnete Schwingungsdauer, durch Messungen geprüft. Eine unmittelbare Vergleichung der Beobachtungen mit der Theorie war deshalb nicht möglich, weil die Schwingungen der Wassermasse nur dadurch erzeugt werden konnten, dass das Gefäss selbst in Schwingungen versetzt wurde.

Da diese Bewegung des Gefässes, sowie die Reibung der Flüssig keit theoretisch nicht berücksichtigt werden kann, so haben di Verfasser die Wassermasse ersetzt gedacht durch ein Pende auf welches eine dämpfende Kraft wirkt, das trotzdem aber i periodischer Bewegung dadurch erhalten wird, dass seine Ax von einem zweiten Pendel mit paralleler Axe getragen wir dessen Schwingungen durch geeignete Kräfte gleichmässig e halten werden. Für die Schwingungen u eines solchen beweg lichen Pendels ergiebt sich durch einfache Betrachtungen ei Differentialgleichung von der Form

$$\alpha^2 \frac{d^2u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + u = N \frac{d^2v}{dt^2},$$

wo v die Schwingung des Pendels mit fester Axe ist. Es sei nu

$$v = B\cos(nt),$$

und u sei ebenfalls periodisch,

$$u = A'\cos(nt) + A''\sin(nt);$$

dann ergiebt sich eine Gleichung zwischen dem Verhältnis de Amplituden beider Pendel und der Schwingungsdauer. Sind di in dieser Gleichung vorkommenden Constanten aus Beobachtunge bestimmt, so kann man aus ihnen die Schwingungsdauer finde die das erste Pendel haben würde, wenn es keiner dämpfende Kraft unterworfen und seine Axe fest wäre. Wn.

A. R. Forsyth. On the motion of a viscous incom pressible fluid. Messenger (2) IX. 134-139.

Helmholtz hat gezeigt, dass die kinetische Energie ein bewegten Flüssigkeitsmasse, die ganz von festen Wänden ei geschlossen ist, constant ist. Dabei liegt die Voraussetzung z Grunde, dass die in Rede stehende Flüssigkeit eine vollkomme Flüssigkeit ist. Für reibende Flüssigkeiten ist es a priori wah scheinlich, dass das obige Theorem nicht mehr richtig ist. Eine strengen Beweis für letztere Behauptung liefert der Verfasse indem er für die Aenderung der kinetischen Energie einen Au druck aufstellt, der direct von dem Reibungscoefficienten abhäng

Glr. (Wn.)

BRESSE. Fonctions des vitesses, extension des théorèmes de Lagrange au cas d'un fluide imparfait. C. R. XC. 501-504.

J. BOUSSINESQ. Sur la manière dont les frottements entrent en jeu dans un fluide qui sort de l'état de repos, et sur leur effet pour empêcher l'existence d'une fonction des vitesses. C. R. XC. 736-739.

BRESSE. Réponse à une note de M. J. Boussinesq. C. R. XC. 857-858.

J. BOUSSINESQ. Quelques considérations à l'appui d'une note du 29 mars, sur l'impossibilité d'admettre, en général, une fonction des vitesses dans toute question d'hydraulique où les frottements ont une rôle notable. C. R. XC. 967-969.

Für vollkommene Flüssigkeiten hat bekanntlich Lagrange zuerst gezeigt, dass, wenn die Bewegung eine derartige ist, dass zu irgend einer Zeit ein Geschwindigkeitspotential existirt, ein solches auch für jeden folgenden Zeitmoment vorhanden ist. Diesen Satz sucht Herr Bresse auch für den Fall abzuleiten, dass die innere Reibung der Flüssigkeit berücksichtigt wird. Herr Boussinesq bemerkt dem gegenüber, dass dieser Beweis schon von Herrn St.-Venant gegeben sei (C. R. LXVIII.), der aber zugleich bemerkt hat, dass der Beweis nicht stichhaltig sei, wenn noch eine äussere Reibung an einer festen Wand dazu kommt; wenigstens für Punkte in der Nähe der Wand gelte er nicht mehr. Weiter zeigt Herr Boussinesq an einem Specialfall, dass bei Vorhandensein einer Reibung an einer festen Wand nicht blos für Punkte in der Nähe der Wand, sondern für alle Punkte der Flüssigkeit der obige Satz nicht mehr gilt. In seiner Erwiderung erkennt Herr Bresse die Priorität von St.-Venant an und giebt zu, dass dadurch seine Arbeit alles Interesse verliere. Er beruft sich ferner darauf, dass er die Möglichkeit von Ausnahmefällen, für die der Satz nicht gelte, ausdrücklich in seiner Notiz zugegeben habe; aus einem Specialfall aber könne man

keine allgemeinen Schlüsse ziehen. Demgegenüber hält Herr Boussinesq daran fest, es liege in dem erwähnten Specialfall nicht ein Ausnahmefall vor, sondern dieselben Erwägungen griffen bei jedem Ausflussproblem einer Flüssigkeit Platz, so dass der Satz in keinem Falle der praktischen Hydraulik gelte. Der Grund liege darin, dass, wenn man die Grösse $\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}$ (v und w die Geschwindigkeitscomponenten resp. parallel y und z) nach dem Mac-Laurin'schen Satze nach Potenzen der Zeit t entwickele, die Coefficienten aller Glieder gleich Null würden, so dass nur das Restglied übrig bliebe; und aus diesem könne man die nöthigen Schlüsse nicht ziehen. Wn.

Th. Craig. On steady motion in an incompressible viscous fluid. Phil. Mag. 1880.

Die Arbeit enthält die Theorie der stationären Bewegung einer gewöhnlichen reibenden Flüssigkeit. Ausserdem werden die Resultate einer allgemeinen Untersuchung mitgetheilt, die den Fall betreffen, wo ein fester Körper von gegebener Form in die Flüssigkeit getaucht ist, während letztere selbst der Bedingung unterworfen ist, dass ihre Bewegung im Unendlichen der z-Axe parallel ist. Die zu Grunde liegenden Gleichungen sind die bekannten. Csy. (Wn.)

Th. Craig. On certain possible cases of steady motion in a viscous fluid. Am. J. III. 269-293.

Es wird zunächst die stationäre Bewegung einer reibenden incompressiblen Flüssigkeit untersucht für den Fall, dass die Grösse

$$\Delta^2 u\,.\,dx+\Delta^2 v\,.\,dy+\Delta^2 w\,.\,dz$$

ein exactes Differential ist. Aus den hydrodynamischen Gleichungen ergiebt sich dann, dass in diesem Falle in der Flüssigkeit eine Schaar von Flächen $\theta=$ Const. existirt, deren jede

mit einem Netz von Strömungslinien und Wirbellinien bedeckt ist. Ist q' die Strömungsgeschwindigkeit, Ω die resultirende Winkelgeschwindigkeit, δ der Winkel zwischen einer Strömungs- und einer Wirbellinie, dn die Normale zwischen zwei auf einanderfolgenden Flächen der Schaar θ, so ist das Product

$$q'\Omega \sin\delta . dn$$

für jede Fläche der Schaar constant.

Nachdem der Verfasser sodann allgemeine Ausdrücke für u, v, w aufgestellt, die die obige Bedingung erfüllen, wendet er dieselben an auf die Bewegung einer Kugel, die sich in der reibenden Flüssigkeit mit constanter Geschwindigkeit längs der x-Axe bewegt, sowie auf die Bewegung eines dreiaxigen Ellipsoids unter denselben Bedingungen. Das Resultat für die Kugel ist bekannt (vergl. Kirchhoff's Mechanik), das Resultat für das Ellipsoid ist eine einfache Erweiterung desjenigen für die Kugel. Für das Ellipsoid werden die Werthe der Geschwindigkeitscomponenten:

$$u = \lambda - 2\alpha\psi + \alpha\frac{\partial(x\psi)}{\partial x} + \frac{\beta}{(4\pi - A_1)}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

$$v = \alpha\frac{\partial(x\psi)}{\partial y} + \frac{\beta}{(4\pi - A_1)}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y},$$

$$w = \alpha\frac{\partial(x\psi)}{\partial z} + \frac{\beta}{(4\pi - A_1)}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}.$$

Darin ist V das Potential eines homogenen dreiaxigen Ellipsoids in Bezug auf einen äusseren Punkt, ψ das Potential einer ellipsoidischen Schale, deren Dichtigkeit proportional dem Abstande zweier unendlich nahen ähnlichen Ellipsoide ist, während die übrigen in den Formeln vorkommenden Grössen gewisse Constanten sind. Zum Schluss wird der Druck berechnet, den die Flüssigkeit auf das Ellipsoid ausübt. Wn.

H. Stearn. On some cases of the varying motion of a viscous fluid. Quart. J. XVII. 90-104.

Die hydrodynamischen Gleichungen einer reibenden incompressiblen Flüssigkeit lassen sich, falls u, v, w die Geschwindig-

keitscomponenten, ξ, η, ζ die Drehungsgeschwindigkeiten sind, auf die Form bringen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial x} + \zeta\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\mu}{\varrho}\Delta^2\xi,$$

wozu noch zwei andre analoge Gleichungen kommen. Diese Form der Gleichungen ist zwar im Allgemeinen ebenso complicirt, wie die gewöhnliche Form; in speciellen Fällen ergeben sich jedoch bemerkenswerthe Vereinfachungen. Ein solcher Fall liegt vor, wenn sich die Flüssigkeit in concentrischen Kreisen um die z-Axe bewegt. Die Gleichungen reduciren sich dann auf die eine

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right),$$

die übereinstimmt mit der Gleichung der Wärmebewegung in einem Cylinder. Der Verfasser behandelt diese Gleichung nun genau so, wie man analoge Probleme der Wärmetheorie behandelt, indem er das allgemeine Integral in Form einer nach Bessel'schen Functionen fortschreitenden Reihe darstellt und die Constanten für verschiedene Grenzbedingungen bestimmt. Die Grenzbedingungen bestehen darin, dass die Flüssigkeit durch einen festen oder durch einen rotirenden Cylinder begrenzt wird, an dessen Wand keine Bewegung vorhanden ist, dass ferner die Flüssigkeit unbegrenzt ist und im Anfang ein Theil derselben innerhalb eines Cylinders von gegebenem Radius rotirt. Ein zweiter Fall, der eine analoge Behandlung zulässt, ist der, dass alle Theile der Flüssigkeit sich in derselben Richtung bewegen. Zum Schluss wird nach derselben Methode die Bewegung einer Flüssigkeit durch eine Röhre mit kreisförmigem Querschnitt behandelt unter der Voraussetzung, dass die Bewegung zur Axe symmetrisch ist. Wn.

L. Graetz. Ueber die Bewegung von Flüssigkeiten in Röhren. Schlömilch Z. XXV. 316-334, 375-404.

Der Verfasser wendet die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen für reibende Flüssigkeiten auf die Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit durch eine Röhre an unter der Voraussetzung, dass die Röhre vertical ist und von äusseren Kräften nur die Schwerkraft wirkt, oder dass, falls die Röhre nicht vertical, der Querschnitt so klein ist, dass man die Schwerkraft vernachlässigen kann. In beiden Fällen kann man die zur Röhrenaxe x senkrechten Geschwindigkeitscomponenten v, w gleich Null setzen. Die Continuitätsgleichung ergiebt ferner, dass die der Axe parallele Componente u nur von den Querdimensionen y, z abhängt. Fügt man die weitere Annahme hinzu, dass die Bewegung stationär ist, so reduciren sich die hydrodynamischen Gleichungen auf die eine

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2a=0,$$

wo

$$a=\frac{\mu g l-P}{2kl}$$

ist. Darin bedeuten l die Röhrenlänge, P die Druckdifferenz an beiden Röhrenenden, μ die Dichtigkeit, k den Reibungscoefficienten der Flüssigkeit. Dazu kommt die Grenzbedingung

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(nz)=\frac{\lambda}{k}u,$$

worin λ der Coefficient der äusseren Reibung an der Röhrenwand ist. Die obigen Gleichungen, die sich übrigens durch die Substitution

$$(3)\qquad u=-\frac{a}{2}(y^2+z^2)+\varphi$$

für manche Fälle vereinfachen lassen, werden nun in doppelter Weise auf specielle Probleme angewandt. Zunächst wird eine bestimmte Querschnittsform als gegeben angenommen und diejenige Lösung der Differentialgleichung 1) gesucht, welche an der gegebenen Grenze der Bedingung 2) Genüge leistet. In dieser Weise wird das Problem für den Kreis, die Ellipse und das Rechteck behandelt. Für den Kreis und die Ellipse ist das

Problem, wie der Verfasser auch angiebt, schon früher behandelt. Hier ist die Lösung von algebraischer Form. Bei der Ellipse gelingt übrigens die Integration nur unter der weiteren praktisch allerdings wichtigsten Annahme, dass der Coefficient λ der äusseren Reibung unendlich gross oder unendlich klein sei. Für Röhren mit rechteckigem Querschnitt ergiebt sich die Lösung in Form einer unendlichen Reihe, die nach Cosinus der ungraden Vielfachen von z und zugleich nach hyperbolischen Cosinus derselben Vielfachen von y (oder umgekehrt) fortschreitet. Die Bestimmung der Coefficienten der Reihe gelingt auch hier nur für $\lambda = \infty$, nicht für beliebige λ. Nachdem die Lösung für rechteckige Querschnitte noch auf die speciellen Fälle angewandt ist, wo der Querschnitt ein Quadrat oder ein sehr lang gestrecktes Rechteck ist, werden die obigen Gleichungen noch nach einer zweiten Methode behandelt, die darin besteht, Ausdrücke aufzustellen, die der Differentialgleichung 1) genügen, und hinterher diejenigen Querschnitte zu ermitteln, für welche die Lösung gilt; dabei wird wieder $\lambda = \infty$ genommen. Diese Aufgabe hat grosse Aehnlichkeit mit dem Problem der Torsion fester Prismen, wie es von St.-Venant behandelt ist (Mém. d. sav. étr. XIV., 1856), und der Verfasser beschränkt sich auch darauf, für dieselben Fälle das hydrodynamische Problem durchzuführen, in denen St.-Venant das entsprechende elastische durchgeführt hat. Setzt man

$$\varphi = \alpha(y^3 - 3yz^2) + \gamma,$$

so genügt der Ausdruck 3) für u der Gleichung 1). Die Bedingung 2) reducirt sich für $\lambda = \infty$ auf $u = 0$. Die Curve dritten Grades, für welche die Bedingung $u = 0$ erfüllt ist, zerfällt nun bei zweckmässiger Wahl der Constanten α, γ in drei gerade Linien; und man hat so die Lösung des Problems für ein gleichseitiges Dreieck als Querschnitt. Wählt man für φ eine gewisse Function vierten Grades, so erhält man ein krummliniges Viereck, das je nach der Wahl der Constanten concave oder convexe Seiten, abgerundete Ecken oder spitze Winkel hat. Eine Function achten Grades für φ führt endlich auf Röhren, deren Querschnitt ein Stern mit vier Ecken ist.

In allen genannten Fällen wird das Ausflussproblem vollständig durchgeführt, die Vertheilung der Geschwindigkeit, die Ausflussmenge etc. discutirt. Von Interesse sind die Resultate, die sich hinsichtlich der Wirbelbewegung ergeben. Die Theilchen in der Axe der Röhre haben in allen Fällen keine rotirende Bewegung. Wenn die Röhre scharfe Kanten besitzt, so ist an diesen Kanten die Wirbelbewegung Null, bei abgerundeten Ecken dagegen von Null verschieden. Bei denjenigen Röhren, deren Querschnitt convex oder geradlinig begrenzt ist, hat die Wirbelbewegung ihr Maximum an der Stelle des Randes, welche der Axe am nächsten liegt, z. B. bei der Ellipse am Endpunkt der kleinen Axe, beim Rechteck in der Mitte der grössten Seite etc. Bei den Röhren mit convexem Querschnitt dagegen liegt das Maximum der Wirbelbewegung nicht am Rande, sondern innerhalb der Röhre. Wn.

J. Finger. Ueber den Einfluss der Rotation des Erdsphäroids auf terrestrische Bewegungen, insbesondere auf Meeres- und Windströmungen. Theil II. Wien. Ber. LXXXI.

In dem ersten 1877 veröffentlichten Theile seiner Arbeit hatte der Verfasser den Einfluss der Erddrehung auf solche Bewegungen untersucht, die parallel der Erdoberfläche vor sich gehen. In dem vorliegenden Aufsatze wird die Untersuchung ausgedehnt auf nicht horizontale, also auf- und absteigende Bewegungen, die nahe der Erdoberfläche stattfinden. Dabei wird die Abplattung der Erde berücksichtigt, von der Präcession der Nachtgleichen jedoch abgesehen, so dass man auch von der jährlichen Bewegung der Erde als einer blossen Translationsbewegung abstrahiren, also den Mittelpunkt der Erde als fest annehmen kann, während die Erde um ihre Axe mit constanter Winkelgeschwindigkeit rotirt. Der Gang der Rechnung, die zu Resultaten führt, welche von den bisher aufgestellten Näherungsformeln nicht unerheblich abweichen, ist folgender: Irgend ein Punkt in der Nähe der Erdoberfläche besitze eine gegebene Geschwindigkeit

und Beschleunigung. Diese werden mit der von der Rotatio herrührenden Geschwindigkeit, resp. Beschleunigung zusammen gesetzt zunächst für ein im Raume festes Coordinatensystem woraus sich dann leicht die Componenten für ein in der roti renden Erde festes System ergeben. Von diesem wird schliesslich zu einem dritten System übergegangen, dessen Anfangspunkt de betrachtete Punkt ist, während eine Axe vertical nach unten ge richtet ist, die zweite die Richtung der relativen horizontalen Geschwindigkeitscomponente hat, die dritte Axe horizontal und zur vorigen senkrecht ist. Die auf diese Axen, welche resp. mit h, s und σ bezeichnet werden, bezogenen Componenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung werden aufgestellt und umgeformt; und schliesslich werden die hydrodynamischen Gleichungen auf dieselben Axen bezogen, wodurch dieselben folgende Gestalt annehmen:

$$\frac{\partial P}{\partial h} = \varrho\left\{-g - \frac{d^2h}{dt^2} - 2\omega u\cos\varphi\sin\theta + u^2\alpha\right\} + \frac{W\frac{dh}{dt}}{\sqrt{u^2+\left(\frac{dh}{dt}\right)^2}},$$

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \varrho\left\{-\frac{du}{dt} + 2\omega\frac{dh}{dt}\cos\varphi\sin\theta - u\frac{dh}{dt}\alpha\right\} + \frac{Wu}{\sqrt{u^2+\left(\frac{dh}{dt}\right)^2}},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = \varrho\left\{-2\omega u\sin\varphi + 2\omega\frac{dh}{dt}\cos\varphi\cos\theta - u^2\beta\right\}.$$

Hierin ist P der in dem betrachteten Punkte herrschende Druck, ϱ die dort stattfindende Dichtigkeit, h die Höhe des Punktes über der Erdoberfläche, φ dessen Polhöhe, vom Südpol aus gerechnet, θ das Azimuth der relativen Bewegung, u der absolute Werth der relativen horizontalen Geschwindigkeitscomponente, W der Reibungswiderstand, ω die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, g die Constante der Schwerkraft. α ist die Krümmung des durch die augenblickliche Bewegungsrichtung hindurchgehenden Normalschnitts derjenigen Fläche, die durch den betrachteten Punkt parallel der Erdoberfläche gelegt ist, β die Krümmung der augenblicklichen Horizontalprojection der relativen Bahn des betrachteten Punktes.

Von den obigen Gleichungen wird zunächst die dritte ange-
andt zur Berechnung der Aenderung des Luftdrucks in der
ichtung σ. Indem P und ϱ mittels des Barometerstandes aus-
edrückt werden, ergiebt sich leicht der barometrische Gradient
l. h. die in Millimetern ausgedrückte Zunahme des Barometer-
tandes, die bei dem mittleren Barometerstande von 760^{mm} er-
olgen würde) in der zur relativen Luftströmung senkrechten Ho-
izontalrichtung. Die einzelnen Theile dieses Ausdrucks, der
on dem Luftwiderstand W unabhängig ist, werden ausführlich,
um Theil mit Hülfe numerischer Rechnung discutirt. Von den Re-
ultaten erwähnen wir das Folgende, das für eine rein horizontale
Bewegung gültig ist: Der Barometerstand nimmt rechts von der
Strömungsrichtung auf der nördlichen Halbkugel zu, auf der süd-
lichen ab; die Aenderung des Barometerstandes ist bei Ostwinden
am grössten, bei Westwinden am kleinsten; wenn die Luft-
strömung parallel einer geodätischen Linie der Erdoberfläche er-
folgt, ist der Gradient vom Azimuth unabhängig. Auf ähnliche
Weise lassen sich die Druckänderungen für Meeresströmungen
untersuchen.

Zum Schluss wird die erste der obigen Formeln angewandt
zur Discussion der atmosphärischen Druckverhältnisse, die in
einer Verticalen herrschen. Die hier erhaltenen Resultate lassen
sich jedoch nicht in Kürze mittheilen. Wn.

C. M. Guldberg et H. Mohn. Étude sur les mouvements de l'atmosphère. II. Christiania.

Die Verfasser stellen die allgemeinen hydrodynamischen
Gleichungen dar, indem sie darin die zusammengesetzte Centri-
fugalkraft einführen, welche durch die Rotation der Erde und die
Componenten der Reibung hervorgerufen wird. Es ist evident,
dass eine innere Reibung bei Luftströmungen stattfindet, und
dass dieselbe ihr Maximum an der Oberfläche der Erde hat.
Was die horizontalen Luftströmungen betrifft, so wächst die Ge-
schwindigkeit des Windes mit der Höhe bis zu einem Maximum,
und gleichzeitig verringert sich der Winkel zwischen dem Wind

und der Isobare. Die Verfasser haben die mathematischen Formeln nicht entwickelt, weil die nöthigen Beobachtungen zur Verification fehlen. Sie haben aber, wie in der ersten Arbeit, die Reibung als eine Kraft eingeführt, welche längs der Oberfläche der Erde und entgegengesetzt der Richtung des Windes wirkt.

Betrachtet man einen Cyklon, d. h. ein Windsystem auf den kreisförmigen Isobaren um ein barometrisches Minimum an der Oberfläche der Erde, so ist in den oberen Schichten ein barometrisches Maximum. Die Luft wird längs der Oberfläche der Erde von allen Seiten zugeblasen und die horizontalen Ströme verwandeln sich allmälig in aufsteigende Ströme. In einer gewissen Höhe verwandelt sich die vertikale Bewegung in eine horizontale, und die Luft geht von einem barometrischen Maximum zu den oberen Schichten. Es ist noch nicht gelungen, ein solches Windsystem durch mathematische Formeln darzustellen. Man kann aber durch Theilung des Systems in verschiedene Theile Gleichungen aufstellen, welche Analogie mit einem System dieser Art zeigen.

Als Beispiele haben die Verfasser Systeme mit geradlinigen Bahnen gewählt, die nach einem festen Centrum oder einer horizontalen Geraden gerichtet sind, und ein System mit hyperbolischer Bahn. Die Windsysteme sind in permanente und variable Systeme getheilt. Durch Anwendung der allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen auf einen horizontalen Strom oder nach einem bewegten barometrischen Minimum haben die Verfasser die Wirkung der Bewegung des Centrums des Cyklons auf die Isobare und die Bahnen des Windes gefunden. L. (O.)

G. Recknagel. Ueber Luftwiderstand. Pogg. Ann. (2) X. 677-694.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung des Luftdruckes, welchen ein Körper bei bestimmter relativer Windgeschwindigkeit an einer bestimmten Stelle seiner Oberfläche erfährt. Weiter wird dann der Luftwiderstand behandelt, den Rotationsflächen, die gegen Luft eine constante relative Ge-

schwindigkeit in der Richtung ihrer Rotationen besitzen, gegen ihren Scheitel erfahren. Die Arbeit ist wesentlich experimentell. Die mathematischen Rechnungen sind daher nur Mittel zum Zweck und bieten nichts mathematisch Neues. O.

W. Thomson. On gravitational oscillations of rotating water. Phil. Mag. 1880.

Der Verfasser geht von derselben vereinfachenden Voraussetzung aus, wie Laplace in seiner dynamischen Theorie der Ebbe und Fluth, von der nämlich, dass die Bewegung jedes einzelnen Wassertheilchens nahezu horizontal ist. Während jedoch Laplace weiter annimmt, dass das Wasser die ganze Oberfläche des Sphäroids, oder wenigstens einen grossen Theil desselben bedecke, wird hier zur Vereinfachung des Problems nur eine Wassermasse von so geringer Ausdehnung betrachtet, dass die Krümmung ihrer Oberfläche im Gleichgewichtszustande nicht merklich ist. Csy. (Wn.)

Rayleigh. On the stability or instability of certain fluid motions. Proc. L. M. S. X. 57-70.

Fortsetzung einer Arbeit, über die im vorigen Jahre berichtet ist (cf. F. d. M. XI. 1879. 685-687). Die dort im zweiten Theile abgeleiteten Resultate entsprechen der Erfahrung nicht und können ihr nicht entsprechen, weil die Voraussetzung, dass bei discontinuirlicher Flüssigkeitsbewegung eine Trennungsfläche längere Zeit hindurch nur eine geringere Aenderung erfährt, nicht zutreffend ist. Vielmehr wird wegen der Reibung der Flüssigkeit eine solche Trennungsfläche sehr bald völlig verschwinden und an Stelle der discontinuirlichen Geschwindigkeitsänderung eine allmälige treten. Da die Berücksichtigung der Reibung andererseits zu grosse Schwierigkeiten bietet, so hat sich der Verfasser darauf beschränkt, den Charakter des Gleichgewichts für continuirliche Bewegungen in reibungslosen Flüssigkeiten für einige specielle Fällen zu untersuchen. Dabei beschränkt er sich auf

die Annahme, dass das Problem nur von zwei Dimensionen abhängt, und dass von den beiden Geschwindigkeitscomponenten u, v die letztere gleich Null, die erstere nur eine Function von y ist. Der erste der behandelten Fälle ist folgender: In der Flüssigkeit befindet sich eine Schicht (ein Strahl) von der Dicke b (parallel y), so dass auf der einen Seite der Schicht überall die constante Geschwindigkeit $+V$, auf der andern die constante Geschwindigkeit $-V$ besteht, während innerhalb der Schicht die Geschwindigkeit sich gleichförmig ändert. Durch eine störende Kraft mögen nun die Grenzflächen der Schicht eine Verschiebung erfahren

$$\eta = He^{ikx}e^{int};$$

dann ergiebt sich durch Anwendung einer Helmholtz'schen Formel leicht die hierdurch in einem beliebigen Element der Flüssigkeit hervorgerufene Geschwindigkeitsänderung, und daraus folgt weiter folgende Gleichung zwischen den obigen Grössen

$$n^2 = \frac{V^2}{b^2}\{(kb-1)^2 - e^{-2kb}\}.$$

Je nachdem n^2 positiv oder negativ ist, ist die Bewegung stabil oder nicht; die absolute Grösse von n ist ein Mass der Stabilität, resp. Instabilität.

In gleicher Weise werden noch folgende Fälle behandelt. Ein Strahl von der Dicke $2b$ bewege sich in ruhendem Wasser derart, dass die Geschwindigkeit, die in der Mitte ein Maximum ist, nach beiden Seiten gleichförmig abnimmt. Ferner finde die Maximalgeschwindigkeit in einem Streifen von endlicher Dicke statt, (nicht blos, wie vorher, in einer Linie) und nehme von da beiderseits gleichmässig ab etc. Zum Schluss wird gezeigt, wie man derartige Probleme bei Berücksichtigung von nur zwei Dimensionen etwas allgemeiner behandeln kann. Die Methode lässt sich jedoch nicht in Kürze wiedergeben. Wn.

Anonym. Relazione intorno alle memorie presentate pel premio d'idronamica teorica. Atti d. Ist. Ven. (5) VI. 1185-119?.

Bericht über die eingelieferten Arbeiten zur Preisfrage: „Nach

Darstellung der neueren Untersuchungen der theoretischen Hydrodynamik sollen die Fortschritte auf diesem Gebiete dargelegt werden.“ Ausführliche Inhaltsangabe derjenigen drei Arbeiten, welche zur Krönung mit dem Preise vorgeschlagen wurden.

Bn.

C. Razzaboni. Sul moto dell' acqua per alvei a fondo orizzontale. Mem. di Bologna (4) I. 677-689.

Verfasser entwickelt die Gleichung der Curve, welche die Oberfläche des fliessenden Wassers bestimmt, unter Zugrundelegung der verschiedenen von Prony und Eytelwein, Bazin, Humphreys, Kutter und Abbot gegebenen Formeln für den Widerstand. Die gegebenen Resultate sind nur angenäherte, indem höhere als die zweiten Potenzen der Höhendifferenzen vernachlässigt werden. Bemerkenswerth ist, dass sich diese Curve in allen Theilen concav gegen den Boden findet. In einem zweiten Theile werden dann noch wesentlich einfachere Formeln entwickelt, indem in der Differentialgleichung

$$g(i-F)\,dx = v dv$$

das Oberflächengefälle i plötzlich als Bodengefälle angesehen werden soll, und in Folge dessen, da der Boden als horizontal betrachtet wird, die Vereinfachung eintritt

$$-gF dx = v dv,$$

wonach also das Oberflächengefälle gar keinen Einfluss auf die Bewegung haben würde. Der zweite Theil bleibt in Folge dessen unverständlich.

Bn.

W. K. Kutter. Die neuesten Formeln für die Bewegung des Wassers. Z. d. Ing. XXIII. 137-139.

Bn.

D. Turazza. Delle formole più appropriate pel calcolo degli scoli delle basse pianure e del modo di valutarne la portata massima. Mem. Ist. Ven. XXI. 189-221.

Zweck der Arbeit ist die Untersuchung, in wie weit die für natürliche Wasserläufe aufgestellten Formeln auch für die künstlichen Entwässerungsgräben flacher Landstrecken gültig bleiben. Es werden dieser Untersuchung unterworfen die Formel von Ganguillet und Kutter:

$$v = \frac{23 + \frac{0,00155}{p} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{p}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}} \sqrt{Rp}$$

und die Bazin'sche Formel:

$$v = \sqrt{\frac{Rp}{\alpha + \frac{\beta}{R}}}.$$

Indem Verfasser aus zwei Beobachtungsreihen von Kutter (Linthkanal) und Bazin die Werthe der unbestimmten Coefficienten n, α, β ableitet, ergiebt sich ein mittlerer Werth derselben, welcher rückwärts wieder zur Berechnung der Geschwindigkeit benutzt wird. Die Abweichungen der berechneten und beobachteten Geschwindigkeiten betragen hierbei im Mittel $\pm 0,033$ resp. 0,032, im Maximo $\pm 0,076$ resp. 0,086 für die beiden Formeln.

Derselben Vergleichung werden dann noch andere Beobachtungen unterworfen.

Der zweite Theil der Arbeit beschäftigt sich mit der Menge des abzuführenden Wassers und dem hiernach zu wählenden Querschnitt der Abzugsgräben. Als zu beobachtende Constanten werden aufgestellt: die Dauer der stärksten Regen in Tagen, die Regenhöhe, die Ausdehnung der zu entwässernden Fläche, die Zeit, welche das Wasser braucht um vom entferntesten Theile der Fläche zum Hauptgraben zu gelangen. Bn.

G. Bucchia. Sulle proprietà meccaniche delle ruote a schiaffo disposte alla essiccazione artificiale dei terressi palustri. Atti d. Ist. Ven. (5) IV. 1373-1423.

Untersuchung über die Schaufelräder, welche zur Entwässerung sumpfiger Landstrecken dienen. Es wird die Höhe und

Breite der Schaufeln, ihre Schiefstellung, der Radius der Räder discutirt, ihre Nutzleistung, die Wasserverluste, die demgemäss zu wählende Umdrehungsgeschwindigkeit, die Form und Länge des Führungscanals; die gegebenen Formeln werden an einem Beispiele erläutert. Bn.

Capitel 5.

Potentialtheorie.

E. Picard. Sur l'équation aux dérivées partielles du potentiel. C. R. XC. 601-603.

Ein nichts wesentlich Neues bietender Beweis des Satzes, dass die Lösung der partiellen Differentialgleichung $\Delta V = 0$ sich auf eine Constante reducirt, wenn sie die bekannten Stetigkeitsbedingungen im ganzen Raume erfüllt. B.

A. Luke. Ableitung der Poisson'schen Differentialgleichung für die Potentialfunction für rechtwinklige, krummlinige Coordinaten, und zwar mit Hülfe des theorema quartum aus Gauss' Abhandlung „De attractione corporum sphäroidicorum homogeneorum.“ Pr. Marienburg.

Der wesentliche Inhalt der Arbeit ist zur Genüge durch den Titel angegeben. B.

C. Neumann. Neue Sätze über das logarithmische Potential. Clebsch Ann. XVI. 409-431.

C. Neumann. Neue Sätze über das Newton'sche Potential. Clebsch Ann. XVI. 432-438.

Die vorliegenden beiden Aufsätze enthalten nur Auszüge aus noch nicht veröffentlichten Untersuchungen. Sie geben nämlich

nur die Resultate dieser Untersuchungen an, nicht aber die zugehörigen Ableitungen und Beweise. Somit erscheint es angemessen, hier nur den leitenden Gedanken hervorzuheben.

Ist irgend eine geschlossene Fläche (z. B. eine Kugelfläche oder Ellipsoidfläche) gegeben, so mag das Potential einer auf dieser Fläche ausgebreiteten einfachen Belegung mit V oder $\mathfrak{V}$, andererseits aber das Potential einer auf der Fläche ausgebreiteten Doppelbelegung mit W oder $\mathfrak{W}$ bezeichnet werden. Gleichzeitig seien x, y, z die Coordinaten desjenigen variablen Punktes, in Bezug auf welchen diese Potentiale gebildet sind. Die sogenannte Theorie dieser Potentiale V und W besteht bekanntlich der Hauptsache nach in der Untersuchung derjenigen Stetigkeit resp. Unstetigkeit, welche V, W selber, ferner ihre ersten, zweiten und höheren Ableitungen nach x, y, z in unmittelbarer Nähe der gegebenen Fläche besitzen.

Während man nun bisher die Theorie von V und die von W jede einzeln zu behandeln gewohnt war, erwachsen, wie der Verfasser zeigt, wesentliche Vortheile für die Strenge und Einfachheit der Betrachtung dadurch, dass man diese beiden Theorien gleichzeitig behandelt, und die eine der andern dienstbar macht.

Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet, reducirt sich alsdann die Untersuchung der ersten, zweiten und höheren Ableitungen von V, W auf die Untersuchung von V, W selber. Denn es kann jede solche Ableitung von V oder W, d. h. jeder Ausdruck von der Form

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} V}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} W}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$$

im Allgemeinen in die Form $\mathfrak{V}+\mathfrak{W}$ gebracht werden, wo $\mathfrak{V}$ das Potential einer gewissen auf der gegebenen Fläche ausgebreiteten einfachen Belegung und $\mathfrak{W}$ das Potential einer gewissen daselbst ausgebreiteten Doppelbelegung vorstellt. So reducirt sich also die Untersuchung der Stetigkeit resp. Unstetigkeit der genannten Ableitungen auf die entsprechende Untersuchung dieser neuen Potentiale $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$.

Der Verfasser zeigt, wie man den analytischen Ausdruck

dieser neuen Potentiale $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ wirklich anzugeben im Stande ist, sobald man über die Beschaffenheit des ursprünglichen Potentiales V resp. W und über die Zahlen α, β, γ speciellere Voraussetzungen eintreten lässt.

Analoge Untersuchungen wie beim Newton'schen Potential im Raume werden beim logarithmischen Potential in der Ebene ausgeführt; wobei aufmerksam gemacht werden mag auf einige sich hier ergebenden Specialsätze. Einer derselben lautet:

Ist längs einer Kreisperipherie eine Doppelbelegung ausgebreitet, deren Moment längs der Peripherie stetig, oder auch nur abtheilungsweise stetig ist, so wird das Potential W dieser Doppelbelegung in allen Punkten der Peripherie constant sein.

Nimmt man statt des Kreises eine Ellipse, so erhält man unter gleichen Umständen ein Potential W, welches sammt all' seinen nach der Bogenlänge s genommenen Ableitungen

$$\frac{dW}{ds},\ \frac{d^2W}{ds^2},\ \frac{d^3W}{ds^3},\ \text{etc. etc.}$$

längs der Ellipse stetig ist.

Denkt man sich endlich die Doppelbelegung ausgebreitet auf einer beliebigen geschlossenen Curve, und setzt man wiederum voraus, dass das Moment derselben längs der Curve stetig oder auch nur abtheilungsweise stetig ist, so wird, falls

$$\vartheta \text{ und } \frac{d\vartheta}{ds} \text{ und } \frac{d^2\vartheta}{ds^2}$$

längs der Curve stetig sind, gleiches auch gelten von

$$W \text{ und } \frac{dW}{ds} \text{ und } \frac{d^2W}{ds^2}.$$

Dabei bezeichnet ϑ das Azimuth der Curventangente gegen eine feste Axe, während selbstverständlich W das Potential der in Rede stehenden Doppelbelegung vorstellen soll. Nn.

E. Beltrami. Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. C. Neumann sulle funzioni potenziali. Brioschi Ann. (2) X. 46-64.

Die Abhandlung beschäftigt sich mit der Herleitung der von Hrn. C. Neumann in Clebsch Ann. XVI., zum grössten Theile ohne Beweis, mitgetheilten Sätze, soweit sich letztere auf das Newton'sche Potential von einfachen oder Doppel-Schichten beziehen, jedoch ohne die l. c. festgehaltene Einschränkung auf geschlossene Flächen beizubehalten. Unter Verwendung von Transformationen, die der Verfasser zum Theil schon früher bei anderen Untersuchungen benutzt hat, werden zunächst die Ausdrücke für die in beliebiger Richtung genommenen ersten Ableitungen eines solchen Potentials aufgestellt, wobei die Hauptsache darin besteht, dass diese Ausdrücke sich zusammensetzen aus Potentialen von einfachen und Doppel-Schichten und aus Linienpotentialen resp. Ableitungen von solchen, die dem Rande der Fläche angehören und deshalb bei geschlossenen Flächen fortfallen. Hieran schliesst sich die Untersuchung der Unstetigkeiten, welche die betrachteten Potentiale sowie ihre successiven Ableitungen beim Hindurchgehen durch die Massenschicht erfahren. B.

Kirsten. Beitrag zu den Untersuchungen im Gebiete des logarithmischen Potentials. Pr. Meerane i. S.

Der grössere Theil der Abhandlung ist der Lösung folgender Aufgabe gewidmet: Ausserhalb einer gegebenen Ellipse ein Massensystem so zu bestimmen, dass längs der Ellipsenperipherie das logarithmische Potential desselben mit dem Potential eines innerhalb gelegenen Massenpunktes übereinstimmt. Nachdem die Aufgabe zunächst für den Kreis als Specialfall gelöst ist, wird sie für die Ellipse unter Benutzung der bekannten Substitution

$$x + iy = \cos(\xi + \eta i)$$

durch Reihenentwickelung erst für den Fall erledigt, dass die gesuchten Massen stetig längs der Peripherie einer confocalen Ellipse vertheilt sind. Die Spaltung in Partialbelegungen führt dann mittels eines Grenzübergangs zu einem System von Massenpunkten, welche längs der confocalen Hyperbel vertheilt sind, die durch den Innenpunkt geht. B.

J. Boussinesq. Sur la manière de présenter la théorie du potentiel dans l'hypothèse, géneralement admise, de la discontinuité de la matière. C. R. XC. 792-795.

J. Boussinesq. Sur la manière de présenter la théorie des potentiels d'attractions dans l'hypothèse, généralement admise, de la discontinuité de la matière. Liouville J. (3) VI. 89-99.

Der Verfasser monirt den Umstand, dass unter Voraussetzung einer atomistischen Constitution der Materie das Potential eines Körpers für Innenpunkte bei der gewöhnlichen Definition in Wirklichkeit nicht die ihm beigelegten Eigenschaften der Stetigkeit etc. besitze, und schlägt zu dem Ende eine Modification der Definition des Potentials vor, bei welcher jene Eigenschaften gewahrt bleiben sollen. B.

Husmann. Ueber äquipotentiale Massenvertheilungen. Grunert Arch. LXV. 19-57.

Die von dem Verfasser an einer Reihe einfacherer Fälle durchgeführten äquipotentiellen Massenvertheilungen werden dadurch erzeugt, dass die einzelnen Elemente einer gegebenen Vertheilung durch homogene Kugeln oder Kugelschalen ersetzt werden, deren Superposition jedesmal eine neue Massenvertheilung ergiebt. B.

J. Roberts. A useful theorem in the theory of attractions. Quart. J. XVII. 149-154.

Das Theorem, dessen Anwendung an einigen Beispielen erläutert wird, ist folgendes:

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2}+\frac{n-2}{z}\,\frac{\partial V_n}{\partial z}=0,$$

wo V_n das Potential einer Belegung der xy-Ebene ist und die Anziehung umgekehrt proportional der n^{ten} Potenz wirkt. Ebenso

wird in der xy-Ebene bei einer Belegung der x-Axe allein:

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + \frac{n-1}{y}\frac{\partial V_n}{\partial y} = 0.$$

B.

E. Beltrami. Sulla teoria dell' attrazione degli ellissoidi. Mem. di Bol. (4) I. 573-616.

Der weitaus grösste Theil der Abhandlung enthält die Herleitung von Sätzen und Formeln über die Potentiale von Massen, bei deren Begrenzung Ellipsoide auftreten — Resultate, die der Hauptsache nach bekannt oder aus bekannten ohne Schwierigkeit herzuleiten sind. Neu jedoch und von Interesse ist die hierbei befolgte Methode, welche der Verfasser als eine möglichst indirecte bezeichnet, insofern die wirkliche Ausführung von Integrationen völlig vermieden und der Potentialcharakter der aufgestellten Ausdrücke aus der Erfüllung der bekannten charakteristischen Eigenschaften eines Potentials erschlossen wird. Die Möglichkeit hierzu verschafft sich der Verfasser dadurch, dass er von Anfang an elliptische Coordinaten als die der Aufgabe angemessensten Variabeln einführt. B.

A. Picart. Mémoire sur l'attraction des ellipsoides. Ann. de l'Éc. N. (2) IX. 409-419.

Der Verfasser giebt zunächst eine geometrische Herleitung des Steiner'schen Satzes, dass die Anziehung einer unendlich dünnen homogenen Schale, welche von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzt wird, in einem Aussenpunkte in die Axe des dazu gehörigen Tangentenkegels fällt. Hieraus folgt dann weiter, dass das Schalenpotential V die confocalen Ellipsoide zu Niveauflächen hat, und dass V eine Function des Parameters der confocalen Flächen allein ist. Die partielle Differentialgleichung $\Delta V = 0$ reducirt sich damit auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integration weiter keine Schwierigkeit bietet. Ebenso ergebt

sich dann ohne Schwierigkeit die Werthe der Integrationsconstanten aus den Ausdrücken für das innere und äussere Potential eines homogenen Ellipsoids. B.

J. W. Warren. Elementary investigation of Legendre's theorem concerning the attraction of an ellipsoid on an external point. Quart. J. XVII. 154-164.

Ein mit ziemlich einfachen Mitteln durchgeführter Beweis des Satzes von Legendre, welcher sich auf die Gleichheit der Anziehung von gewissen konischen Ausschnitten aus homogenen ähnlichen Ellipsoiden bezieht. B.

P. Frost. On the potential and attraction of an ellipsoidal shell at an external point. Quart. J. XVII. 46-50.

B.

H. Streintz. Ueber den Beweis des Satzes, dass eine gleichmässig mit Masse belegte Kreisfläche auf einen in derselben Ebene ausserhalb befindlichen Massenpunkt bei Zugrundelegung des Kraftgesetzes $\frac{1}{r}$ so wirkt, als wäre diese Masse im Mittelpunkte concentrirt. Carl. Rep. XVI. 317-318.

B.

G. J. Legebeke. Quelques propriétés générales d'une couche matérielle qui a le même potentiel qu'une masse donnée. Arch. Néerl. XV. 113-124.

Auszug aus der Dissertation, über welche schon referirt worden ist (F. d. M. XI. 1879. p. 696). G.

A. G. Greenhill. On the differential equation of the ellipticities of the strata in the theory of the figure of the earth. Quart. J. XVII. 203-208.

Siehe Abschn. XII. Cap. 2.

Winterberg. Ueber die Anziehung von Massenpunkten insbesondere mit Rücksicht auf Lothstörungen. Grunert Arch. LXV. 113-161.

Siehe Abschn. XII. Cap. 1.

S. Günther. Eine Anwendung schiefwinkliger Coordinaten auf ein Problem der Potentialtheorie. Prag. Ber. 1879. 4-16.

Um die Möglichkeit der directen Ermittelung des Potentials eines homogenen Tetraeders zu zeigen, werden zunächst die Componenten der Anziehung bestimmt, welche ein solches Tetraeder auf eine seiner Ecken ausübt. Dies geschieht unter Anwendung eines schiefwinkligen Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt in eben jener Ecke liegt, während die von der Ecke ausgehenden Kanten zu Axen genommen werden. Die nöthigen Integrationen lassen sich leicht ausführen, und die Resultate sind geschlossene Ausdrücke der sechs Bestimmungsstücke der betreffenden Ecke.

Weiter wird gezeigt, dass, wenn man die Anziehung eines homogenen Tetraeders auf einen seiner Eckpunkte kennt, man die Anziehung für einen beliebigen äusseren Punkt ohne Zuhilfenahme irgend welcher weiteren Integration erhält. Dies geschieht, indem der äussere Punkt auf verschiedene Weise mit drei Ecken des gegebenen Tetraeders zu einem neuen Tetraeder verbunden wird und die bekannten Anziehungen der verschiedenen Tetraeder zu einer Resultante vereinigt werden. Die schliesslichen Ausdrücke für die Anziehung auf einen äusseren Punkt werden nicht mitgetheilt; ihre Auswerthung dürfte noch ziemlich complicirt sein.

Wn.

R. Hoppe. Potential der sphärischen Dreiecke.
Grunert Arch. LXV. 57-65.

Es genügt, da die Aufgabe keine besonderen Schwierigkeiten bietet, anzuführen, dass dieselbe sich vollständig mit Hülfe der elliptischen Functionen erledigen lässt. B.

W. D. Niven. On the potential at any point of space due to a solid sphere whose density varies inversely as the fifth power of the distance from a fixed point.
Messenger (2) X. 121-122.

Die bekannten Resultate werden durch Inversion abgeleitet.
Glr. (O.)

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

De Heen. Détermination des dimensions réelles des molécules. Ann. Soc. scient. Brux. IV. A. 84-87.

Die angewandte Methode beruht auf der Theorie der Capillarität und führt zu Resultaten, welche ziemlich gut mit denen übereinstimmen, die Clausius und Maxwell durch die kinetische Theorie der Gase und W. Thomson durch die Theorie der Elektricität gefunden haben. Mn. (O.)

C. Lagrange. Recherches sur l'influence de la forme des masses dans le cas d'une loi quelconque d'attraction diminuant indéfiniment quand la distance augmente comme préliminaire de la théorie de la cristallisation. Mém. cour. de Belg. XLIII. 1-33.

G. van der Mensbrugghe. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLVIII. 453-457.

Der Verfasser beweist zuerst folgenden Satz: „Wenn die Anziehung nach einem Gesetz erfolgt, bei dem sie eine sehr

schnell klein werdende Function der Entfernung ist, so wirkt eine beliebige Masse auf hinreichend grosse Entfernung mit grösster, mittlerer und kleinster Energie nach drei rechtwinkligen Axen, die resp. die Axen der kleinsten, mittleren und grössten Trägheit der betrachteten Masse sind." Er leitet daraus folgende zwei Sätze her: „Die relativen Lagen eines materiellen Punktes und eines materiellen Systems unter Wirkung ihrer gegenseitigen Anziehung sind bestimmt durch die Axen des stabilen Gleichgewichts des Systems." Die Axen der Minimal-, mittleren und Maximal-Trägheit des Systems sind die Axen der verschiedenen (stabilen oder unstabilen) Gleichgewichtsarten.

„Die Gleichgewichtsbedingungen des Trägheitsmittelpunkts *O* eines Systems *M*, das der Anziehung eines anderen Systems *N* unterworfen ist, sind abhängig von der Lage von *O* in Bezug auf *N* und der Lage von *M* im Raum. Speciell: Das Gleichgewicht ist immer stabil, wenn die Minimal-Trägheitsaxen zusammen fallen, dagegen immer unstabil, wenn dies bei den Maximal-Trägheitsaxen der Fall ist, in den anderen Fällen endlich bald stabil, bald unstabil."

Aus diesen und einigen anderen Sätzen über die Existenz secundärer Anziehungsaxen leitet der Verfasser die gewöhnliche Eintheilung der Krystalle in sechs Systeme her.

Mn. (O.)

J. Weingarten. Zur Theorie der isostatischen Flächen. Borchardt J. XC. 18-33.

Für jeden Punkt eines im Gleichgewicht der Elasticität befindlichen Körpers giebt es eine Stellung des rechtwinklig parallelepipedischen Elements der Art, dass nur normale Kräfte auf dasselbe wirken. Lamé hatte irrthümlich diese Bemerkung so ausgesprochen, dass es drei orthogonale Schaaren von Flächen gäbe, welche den Körper in solche Elemente theilen, und dieselben isostatische Flächen genannt. Die geometrische Bedingung, unter der einer beliebig variirenden Stellung des Elements ein orthogonales Flächensystem entspricht, dessen Durchschnitte die Richtungen jener Kanten haben, ist bekannt. Daraus leitet der

Verfasser die Bedingungen her, welchen die gegebenen Kräfte genügen müssen, damit ein isostatisches Flächensystem existire. Es mögen $x_k (k = 1, 2, 3)$ die ursprünglichen, s_k die transformirten Coordinaten, a_{hk} die Normal- und Tangentialkräfte in der Lage der x_k bezeichnen; setzt man dann

$$\alpha_{1i} = \frac{da_{2i}}{dx_3} - \frac{da_{3i}}{dx_2}, \text{ etc.},$$

ist ferner $\Sigma b_{hk} dx_h dx_k$ die zugehörige Form zu $\Sigma a_{hk} dx_h dx_k$, und gehen endlich die β_{hk} aus den b_{hk} so hervor wie die α_{hk} aus den a_{hk}, so sind die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen eines isostatischen Systems:

$$\Sigma a_{hk} \alpha_{hk} = 0; \quad \Sigma a_{hk} \beta_{hk} = \Sigma b_{hk} \alpha_{hk} = 0; \quad \Sigma b_{hk} \beta_{hk} = 0.$$

Diese Gleichungen werden in beiderlei Hinsicht bewiesen, dann in symbolischem Ausdruck entwickelt dargestellt. Ferner wird gezeigt, dass sie sich auch als die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen für das Auftreten des Umstandes auffassen lassen, dass in jedem Punkte des Radius die Hauptaxen des Elasticitätsellipsoids, sofern es coaxial ist mit dem Ellipsoid

$$s^2 = \sum_h (\sum_k a_{hk} dx_k)^2,$$

in die Richtungen der Schnittlinien eines orthogonalen Flächensystems fallen.

Es wird weiter der Fall

$$\Sigma a_{hk} dx_h dx_k = \Sigma \frac{d^2\varphi}{dx_h dx_k} dx_h dx_k$$

betrachtet. Da hier sämmtliche α verschwinden, so sind die zwei ersten Bedingungen von selbst erfüllt; die dritte bleibt als eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung für φ allein übrig, welche $\{\varphi\} = 0$ geschrieben werden mag. Durch die Legendre'sche Substitution

$$\psi = \Sigma x_i \frac{d\varphi}{dx_i} - \varphi; \quad y_i = \frac{d\varphi}{dx_i}; \quad x_i = \frac{d\psi}{dy_i}$$

erhält man analoge Beziehungen für y_i, ψ, aus denen hervorgeht, dass ψ als Function der y der Gleichung $\{\psi\} = 0$ genügt, und es ergiebt sich das Reciprocitätsgesetz: „Sind $\varrho_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$ die Gleichungen der Schaaren eines orthogonalen Flächensystems,

welches zu dem Integral der Differentialgleichung $\{\varphi\} = 0$ gehört, so sind nach vollzogener Legrendre'scher Substitution die Gleichungen

$$\varrho_i = f_i\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \frac{\partial\psi}{\partial y_2}, \frac{\partial\psi}{\partial y_3}\right)$$

wiederum die Gleichungen eines orthogonalen Flächensystems, und zwar desjenigen, welches zur Function ψ gehört. Es wird noch eine zweite Substitution genannt, welche gleich der ersten dazu führt, einem zu φ gehörigen orthogonalen Flächensystem andere solche zuzuordnen.

Jene Untersuchung führt den Verfasser weiter zu der Frage, unter welcher Bedingung eine Function $\varphi(\sigma)$ des Arguments

$$\sigma = X_1 + X_2 + X_3,$$

in welchem X_i nur Function von x_i, der Differentialgleichung $\{\varphi\} = 0$ genügt. Es ergiebt sich:

$$\frac{d\left(\frac{\varphi'(\sigma)}{\varphi''(\sigma)}\right)}{d\sigma} = 2(\varkappa-1); \quad X_i'''X_i' = 2\varkappa(X_i''-a)(X_i''-b)$$

für $i = 1, 2, 3$; $a, b, \varkappa$ constant. Der ersten Gleichung zufolge st $\varphi(\sigma)$ ein constantes Vielfaches von

$$\{A+2(\varkappa-1)\Sigma X_i\}^{\frac{1}{2(\varkappa-1)}+1}$$

und geht für $\varkappa = 1$ über in

$$\varphi(\sigma) = e^{B\Sigma X_i}.$$

Für $\varkappa = 1$ stimmt die obige (zweite) Bedingungsgleichung mit derjenigen überein, welche, wie Serret gefunden, ausdrückt, dass die Flächenschaar $\lambda = \Sigma X_i$ einem orthogonalen Flächensystem angehört.

Ferner ergiebt sich bei Bestimmung des orthogonalen Flächensystems, welches dem $\{\varphi\} = 0$ entspricht, dass diese Aufgabe, auf Grund vollzogener Integrationen von Darboux, gelöst ist. Endlich wird gezeigt, dass sich die Behandlung von drei auf n Dimensionen erweitern lässt. H.

S. Germain. Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques. Liouville J. (3) VI. Suppl.

Die Verfasserin prüft und entscheidet, welche Potenz der Plattendicke in dem Coefficienten n^2 der Terme

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$$

in der Gleichung der elastischen Platten gesetzt werden soll. Die bezüglichen Ansichten von Euler, Lagrange, Riccati, Chladni, Poisson, Navier, so wie ihre eignen in den „Recherches sur la théorie des surfaces élastiques. Paris, 1821" mitgetheilten werden erwähnt und besprochen. Jener Coefficient ist der ersten, zweiten, dritten und vierten Potenz der Dicke proportional gesetzt. Verschiedene Betrachtungen führen zu dem Resultat, dass bei Membranen und Platten von constanter und variabler Dicke nur die vierte Potenz der Dicke die Theorie mit den Beobachtungen, deren viele auch von der Verfasserin ausgeführt sind, in Uebereinstimmung lasse.

In der beigegebenen Note (S. 60—64) wird der Wortlaut des Briefes der Verfasserin gegeben, welcher 1823 in der Pariser Akademie zur Verlesung kam, und in welchem die Experimente von Wheatstone über die Schwingungen metallischer Platten mit denen von Chladni verglichen wurden. Beide Arten von Experimenten führen bei schwingenden Platten zur Unterscheidung von Punkten, wo die Bewegung am stärksten ist, und von Punkten, wo absolute Ruhe herrscht; dagegen werden bei den Experimenten von Wheatstone besonders jene Punkte beachtet, welche sich mehr aus ihrer natürlichen Lage entfernen, während bei denen von Chladni hauptsächlich jenen Punkten Aufmerksamkeit geschenkt wird, welche ihre Anfangslage beibehalten. (Siehe auch Seite 14.) Rs.

De Saint-Venant. Sur celle des déformations des corps soit élastiques, soit plastiques, soit fluides. C. R. XC. 53-56.

De Saint-Venant. Complément à la note sur la déformation des corps. C. R. XC. 209.

Im Anschluss an Herrn Résal's „Note sur les différentes branches de la cinématique" (siehe F. d. M. XI. 1879. 611—612) bemerkt der Verfasser, dass die kinematische Geometrie auch die Theorie der Deformationen der Körper nach ihren drei Dimensionen und für alle Elemente ihres Innern einzuschliessen verdiente. Cauchy hat in seinen Exercices de mathématiques II. 1827. p. 60ff (nicht 30) analytisch bewiesen, dass die kleinen Deformationen, falls sie das Gesetz der Continuität befolgen, sich in jedem Punkte auf drei Hauptdehnungen oder Hauptverdichtungen in drei orthogonalen Richtungen zurückführen lassen, welche nach den Deformationen rechtwinklig bleiben. Dies erkennt man auch ohne Rechnung. Bequemer ist es, für jeden Punkt in willkürlichen orthogonalen Richtungen drei positive oder negative Dilatationen und drei Verschiebungen anzunehmen. Dagegen ist es Aufgabe der Mechanik, ihre Grössen und die Verrückungen der Punkte bei elastischen und plastischen Körpern zu bestimmen. Wenn man das Princip von der Erhaltung des Volumenelements gelten lässt und einige Hypothesen über die Vertheilung der Geschwindigkeiten und die gegenseitigen Beziehungen ihrer Ableitungen nach den rechtwinkligen Coordinaten macht, kann man gewisse gleichzeitige Verrückungen der verschiedenen Punkte eines plastischen Körpers kinematisch bestimmen.

In der zweiten Mittheilung erwähnt der Verfasser in Folge einer *Zuschrift* des Herrn Tissot, dass dieser in den Nouv. Ann. 1878 bewiesen hat: Die Deformation jeder Elementarkugel in ein Ellipsoid, welche in der ersten Note auf kleine Deformationen beschränkt zu sein schien, ist für beliebig grosse richtig, falls sie nur von jedem Punkte zu den benachbarten continuirlich variiren. Der Verfasser fügt hinzu, dass er bereits 1864 (Inst. 1614 p. 389) einen geometrischen Beweis dafür gegeben habe, ohne jene überflüssige Beschränkung zu machen. Rs.

LECORNU. Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. C. R. XCI. 809-812.

Bei einer im Gleichgewicht befindlichen vollständig biegsamen

und unausdehnbaren Fläche, auf welche in jedem ihrer Punkte Kräfte von der Grössenordnung der entsprechenden Elemente wirken, sind in einem gegebenen Punkte die tangentialen Spannungscomponenten auf zwei sich rechtwinklig schneidenden Linienelementen einander gleich. Das Gesetz der Spannungsänderungen für die Elemente, welche durch denselben Punkt gehen, ist ganz analog dem Aenderungsgesetze normaler Krümmungen. Wenn man von einem Punkte aus auf jeder Tangente eine Länge abträgt, welche umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Spannung ist, erhält man die Indicatrix der Spannungen. Irgend eine Richtung und die zugehörigen Spannungen sind in Bezug auf die Indicatrix der Spannungen conjugirt. In jedem Punkte schneiden sich zwei rechtwinklige Richtungen, welche senkrecht zu den entsprechenden Spannungen sind. Zwei orthogonale Curvenschaaren werden über die Fläche ausgespannt. Die drei nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Gleichgewicht sind dann:

$$\frac{\partial n_2}{\partial s_1} - \frac{\partial t}{\partial s_2} + \frac{n_1 - n_2}{\varrho_2} + \frac{2t}{\varrho_1} = F_1,$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial s_2} - \frac{\partial t}{\partial s_1} + \frac{n_2 - n_1}{\varrho_1} + \frac{2t}{\varrho_2} = F_2,$$

$$\frac{n_1}{R_2} + \frac{n_2}{R_1} - \frac{2t}{T} = \Phi.$$

R_1, ϱ_1 sind die reciproken Werthe der normalen und der tangentialen Krümmung der einen Curvenschaar, R_2, ϱ_2 die der anderen Curvenschaar, T der reciproke Werth der den beiden Schaaren gemeinsamen Torsion. F_1, F_2, Φ bedeuten die Componenten der äusseren Kraft nach den Tangenten der beiden Curvenschaaren und nach der Normalen der Oberfläche, n_1 und n_2 sind die zu den Curvenschaaren normalen Componenten der Spannung, t ist die für beide Richtungen gleiche tangentiale Spannungscomponente. Die Spannungen kann man aus den Gleichungen nicht eliminiren. Diese unterscheiden sich nur in den zweiten Gliedern von denen, welche die durch eine unendlich kleine Deformation der Oberfläche erzeugten Variationen von $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{T}$ geben.

Die allgemeine Lösung ist daher auf die Untersuchungen unendlich kleiner Deformationen zurückgeführt, sobald eine particuläre Lösung bekannt ist. Durch Einführung der neuen Variabeln

$$n_1' = n_1 - \frac{a}{R_1}, \quad n_2' = n_2 - \frac{a}{R_2}, \quad t' = t - \frac{a}{T},$$

wenn a durch die Gleichung bestimmt ist:

$$2a\left(\frac{1}{R_1 R_2} - \frac{1}{T^2}\right) = \Phi,$$

welche die developpabeln Oberflächen ausschliesst, erhält man den Satz: „Die asymptotischen Richtungen sind zwei conjugirte Richtungen der Indicatrix der Spannungen“, oder anders ausgedrückt: „Die in einer asymptotischen Linie wirkenden Spannungen sind Tangenten an die asymptotischen Linien des anderen Systems.“ Die Gleichungen für das Gleichgewicht werden in Bezug auf diese asymptotischen Linien gegeben, und es wird darauf hingewiesen, dass für Regelflächen die Trennung der Unbekannten unmittelbar ausgeführt werden kann.

Rs.

G. Kirchhoff. Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt. Pogg. Ann. (2) X. 501-512.

Ist ein Abdruck aus Berl. Monatsber. 1879. 815—828. Siehe F. d. M. XI. 1879. 714—716. Rs.

E. Mathieu. Mémoire sur les intégrations relatives à l'équilibre d'élasticité. C. R. XC. 739-741.

Lamé hat in seinen „Leçons sur la théorie de l'élasticité“ auf die Wichtigkeit der Bestimmung dreier Coefficientenreihen hingewiesen, auf welche er die Lösung des folgenden Problems zurückgeführt hat: „Das elastische Gleichgewicht eines rechtwinkligen Parallelepipedons zu bestimmen, auf dessen sechs Flächen gegebene Normalkräfte wirken, falls diese auf entgegengesetzten Flächen symmetrisch vertheilt sind.“ Jene Bestimmung

ist vom Verfasser nicht ausgeführt, dagegen ist eine Aufgabe gelöst, welche mit jener grosse Analogie hat und „a priori genau dieselben Schwierigkeiten darzubieten scheint.“ In diesem Auszuge wird nur die Lösung der folgenden Aufgabe gegeben: „Eine Function u zu bestimmen, welche im Innern eines rechtwinkligen Parallelepipedons der partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung $\Delta\Delta u = 0$ genügt und mit ihren ersten drei Ableitungen endlich und stetig ist, falls man u und $\frac{du}{dn}$ für jede der sechs Flächen kennt (dn ist das Element der Flächennormale).“ Sind a, b, c die Seiten des Parallelepipedons, $l = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2}}$, so ist

$$u = \Sigma\Sigma \sin\frac{n\pi\left(x - \frac{2}{a}\right)}{a} \sin\frac{n'\pi\left(y - \frac{b}{2}\right)}{b} \left[A E(lz) + B \mathfrak{E}(lz) + C z E(lz) + D z \mathfrak{E}(lz)\right]$$

+ 2 Doppelsummen, welche aus der vorstehenden durch Buchstabenwechsel entstehen.

Die Summen sind über alle ganzen positiven Werthe von n und n' auszudehnen. E und $\mathfrak{E}$ bedeuten einen hyperbolischen Cosinus und Sinus, A, B, C, D sind Coefficienten. Es wird nur noch angedeutet, wie man aus dieser Lösung das erwähnte System von drei Gleichungen erhält, und mitgetheilt, welche vier Hülfssätze bei der Lösung benutzt sind. Rs.

E. Mathieu. Sur l'équilibre d'élasticité d'un prisme rectangle. C. R. XC. 1272-1274.

Der Verfasser löst das im vorigen Referat angegebene Problem von Lamé für zwei Dimensionen, um die Formeln zu vereinfachen, obgleich seine Betrachtungen auch für den Fall von drei Dimensionen anwendbar sind. Die gelöste Aufgabe lautet: „Zwei entgegengesetzte Flächen eines homogenen rechtwinkligen Prismas sind gegen zwei parallele feste Wände gestützt. Auf die ganze Ausdehnung der vier Seitenflächen wirken gegebene normale

Druckkräfte, und zwar sind diese auf jeder Fläche längs einer Parallelen zu den vier Seitenkanten gleich gross, so wie über die entgegengesetzten Seitenflächen symmetrisch vertheilt. Man soll die Deformation des Prismas und den von den Grundflächen desselben geleisteten Widerstand bestimmen." Die normalen Druckkräfte auf die Flächen $x = \pm a$ und $y = \pm b$ seien dargestellt durch

$$f_1(y) = \Sigma \mathfrak{A}_n \cos ny, \quad f_2(x) = \Sigma A_n \cos mx,$$

wo $m = \frac{p\pi}{a}$, $n = \frac{q\pi}{b}$ ist, während p und q ganze Zahlen bedeuten. Die Summen sind für alle positiven ganzen Zahlen von 0 bis ∞ in Bezug auf p und q zu bilden. Die Dilatation kann in der Form

$$\theta = \Sigma \mathfrak{B}_m E(my) \cos mx + \Sigma B_n E(nx) \cos ny$$

dargestellt werden, so dass es sich allein um die Bestimmung der Coefficienten $\mathfrak{B}_m$ und B_n handelt. Der Verfasser giebt die Werthe dieser Grössen und bemerkt, dass er sich von der Convergenz aller in ihnen vorkommenden Reihen überzeugt hat.

Rs.

L. Saalschütz. Der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft. Leipzig. Teubner.

Die Veränderungen der Axe eines ursprünglich gerade und senkrecht stehenden Stabes, dessen unteres Ende fest, und dessen oberes Ende einer Belastung im Schwerpunkte der Endfläche und einer in der Richtung einer Hauptaxe der Endfläche horizontal wirkenden Kraft unterworfen ist, wird untersucht. Der Grenzwerth der Belastung eines solchen Stabes wird durch eine strengere Betrachtungsweise gegeben, als dies bisher geschehen war, indem der vollständige Ausdruck für den Krümmungsradius der elastischen Linie in die Rechnung eingeführt wird. Der Querschnitt des Stabes oder der Feder wird so klein angenommen, dass derselbe während der Deformation als eben bleibend betrachtet werden kann. In der Einleitung werden zwei Beweise

dafür gegeben, dass bei dieser Annahme die Navier'sche Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{WE}$$

streng richtig ist. Aus der Voraussetzung folgt, dass die Verlängerung der Stabaxe als verschwindend klein anzusehen ist. Im ersten Abschnitt (p. 1—34) wird zunächst die sehr geringe Biegung untersucht, d. h. es kann $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt werden, und wird dann die beschränkende Voraussetzung fallen gelassen, d. h. für ϱ, den Krümmungsradius in der Biegungsebene, der vollständige Werth gesetzt. Es folgt im zweiten Abschnitt (p. 35-159) die Untersuchung einer belasteten Säule unter dem Einflusse einer von der Ruhelage fortgerichteten (positiven) oder einer zur Ruhelage hingerichteten (negativen) Horizontalkraft, von welchen Fällen der letztere besonders wichtig ist. Im letzten Abschnitt (p. 160) wird angenommen, dass auf den Stab statt einer Horizontalkraft eine Kraft von anderer, aber bestimmte Bedingungen erfüllender Richtung einwirkt. Rs.

E. Warburg. Ueber die Torsion. Pogg. Ann. (2) X. 13-34.

Ohne Rücksicht auf die vom Verfasser gegebene Theorie der Torsion Pogg. Ann. (2) IV. 232-249, Freib. Ber. VII. 225-259 (F. d. M. X. 1878, 671-672 u. 762) theilt derselbe Resultate bisheriger Versuche mit. Beim benutzten Apparat befindet sich an zwei Fäden ein Körper K_1, in der Mitte zwischen den Fäden hängt der zu prüfende Draht, und dieser ist durch einen Körper K_2 belastet. K_1 und K_2 sind so mit einander verbunden, dass die Drehungen derselben um die gemeinschaftliche Drehungsaxe stets dieselben sind. Das Torsionsmoment D_2 des Drahtes wird mit dem Directionsmoment des bifilar aufgehängten Körpers verglichen. Dieser Apparat kann dreifach benutzt werden: 1) Durch Ablenkungsversuche, 2) durch Schwingungsversuche kann man $(D_2 : D_1)$ bestimmen, 3) vermag man kleine Aenderungen des Torsionsmomentes zu beobachten. Ausgeglühte Drähte aus Stahl, Eisen, Kupfer von den Durchmessern 0,3 — 0,5 mm und etwa

520 mm Länge wurden untersucht. Die statisch bestimmten Torsionsmomente wurden stets kleiner als die dynamisch bestimmten gefunden; die Differenzen steigen von 1 pro Mille für Stahl auf 6 p. M. für Eisen und 28 p. M. für Kupfer. Eine Abhängigkeit des Torsionscoefficienten von der Spannung hat sich innerhalb der Versuchsgrenzen nicht ergeben. Bei den Beobachtungen mit dem Kupferdraht zeigte sich, dass die Schwingungsdauer mit der seit einer Spannungsänderung verflossenen Zeit abnimmt. Bei weichen Kupferdrähten erstreckte sich die permanente Torsion innerhalb weiter Grenzen nahezu gleichförmig über den ganzen Draht, bei ausgeglühten Eisendrähten war dies nicht näherungsweise der Fall; die grössere permanente Torsion bei diesen bezog sich gewöhnlich auf eine kleine Stelle des Drahtes, ein oberhalb befindliches Drahtstück war gegen ein unterhalb befindliches verdreht. Das Verhalten des Stahls lag zwischen dem des Eisens und dem des Kupfers. Eine eingehende Untersuchung der permanenten Torsion erfolgte daher nur an Kupferdrähten. Eine bei den permanent tordirten Drähten beobachtete Erscheinung führt den Verfasser zu der Annahme, dass dort die Materie in der Richtung der Hauptdruckaxen nachgegeben habe, dass also in Folge der permanenten Torsion der isotrope Draht ein anisotroper geworden sei, und dieser sich wie ein Krystall des rhombischen Systems verhalte, dessen Axen aber für verschiedene Punkte verschiedene Richtungen haben, und bei welchem der Grad der Anisotropie von der Drahtaxe nach aussen wachse. Die Deformation wird bestimmt, welche ein longitudinaler Zug bei einem Element eines solchen Drahtes erzeugt. Es wird gefunden, dass durch den longitudinalen Zug K ausser der Dilatation in der Richtung des Zuges und den Contractionen in zum Zuge senkrechten Richtungen eine Schiebung

$$\chi' = \frac{K}{2}\frac{E_3 - E_1}{E_1 E_3}$$

eintritt. E_1 und E_3 sind die Elasticitätscoefficienten für die Richtung, in welcher die permanente Dehnung stattgefunden hat, und für die Richtung, in welcher die permanente Compression eingetreten ist. Die Versuche bestätigen, dass die Schiebung propor-

tional mit K ist, und aus ihnen kann man schliessen, d
$E_3 > E_1$ ist. Rk.

H. G. Zeuthen. Grafisk Behandling af en Bjaelkes b vaegelige Belastning. Tekn. Foren. Tidsskr. 1880.

Bei der Betrachtung beweglicher Lasten, welche in unv änderlicher Entfernung von einander über einen Balken vorwä gleiten, wurde bisher nach Culmann's Vorgange das Seilpolyg dieser Lasten unveränderlich aufgezeichnet und die Spannwe auf demselben verschoben. Hier wird umgekehrt die Balk länge festgelegt und untersucht, in welcher Weise sich die Krä und Seilpolygone verschieben. Zunächst wird die Summe rechts von einem bestimmten Querschnitte wirkenden Kräfte, Kraftsumme bezeichnet und das Polygon (resp. Curve), welches die in jedem Punkte errichteten, die Kraftsumme darstellenden Ordinaten begrenzt, als Kraftsummen-Polygon. Der zwischen der linken Grenzordinate und der betrachteten liegende Theil dieser Polygonfläche stellt alsdann das Moment der Belastung an dieser Stelle, also die Ordinate des Seilpolygons dar.

Zunächst werden zwei Einzellasten betrachtet. Das Kraftsummenpolygon hat Treppenform; der Schnitt des Balkens, welcher seine Länge nach dem Verhältnis der Kräfte theilt, besitzt ein unveränderliches Moment, so lange die Kräfte zu beiden Seiten desselben stehen. Die mittlere Seite des Seilpolygons dreht sich in Folge dessen um den unveränderlichen Endpunkt dieser Ordinate, während ihre Endpunkte Parabelbogen beschreiben, die sich im Drehungspunkte schneiden. Durch Ausdehnung dieser Betrachtungsweise auf mehr als zwei Kräfte bis zur continuirlichen Belastung ergiebt sich eine verhältnismässig einfach Methode, für jeden einzelnen Schnitt sein Maximalmoment zu finden. Bn.

G. CURIONI. Sulla equazione dei momenti inflettenti nelle sezioni corrispondenti a tre appoggi successivi di uno trave prismatica caricata perpendicolarmente al suo asse. Atti di Torino XV. 775-785.

Entwickelung der Formeln für die Momente und die Durchbiegungen (Elasticitätslinie) eines Balkens auf mehr als zwei Stützen. Zunächst wird für eine Oeffnung die allgemeine Formel aufgestellt, demnächst für zwei benachbarte Oeffnungen, in deren jeder eine einzelne Last angreift, dann derselbe Fall für Lasten behandelt, welche auf gewisse Strecken gleichförmig vertheilt sind. Diese allgemeine Formel, welche zuerst von Bresse aufgestellt wurde, ist hier auf abweichende Art abgeleitet; sie geht, wenn diese Lasten sich über die ganze Länge der Oeffnungen ausdehnen, in die bekannte Clapeyron'sche über. Bn.

S. PÉRISSÉ. Des causes qui tendent à gauchir les poutres des ponts en fer, et des moyens de calculer ces poutres, pour résister aux efforts gauchissants. C. R. XC. 1410-1413.

Die für Berechnung der eisernen Balken und Brücken üblichen Formeln gehen von der Voraussetzung aus, dass die Symmetrieaxe des Balkenquerschnittes immer vertical bleibt. Verfasser giebt zwei Ursachen an, welche tordirend wirken, 1) die Art der Befestigung der Querstücke und 2) die Beanspruchung des oberen Flansches auf Zerknickung. Verfasser giebt die Formel für die Beanspruchung der erforderlichen Versteifungen und die Maximallänge, welche der obere Flansch ohne Versteifung nicht überschreiten darf. Bn.

H. RÉSAL. De l'influence de la température et de l'élasticité sur les câbles des ponts suspendus. C. R. XC. 149-153.

Verfasser berechnet erst die Variationen der Spannung der Kette und die Senkungen, welche durch Temperaturänderungen

hervorgebracht werden, sodann dieselben Grössen in Folge veränderter Belastung. Die gefundenen Formeln werden sehr einfach durch die Vernachlässigung der vierten Potenz der Tangente des Neigungswinkels gegen den Horizont. Bn.

S. Canevazzi. Sopra alcune formole della resistenza dei materiali. Mem. di Bol. (4) I. 643-657.

Entwickelung der Formeln für den continuirlichen Balken auf graphischem Wege. In den Normalen der beiden Stützen, welche das betrachtete Balkenstück begrenzen, werden die über den Stützen vorhandenen Momente als gerade Linien aufgetragen und zwischen ihren Endpunkten das Seilpolygon der in der Oeffnung vorhandenen Kräfte gezeichnet. Um das Momentenpolygon zu zeichnen, werden die beiden Stützenmomente resp. die Gewichte der entsprechenden Dreiecke als in den Schwerpunkten wirkend gedacht, ebenso das Gewicht des Seilpolygons. Man erhält so ein Seilpolygon zweiter Ordnung, dessen Anfangs- und Endseite denselben Winkel mit der Horizontlinie bilden, wie die elastische Linie des Balkens, natürlich vergrössert. Aus dieser Figur ergeben sich dann für die verschiedenen Fälle ziemlich einfach die in „Grasshof, Theorie der Elasticität und Festigkeit" analytisch entwickelten Formeln. Bn.

Lösungen von Aufgaben aus der Elasticitätslehre von A. Martin, Matz, T. R. Terry, A. McMurchy, Townsend, J. J. Walker, J. E. A. Steggall, D. Edwardes, Wolstenholme, Genese finden sich Educ. Times XXXIII 18-19, 24-25, 25-26, 53-54, 80-81, 84-86, 105-106, 114-115.

O.

P. M. Heringa. Considérations sur la théorie des phénomènes capillaires. Arch. Néerl. XV. 124-134.

Siehe F. d. M. X. 1878. p. 677. G.

E. Roger. Théorie des phénomènes capillaires (5e mémoire). Extrait par l'auteur. C. R. XC. 908-910.

Der kurzen Inhaltsangabe sei entnommen: Im ersten Theile werden die allgemeinen Formeln für die gegenseitige Anziehung zweier Umdrehungsflächen, die einen Parallelkreis gemein haben, aufgestellt, wenn die Intensität der anziehenden Kräfte sehr schnell mit der Entfernung abnimmt. Für den Fall, dass der Parallelkreis ein Aequator ist, wird die Resultante R der gegenseitigen Anziehung für die Längeneinheit des Aequators gegeben. Nehmen die Kräfte mit der Entfernung so schnell ab, dass man nur die beiden ersten Glieder der für R erhaltenen Reihe zu berücksichtigen braucht, und erfüllen die Flächen gewisse Bedingungen, so reducirt sich die Resultante auf ein einziges Glied. Dies ist z. B. der Fall, wenn die eine Fläche eine Kugel und die andere ein der Kugel umschriebener Cylinder ist. Im zweiten Theile wird bewiesen, dass das Product der gehobenen Höhe h und des Durchmessers D der Röhre constant ist, wenn die Flüssigkeit sich in der Röhre frei erhebt, da dann der kugelförmige Meniscus die cylindrische Wand tangential zu berühren strebt. Der dritte handelt vom Molecularanziehungsgesetz. Mit einer gewissen Einschränkung ist die Wirkung umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung; es ist nämlich so, als ob um jedes Molecül ein absorbirendes Mittel vorhanden wäre. Das Anziehungsgesetz wird in der Form

$$\Pi(\lambda) = \frac{i c^{-\int_0^\lambda Q d\lambda}}{\lambda^2}$$

gegeben, wo c die Basis der hyperbolischen Logarithmen, i eine willkürliche Constante, Q eine Function der Entfernung λ ist. Das Gravitationsgesetz entspricht dem Falle $Q = 0$.

Rs.

P. VOLKMANN. Ueber den Einfluss der Krümmung der Wand auf die Constanten der Capillarität bei benetzenden Flüssigkeiten. Pogg. Ann. (2) XI. 177-210.

Der Annahme von Laplace, Poisson und Gauss, dass die Molecularkräfte nur in für uns unmessbar kleinen Entfernungen wirken, scheinen die von Simon und Wilhelmy gemachten Beobachtungen bei benetzenden Flüssigkeiten an ebenen und gekrümmten Wänden zu widersprechen. Die Discussion dieser Versuche führt den Verfasser zu dem Schlusse, dass die Abweichungen zwischen der Theorie und diesen Beobachtungen fehlerhaften Bestimmungen zugeschrieben werden können. Daher hat der Verfasser Messungen über die Steighöhe in Capillarröhren und zwischen ebenen Platten analog ausgeführt, wie es Simon gethan hat. Als besonders geeignete Flüssigkeiten erwiesen sich Klauenfett und Alkohol, da diese eine grosse Constanz in der Capillaritätsconstanten zeigten. Aus den mit diesen Flüssigkeiten ausgeführten Experimenten gewinnt der Verfasser die Resultate: „Die Beobachtung der Steighöhe zwischen parallelen Platten führt zu der von Plateau 1852 gemachten Annahme einer constanten Wandschicht, an welcher die Flüssigkeit emporsteigt. Die Dicke dieser Schicht ist für die beiden Flüssigkeiten bei Platten und Röhren 0,004 mm. Insofern man die bei Klauenfett und Alkohol gefundenen Resultate auf andere benetzende Flüssigkeiten ausdehnen darf, ist der Einfluss der Krümmung der Wand auf die Capillaritätsconstanten bis auf 0,002 ihres Werthes nicht nachweisbar.“ Rs.

Capitel 2.

Akustik und Optik.

E. MERCADIER. Sur la détermination des éléments d'un mouvement vibratoire. Almeida J. IX. 41-48, 217-227, 282-289.

Bei der Auseinandersetzung experimenteller Methoden zur Bestimmung der Amplitude, Schwingungsdauer und Phase einer

Schallbewegung bespricht der Verfasser ausführlich die Zusammensetzung zweier einfacher gleichgerichteter Schwingungen von derselben Amplitude, aber verschiedener Schwingungsdauer.

Wn.

O. Tumlirz. Ueber die Fortpflanzung von Kugel- und Cylinderwellen endlicher Schwingungsweite. Wien. Ber. LXXXII.

Siehe Abschn. X. Cap. 4 B. p. 692.

Amagat. Note sur l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ qui conduit à l'expression théorique de la vitesse du son. Almeida J. IX. 56-59.

Die oben genannte Differentialgleichung wird gewöhnlich unter Annahme des Mariotte'schen Gesetzes hergeleitet, und erst nachträglich wird der theoretische Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a durch Berücksichtigung der durch die Condensation entstehenden Erwärmung corrigirt. Diese nachträgliche Correction kann man vermeiden, wenn man statt des Mariotte'schen Gesetzes von vorne herein die Laplace'sche Formel annimmt

$$p.v^{\frac{C}{c}} = p'.v'^{\frac{C}{c}}.$$

Wn.

R. A. Mees. De voortplanting van vlakke geluidsgolven in gassen volgens de kinetische gastheorie. Versl. en Mededeel. XV. 394-425.

In dieser Abhandlung wird die Fortpflanzung ebener Schallwellen in Gasen nach der kinetischen Gastheorie untersucht. Im ersten Theile werden die Anschauungen, welche man auf experimentellem und theoretischem Wege über die Art der Wellenbewegung erhalten hat, in die Sprache der kinetischen Gastheorie

übersetzt und die Bedingungen angegeben, denen der Bewegungszustand der Schallwellen genügen muss. Der Einfachheit halber beschränkt sich der Verfasser auf ebene Schallwellen und schlägt bei deren Behandlung ungefähr denselben Weg ein, den Clausius in seiner Wärmetheorie benutzt hat. Im zweiten Theil wird untersucht, ob der angenommene Bewegungszustand ein solcher ist, welcher sich selbst erhält, und weiter, ob man aus dem Bewegungszustand, wie derselbe in einem gegebenen Augenblicke auf einer bestimmten Stelle in der Schallwelle vorhanden ist, beweisen kann, dass er die nothwendige Folge der Bewegungszustände ist, welche in früheren Momenten in den verschiedenen Theilen der Schallwelle vorhanden waren. In dieser Hinsicht ist das Resultat, das der Verfasser erhält, nach seiner eigenen Erklärung nicht befriedigend. Als Grund davon giebt er an, dass bei der analytischen Untersuchung allen Molecülen, welche durch eine Schicht ausgestossen werden oder gleichzeitig in einer Schicht sich befinden, dieselbe Geschwindigkeit zugetheilt wird, während in Wirklichkeit die Geschwindigkeit der verschiedenen Molecüle sehr verschiedene Werthe besitzt. Führt man diese verschiedenen Geschwindigkeiten nach dem Gesetze von Maxwell ein, so werden die Rechnungen so complicirt, dass die mathematischen Schwierigkeiten sich als unüberwindlich erweisen. Doch hält es der Verfasser für wahrscheinlich, dass, wenn die Sätze der kinetischen Gastheorie vollkommen streng angewendet werden könnten, der angenommene Bewegungszustand der Schallwellen in Gasen mit diesen Sätzen gänzlich in Uebereinstimmung sein werde. G.

A. Kneser. Ueber atmosphärische Schallstrahlenbrechung. Pogg. Ann. (2) XI. 516-522.

Die Aenderung der Temperatur der Luft mit der Höhe bedingt auch eine Aenderung der Schallgeschwindigkeit. Die Schallstrahlen, welche successive verschiedene Luftschichten durchdringen, werden daher fortdauernd gebrochen. Ist i_1 der Winkel,

den ein Strahl mit der Verticalen bildet, i der zugehörige gebrochene Winkel, v und v_1 die zugehörigen Schallgeschwindigkeiten, so ist

$$(1) \qquad \frac{\sin i}{\sin i_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{\sqrt{1+\alpha t}}{\sqrt{1+\alpha t_1}},$$

wobei α der thermische Ausdehnungscoefficient, t die Temperatur bezeichnet. Aendert sich t continuirlich, so dass

$$(2) \qquad t = t_1 + \frac{x}{h},$$

unter x die (verticale) Abscisse verstanden, so ergiebt Gleichung (1), zusammen mit $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} i$, die Differentialgleichung der krummlinigen Bahn der Schallstrahlen. Diese Gleichung wird integrirt und daraus durch Discussion einige Folgerungen gezogen, die zur Erklärung des von Tyndall beobachteten Factums dienen, dass der Hörbarkeitskreis des Schalls mit der Höhe variirt. Wn.

NIEMÖLLER. Ueber die Schwingungen einer Saite, deren Spannung eine stetige Function der Zeit ist.

Schlömilch Z. XXV. 44-48.

In der bekannten Differentialgleichung für die Schwingung einer Saite wird die constante Spannung durch eine solche ersetzt, die proportional ist $t^{\frac{1}{\mu}-2}$. Dann ist die dem Grundton entsprechende Schwingung durch die Gleichungen bestimmt:

$$\xi = F(t)\sin\left(\frac{\pi s}{l}\right),$$

$$F(t) = C.t^{\frac{1}{2}}.J_\mu(c\mu t^{\frac{1}{2\mu}}),$$

wobei J die Bessel'sche Function, c eine gewisse Constante ist. Das allgemeine Integral der behandelten Differentialgleichung besteht aus einer Summe von Gliedern der obigen Form, wobei

nur nc und $\frac{l}{n}$ an Stelle von c und l treten. Die Resultate für $\mu = 1$ werden ausführlicher discutirt. Wn.

W. Voigt. Theorie des leuchtenden Punktes. Borchardt J. LXXXIX. 288-321.

G. Kirchhoff. Bemerkung zu dem Aufsatze: „Theorie des leuchtenden Punktes." Borchardt J. XC. 34-38.

Um das Gesetz zu ermitteln, nach welchem sich die Schwingungen, die ein leuchtender Punkt in einer bestimmten Richtung ausführt, nach allen Seiten hin fortpflanzen, behandelt Herr Voigt die folgende Aufgabe: „In einem unbegrenzten elastischen, aber incompressiblen Medium (Aether) befindet sich eine Kugel, an deren Oberfläche die anliegenden Aethertheilchen fest haften, so dass hier keine relativen Verschiebungen stattfinden. Es soll die Bewegung des (ursprünglich ruhenden) Mediums bestimmt werden unter der Voraussetzung, dass die Kugel gegebene unendlich kleine Schwingungen macht, die aber unabhängig sind von der geographischen Länge auf derselben." Alle möglichen gegebenen Schwingungen der Kugel lassen sich auf die beiden Fälle reduciren, dass die Kugel entweder um einen ihrer Durchmesser sich dreht, oder, ohne sich zu drehen, in gerader Linie hin- und hergeht. Für beide Fälle wird die Rechnung gesondert durchgeführt. Im ersten Falle entstehen durch die Rotation der Kugel um einen ihrer Durchmesser auch nur Rotationen der Theilchen des Mediums um dieselbe Axe. Die partielle Differentialgleichung, der die Winkelgeschwindigkeit genügt, wird auf räumliche Polarcoordinaten transformirt; und da man allen Bedingungen der Aufgabe genügen kann, indem man die Winkelgeschwindigkeit von der Poldistanz unabhängig annimmt, so bleiben in der Differentialgleichung nur die Zeit und der Abstand vom Kugelmittelpunkte als unabhängige Variabele. Die Gleichung wird weiter auf neue Variable ξ, η transformirt, so dass von zweiten Differentialquotienten nur $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}$ vorkommt; und

auf die transformirte Gleichung wird dann ein analoges Verfahren angewandt, wie es zuerst von Riemann in seiner Abhandlung „Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite“ (Riemann, Gesammelte Werke p. 145) benutzt ist. Das so ermittelte Resultat wird unter einer speciellen Annahme über den Anfangszustand weiter discutirt, wodurch sich bemerkenswerthe Resultate ergeben, die unsere Vorstellung über die Ausbreitung der Schwingungen eines leuchtenden Punktes modificiren, die jedoch keinen Einfluss auf die Anwendungen haben, die man in der Optik von der Wirkung eines leuchtenden Punktes macht, da diese Anwendungen stets den Zustand in sehr grosser Entfernung von der Lichtquelle benutzen, und ohne ihn mit dem Zustand der Lichtquelle direct zu vergleichen.

Complicirter wird das Problem, wenn die Kugel gegebene geradlinige Schwingungen ausführt. Durch derartige Schwingungen entsteht in jedem ausserhalb der Kugel gelegenen Theilchen des Mediums eine Verrückung, die nicht der Schwingungsrichtung parallel ist. Die beiden Componenten dieser Verrückung parallel und senkrecht zur Schwingungsrichtung hängen von einer Hülfsveränderlichen ab; die für letztere geltende Differentialgleichung wird, wie oben, auf räumliche Polarcoordinaten transformirt und die Lösung der Differentialgleichung dann in eine nach Kugelfunctionen der Poldistanz fortschreitende Reihe entwickelt. Die Coefficienten der einzelnen Glieder der Reihe genügen nun einer partiellen Differentialgleichung mit nur zwei unabhängigen Variabeln, die sich wieder nach der Riemann'schen Integrationsmethode behandeln lässt. Aus der Hülfsveränderlichen ergeben sich dann mit Berücksichtigung der Incompressibilitätsbedingung die Componenten der Geschwindigkeit, ebenfalls in Reihen von Kugelfunctionen entwickelt. Für den physikalisch allein interessanten Fall, dass die Kugel wie eine starre oscillirt, verschwinden in dem Ausdruck für die Hülfsveränderliche alle Glieder mit Ausnahme derjenigen mit dem Index 1 der Kugelfunction. Das schliesslich sich ergebende Resultat zerfällt in zwei Theile, deren einer eine mit endlicher Geschwindigkeit sich ausbreitende Bewegung darstellt, die aber der Art nach nicht mit der gewöhn-

lichen Annahme übereinstimmt, während der zweite Theil eine mit unendlicher Geschwindigkeit sich ausbreitende Bewegung repräsentirt. Der letztere Term ist die Folge davon, dass sich die durch die Bewegung der Kugel veranlasste Druckänderung momentan durch das ganze Medium fortpflanzt. Der Aufsatz schliesst mit einer genaueren Discussion der oben erwähnten Bewegung. In beträchtlicher Entfernung von der Kugel werden die Schwingungen (die im Allgemeinen elliptisch sind) linear und senkrecht zum Radius. Die Wellenlänge ist nahezu constant.

Herr Kirchhoff zeigt, dass zur Lösung der von Herrn Voigt behandelten Aufgabe die Methode anwendbar ist, die er in seiner „Mechanik" (Vorlesung 23, § 4) benutzt hat, um die Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit zu bestimmen, die durch unendlich kleine Bewegungen einer in dieser befindlichen starren Kugel hervorgerufen wird; und dass diese Methode auch in dem optischen Problem viel schneller zum Ziele führt, als der von Herrn Voigt eingeschlagene Weg. Ohne Polarcoordinaten einzuführen, drückt Herr Kirchhoff die elastischen Verrückungen u, v, w nach dem Vorgange von Clebsch (Crelle LXI.) durch vier andere Grössen P, U, V, W aus:

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$

$$w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Diese vier Hülfsgrössen genügen alle einer Gleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = C^2 . \Delta\varphi,$$

nur dass bei P für C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a der longitudinalen, bei U, V, W dagegen diejenige b der transversalen Wellen zu nehmen ist. Auf den ersten der von Voigt behandelten Fälle kommt man, wenn man

$$P = 0, \quad U = 0, \quad V = 0, \quad W = \frac{1}{r} F(r-bt), \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

annimmt. Die Grenzbedingung für die Kugelfläche $r = R$ wird

$$\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} = f(t),$$

wo f gegeben. Hieraus bestimmt sich leicht die unbekannte Function F, und man erhält für den Drehungswinkel $\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}$ den von Herrn Voigt ermittelten Werth.

Im zweiten Falle setzt man

$$P = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad U = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial S}{\partial x}, \quad W = 0,$$

$$Q = \frac{1}{r}F(r-at), \quad S = \frac{1}{r}G(r-bt).$$

Die Grenzbedingungen bestehen hier darin, dass für $r = R$ $u = 0$, $v = 0$, $w = f(t)$, wo wieder f gegeben ist. Diese Bedingungen reichen aus, um die unbekannten Functionen F, G zu bestimmen; allerdings wird die Rechnung complicirter als im vorigen Falle. Die Resultate sind hier allgemeiner, als die von Herrn Voigt, insofern der letztere von vorneherein das Medium als incompressibel, also $a = \infty$ annimmt, während hier a beliebig bleibt. Wn.

W. Voigt. Zur Fresnel'schen Theorie der Diffraction. Borchardt J. LXXXIX. 322-331.

Die vorliegende Arbeit behandelt auf kürzerem Wege dasselbe Problem, das eine frühere Arbeit desselben Verfassers (cf. F. d. M. X. 1878, p. 702) auf umständlicherem Wege gelöst hatte, nämlich die Ableitung der Grundgleichung der Diffractionserscheinungen aus der Elasticitätstheorie. Zunächst wird kurz erörtert, dass der Fehler Fresnel's in einer falschen Berechnungsart der Wirkung einer leuchtenden Fläche liegt, oder noch allgemeiner in der Unhaltbarkeit des Princips von der Coexistenz kleiner Bewegungen in der gewöhnlichen Form. Sodann wird gezeigt, dass sich das Problem der Diffraction für den Fall, wo das aus grosser Entfernung kommende Licht durch eine in einem

ebenen Schirm befindliche Oeffnung hindurchgeht, während der Schirm normal zur Richtung der Lichtstrahlen ist, durch das folgende ersetzen lässt, indem man die Punkte der Oeffnung als leuchtend substituirt: Es ist zu bestimmen der Schwingungszustand im Mittelpunkte einer Kugel, wenn derselbe für ihre Oberfläche als Function der Zeit gegeben und im Anfang im ganzen Innern der Kugel Ruhe ist. Dies Problem wird folgendermassen behandelt. Ist das Medium incompressibel, so genügt jede der Componenten der Verrückung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \Delta f.$$

Man transformire diese Gleichung auf räumliche Polarcoordinaten und betrachte nur den Mittelwerth von f auf einer um den Anfangspunkt beschriebenen Kugelfläche (den gesuchten Werth im Anfangspunkte kann man auch als einen solchen Mittelwerth für eine unendlich kleine Kugel ansehen). Dieser Mittelwerth ist nur von der Zeit und dem Kugelradius abhängig; die für denselben geltende Differentialgleichung lässt sich nach der Riemann'schen Methode (cf. das vorige Referat) behandeln und führt, wenn man den gegebenen Schwingungszustand der Oeffnung als eine einfache periodische Function der Zeit annimmt, auf die Fresnel'sche Diffractionsgleichung, aber mit der richtigen Phase $\left(\text{d. h. ohne die falsche Fresnel'sche Phasenverzögerung von } \frac{\pi}{2}\right)$.

In einem Zusatze wird gezeigt, wie ausserordentlich kurz sich durch die hier angewandte Methode das allgemeine Problem lösen lässt, den Zustand eines unbegrenzten Mediums zu bestimmen, wenn in demselben zu Anfang beliebige Verrückungen und Geschwindigkeiten vorhanden sind, aber sonst keine Kräfte wirken.

Wn.

E. Maiss. Eine graphische Methode, die Entstehung des Kern- und Halbschattens zu erklären. Zeitschr. f. d. Realsch. V. 10-15.

Das Verfahren selbst bietet nichts besonders Neues, soweit

es sich auf die zeichnende Darstellung der Schattenverhältnisse für Schulzwecke beschränkt. Sodann aber tritt der Verfasser auch in die analytische Behandlung der Frage ein und stellt für die Beleuchtungsintensität B_p irgend eines Punktes auf dem Schirme die Formel

$$B_p = \frac{B_0}{d^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

auf, welche er einer Discussion unterzieht. φ ist hier der Einfallswinkel, B_0 die Intensität für den Einfallswinkel Null, r die Entfernung zwischen dem leuchtenden und dem beleuchteten Punkt (resp. Flächenelemente), d ist mit r durch die Gleichung $d = r\cos\varphi$ verknüpft und repräsentirt sonach die kürzeste Entfernung der als Lichtquelle vorausgesetzten leuchtenden Geraden vom Schirme. Gr.

Gouy. Sur la propagation de la lumière. C. R. XCI. 877-880.

A. Cornu. Sur la vitesse de propagation de la lumière. C. R. XCI. 1019-1024.

Herr Gouy meint, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem dispergirendem Medium sei nicht, wie man allgemein annimmt, $\frac{\lambda}{T}$, sondern gleich

$$\frac{\lambda}{T} - \lambda \frac{d\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{d\lambda}.$$

Herr Cornu deckt den Fehler in der Schlussweise des Herrn Gouy auf, der von einem willkürlich zurecht gemachten Begriff statt von der naturgemässen Definition der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ausgeht. Wn.

V. v. Lang. Bemerkungen zu Cauchy's Theorie der Doppelbrechung. Wien. Ber. LXXXI. 369-376. Wien. Anz. 1880. 56.

Es wird zunächst gezeigt, dass die Cauchy'sche Lichttheorie, so wichtig sie auch zur Erklärung der Dispersion ist, doch nicht

im Stande ist, die Doppelbrechung zu erklären, ja nicht einmal in den Hauptschnitten die Bewegung wiederzugeben. Nimmt man nämlich an, dass die Wellennormale in einem Hauptschnitt liegt, und zerlegt die Schwingung in drei Componenten, eine senkrecht zu dem genannten Hauptschnitt, die beiden andern in dem Hauptschnitt liegend und senkrecht zur Wellennormale, resp. derselben parallel, so müssen die Cauchy'schen Gleichungen für jede Componente gelten, und für jede muss daraus eine bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit folgen. Dadurch ergeben sich, wenn man alle Hauptschnitte in Betracht zieht, mit Benutzung der Beer'schen Bezeichnung (cf. Beer, Einleitung in die höhere Optik) zwischen den Coefficienten der Cauchy'schen Gleichungen die Beziehungen

$$p^2 = q^2 = r^2 = 3\mu^2 = 3\nu^2 = 3\pi^2.$$

Daraus folgt weiter, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der drei oben genannten Componenten gleich sind, d. h. dass keine Doppelbrechung vorhanden ist.

Sodann zeigt der Verfasser, wie die Cauchy'sche Theorie zu modificiren ist, um in Hinsicht der Doppelbrechung mit der Erfahrung übereinzustimmen. Diese Modification besteht darin, dass in den drei Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \Sigma f(\Delta r+\Delta\varrho)\,\frac{\Delta x+\Delta\xi}{\Delta r+\Delta\varrho}\,,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \Sigma f(\Delta r+\Delta\varrho)\,\frac{\Delta y+\Delta\eta}{\Delta r+\Delta\varrho}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \Sigma f(\Delta r+\Delta\varrho)\,\frac{\Delta z+\Delta\zeta}{\Delta r+\Delta\varrho}$$

nicht, wie Cauchy es thut, dieselbe Function f, sondern verschiedene Functionen f, f_1, f_2 (oder vielmehr dieselbe Function mit verschiedenen Zahlencoefficienten) angenommen werden. Begründet wird dies dadurch, dass die Aethertheilchen nicht völlig frei seien, sondern ihre Beweglichkeit durch die Körpertheilchen beeinflusst sei, und zwar in verschiedener Weise je nach der Axe. Entwickelt man die modificirten Gleichungen ganz in der Cauchy'schen Art, so fällt der oben hervorgehobene Einwand gegen die

Theorie fort; es ergiebt sich eine wirkliche Doppelbrechung. Von den obigen drei Componenten kann nun die longitudinale wegen ihrer verschiedenen Geschwindigkeit die transversalen Componenten nicht beeinflussen. Von diesen letzteren hat (da die Wellennormale in einem Hauptschnitt liegt) erfahrungsgemäss die eine constante Geschwindigkeit; man weiss jedoch nicht, wie diese schwingt, sondern nur, dass sie parallel dem Hauptschnitt polarisirt ist. Nimmt man an, dass die Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene geschehen, so ergiebt die Constanz der einen Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine neue Beziehung zwischen den Coefficienten der Bewegungsgleichungen. Entwickelt man dieselbe Beziehung für die übrigen Hauptschnitte, so folgen für die transversalen Componenten des Ausschlags genau die Fresnel'schen Formeln. Wn.

G. F. FITZGERALD. On the electromagnetic theory of the reflexion and refraction of light. Phil. Trans. CLXXI. 691-711.

Die Arbeit behandelt die elektromagnetische Theorie des Lichtes, die zuerst von Maxwell im zweiten Bande seines Werkes „Electricity and Magnetism“, Oxford 1873, aufgestellt ist. Maxwell betrachtet nur den Durchgang des Lichtes durch krystallinische magnetische Medien, lässt aber die Frage der Reflexion und Refraction unberührt. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit bemerkt nun, dass es von grosser Wichtigkeit sei, die Theorie auch auf die letztere Frage anzuwenden. Er gelangt dabei zu einer grossen Zahl von Resultaten, die er sowohl in Cartesischen Coordinaten, als mittels der Quaternionen darstellt. Einige der gefundenen Resultate sind in vollkommener Uebereinstimmung mit denen von Mc Cullagh's Theorie. Der Verfasser erwähnt ferner eine Arbeit von Kerr über die Reflexion an einer magnetischen Oberfläche (Phil. Mag. 1878) und zeigt, dass die darin mitgetheilten Beobachtungen in vollkommener Uebereinstimmung mit seinen theoretischen Resultaten sind. Er schliesst mit der Bemerkung, dass seine Untersuchung als eine Bestätigung der

Maxwell'schen elektromagnetischen Lichttheorie anzusehen ist. Obwohl in dieser Theorie noch einige Punkte einer weiteren Aufklärung bedürften, so habe durch dieselbe die Wissenschaft doch eine grosse Bereicherung erfahren, und wenn sie dazu führe, unsern Geist von der Sklaverei des materiellen Aethers zu emancipiren, so könne sie möglicherweise zu den wichtigsten Resultaten in der theoretischen Erklärung der Natur führen.

Cly. (Wn.)

J. J. Thomson. On Maxwell's theory of light. Phil. Mag. (5) IX. 284-292.

Nach der Maxwell'schen elektromagnetischen Lichttheorie besteht das Licht aus transversalen elektrischen Schwingungen. Ist die eine Componente einer solchen Schwingung $= \frac{\partial f}{\partial t}$, so gilt für ein ruhendes diëlektrisches Medium die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu K}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right).$$

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst im directen Anschluss an Maxwell (cfr. Electricity and Magnetism Bd. II.) die analogen Gleichungen für ein bewegtes diëlektrisches Medium aufgestellt. Für den Fall, dass das Medium sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit ohne Rotation bewegt, sind dieselben von der Form:

$$\frac{1}{\mu K}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + p\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial t}}{\partial x} + q\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial t}}{\partial y} + r\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial t}}{\partial z},$$

falls p, q, r die Geschwindigkeitscomponenten sind. Der Verfasser bemerkt ferner, dass, da die specifische Inductionscapacität, wie die Beobachtungen lehren, von der Geschwindigkeit abzuhängen scheint, mit der die elektrischen Schwingungen auf einander folgen, auch die Dispersion durch die Maxwell'sche Theorie erklärt sei.

Sodann wendet er sich zur Bestimmung der Amplituden des reflectirten und gebrochenen Strahles in einem ruhenden dïelektrischen Medium, wobei er folgende Grenzbedingungen zu Grunde legt: 1) Die senkrecht zur Trennungsfläche liegenden Componenten der elektrischen und magnetischen Verrückungen sind in beiden Medien dieselben. 2) Die der Trennungsfläche parallelen Componenten der elektrischen und magnetischen Kräfte sind gleich. Dann ergeben sich genau die Fresnel'schen Formeln für die Amplitude, nur dass die Intensität des in der Einfallsebene polarisirten gebrochenen Strahles im Verhältnis $\frac{\cos i}{\cos r}$ grösser ist, als bei Fresnel. (Uebrigens ist dieser Gegenstand schon früher vollständiger behandelt von Lorentz, vergl. F. d. M. IX. 1877. p. 711 ff.)

Endlich wird aus der oben angegebenen Gleichung der Schluss gezogen, dass die Geschwindigkeit des Lichtes in einem parallel der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes bewegten Medium um die halbe Geschwindigkeit jener Bewegung grösser ist, als im ruhenden Medium. Wn.

H. A. Lorentz. Ueber die Beziehungen zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und der Körperdichte. Pogg. Ann. (2) IX. 641-665.

Die von Maxwell aufgestellte elektromagnetische Theorie des Lichtes wurde bis jetzt nur auf die allgemeinen Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes, sowie auf die Vorgänge bei der Reflexion und Refraction angewandt. Behufs einer weiteren Vergleichung mit den Thatsachen hat der Verfasser untersucht, was sich aus derselben über den Zusammenhang zwischen dem Brechungsexponenten n und der Dichte d eines Körpers ableiten lässt. Zu dem Zwecke wird die Vorstellung zu Grunde gelegt, dass im unbegrenzten Aether eine sehr grosse Zahl von gleichen Molecülen in isotroper Anordnung zerstreut ist. Um jedes derselben sei eine kleine Kugel K gelegt, so dass ausserhalb dieser

Flächen der Aether die nämlichen Eigenschaften besitzt, wie im luftleeren Raume. Ueber den Stoff innerhalb der Kugeln wird angenommen, dass er sich, was die Wirkung nach aussen betrifft, durch ein einziges Molecül P im Mittelpunkte ersetzen lässt. Auf ein solches Theilchen wirke nun eine elektromotorische Kraft, deren Componenten X, Y, Z seien, und dadurch werde ein elektrisches Moment mit den Componenten m_x, m_y, m_z inducirt. Zwischen beiden mögen die einfachen Beziehungen stattfinden

$$(1) \qquad m_x = kX, \quad m_y = kY, \quad m_z = kZ,$$

wo k von der Natur der Molecüle abhängig ist. Elektrische Bewegungen in den Körpertheilchen werden sich nun auch von diesen aus in den Aether ausbreiten und in jedem Punkte desselben eine diëlektrische Polarisation hervorrufen, deren Componenten ξ, η, ζ durch die Gleichungen bestimmt werden

$$(2) \qquad \xi = \varepsilon_0 X, \quad \eta = \varepsilon_0 Y, \quad \zeta = \varepsilon_0 Z,$$

(ε_0 die Diëlektricitätsconstante des Aethers).

Es wird nun zunächst ein einzelnes Molecül P in der Mitte einer Höhlung K betrachtet. In demselben bestehe ein elektrisches Moment $m_x = f_1(t)$. Durch dasselbe entstehen in dem umgebenden Aether transversale und longitudinale elektrische Schwingungen, die sich resp. mit den Geschwindigkeiten v_0 und V_0 fortpflanzen. Für die transversalen Schwingungen wird die Annahme gemacht, dass sie dargestellt werden durch die folgenden mit den Gesetzen der Fortpflanzung elektrischer Schwingungen im freien Aether vereinbaren Gleichungen:

$$(3a) \qquad \begin{cases} \xi = -\alpha\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\dfrac{1}{r} f_1\left(t - \dfrac{r}{v_0}\right)\right], \\ \eta = \alpha \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\dfrac{1}{r} f_1\left(t - \dfrac{r}{v_0}\right)\right], \\ \zeta = \alpha \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[\dfrac{1}{r} f_1\left(t - \dfrac{r}{v_0}\right)\right], \end{cases}$$

während für die longitudinalen

$$(3b)\quad \begin{cases} \xi = \beta \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\dfrac{1}{r} f_1\left(t - \dfrac{r}{V_0}\right)\right], \\ \eta = \beta \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\dfrac{1}{r} f_1\left(t - \dfrac{r}{V_0}\right)\right], \\ \zeta = \beta \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[\dfrac{1}{r} f_1\left(t - \dfrac{r}{V_0}\right)\right] \end{cases}$$

ist, wo α und β Constante sind. Aehnliche Momente $m_y = f_2(t)$, $m_z = f_3(t)$ möge das Molecül P in der Richtung der y- und z-Axe besitzen, und die von diesem herrührenden elektrischen Bewegungen mögen durch dieselben Constanten α, β bestimmt werden.

Weiter wird gezeigt, dass, wenn von jedem Molecül mit den drei Momenten m_x, m_y, m_z aus sich Bewegungen von der Natur der durch die Gleichungen (3a) und (3b) dargestellten fortpflanzen, und wenn sich diese über den ganzen Raum ausserhalb der um das Molecül gelegten Kugel erstrecken, zur Unterhaltung dieser Bewegung in jedem Theilchen ein Moment und ein Stromelement erforderlich sind, deren x-Componenten für sehr kleine Werthe des Kugelradius

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right)m_x, \quad \text{resp.} \quad (2\alpha-\beta)\frac{4}{3}\pi\,\frac{\partial m_x}{\partial t}$$

sind. Hätten aber jene Bewegungen die eben genannte Ausbreitung, so würde auch noch innerhalb jeder Kugel K eine diëlektrische Polarisation bestehen, für welche jedes Molecül mit Ausnahme des in der Kugel selbst liegenden einen Beitrag liefert. Die Componenten ξ', η', ζ' dieser Polarisation haben für kleine Radien ϱ der Kugel überall innerhalb der Kugel denselben Werth. Für den Mittelpunkt einer Kugel kommt daher zu den oben berechneten noch ein Moment und ein Stromelement hinzu, deren x-Componenten

$$\frac{4}{3}\pi\varrho^3\xi', \quad \text{resp.} \quad \frac{4}{3}\pi\varrho^3\frac{\partial \xi'}{\partial t}$$

sind. Da das gesammte Moment im Kugelmittelpunkte m_x sein soll, so ergeben sich für jedes Molecül die Gleichungen:

$$(4\alpha)\qquad (\alpha+\beta)\left(\frac{8}{3}\pi+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)m_x+\frac{4}{3}\pi\varrho^3\xi'=m_x,$$

$$(4\beta)\qquad (2\alpha-\beta)\frac{4}{3}\pi\frac{\partial m_x}{\partial t}+\frac{4}{3}\pi\varrho^3\frac{\partial\xi'}{\partial t}=\frac{\partial m_x}{\partial t},$$

wozu wegen der Bedingung (1) noch die weitere tritt

$$(4\gamma)\qquad k\left[(\alpha+\beta)\frac{8}{3}\pi\frac{m_x}{\varrho^3}+\frac{\xi'}{\varepsilon_0}+\frac{4}{3}\pi\xi'\right]=m_x;$$

analoge Gleichungen wie die hingeschriebenen bestehen für die Componenten m_y, m_z.

Den eben aufgestellten Bedingungen kann nun genügt werden durch eine Fortpflanzung transversaler Schwingungen, d. h. durch einen Bewegungszustand, der den Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} m_x=f_1(x,y,z,t),\quad m_y=f_2(x,y,z,t),\quad m_z=f_3(x,y,z,t),\\ \dfrac{\partial m_x}{\partial x}+\dfrac{\partial m_y}{\partial y}+\dfrac{\partial m_z}{\partial z}=0,\\ \Delta m_x=\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 m_x}{\partial t^2},\quad \Delta m_y=\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 m_y}{\partial t^2},\quad \Delta m_z=\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 m_z}{\partial t^2},\\ \Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \end{cases}$$

genügt; dabei sind f_1, f_2, f_3 stetige Functionen, die bei wachsender Entfernung rasch abnehmen. Um die eben aufgestellten Werthe zu prüfen, werden für den Mittelpunkt einer Kugel K die Grössen ξ', η', ζ' aus (3a), resp. (3b) berechnet, und zwar trägt der Mittelpunkt jeder anderen Kugel (ausser der grade betrachteten) zur Bildung von ξ' bei, so dass über alle diese Mittelpunkte zu summiren ist. Wird noch die weitere Voraussetzung hinzugefügt, dass m_x, m_y, m_z sich von Molecül zu Molecül nur sehr langsam ändern, was bei der Lichtbewegung der Fall sein wird, wenn die Wellenlänge gegen die Entfernung zweier Nachbarmolecüle sehr gross ist, so lässt sich die Summation in eine Integration über den Raum ausserhalb einer gewissen Kugel verwandeln. Die Umformung dieses Integrals liefert die Werthe

$$(6) \qquad \xi' = q m_x, \quad \eta' = q m_y, \quad \zeta' = q m_z,$$
$$q = \frac{4}{3}\pi p\left(\alpha \frac{n^2+2}{n^2-1} + \beta\right),$$

wobei $n = \frac{v_0}{v}$ der absolute Brechungsexponent des betrachteten Mediums ist, ferner p die Anzahl der Molecüle in der Raumeinheit, also $p = \frac{d}{m}$, wenn man unter d die Dichtigkeit des Mediums, unter m die Masse eines Molecüls versteht. Aus den Bedingungen (4) erhält man dann α, β, q durch ϱ, ε_0, k ausgedrückt, und nach Elimination von α, β folgt

$$\frac{n^2-1}{(n^2+2)d} = k = \frac{4}{3}\frac{\pi\varrho^3}{m}\frac{(3+4\pi\varepsilon_0)-4\pi\varepsilon_0\frac{\varrho^3}{k}}{(3+8\pi\varepsilon_0)\frac{\varrho^3}{k}-8\pi\varepsilon_0}.$$

Variirt nun die Dichte der betrachteten Körper, und bleiben dabei die Molecüle ungeändert, so bleibt auch k constant, also

$$(7) \qquad \frac{n^2-1}{(n^2+2)d} = \text{Const.}$$

Für eine Mischung wird ohne Beweis angegeben, dass auch hier $\frac{n^2-1}{(n^2+2)d}$ einen constanten Werth haben muss, und dass zwischen diesem und den analogen Constanten $\frac{n_1^2-1}{(n_1^2+2)d_1}$, $\frac{n_2^2-1}{(n_2^2+1)d_2}$ etc., welche sich auf die Bestandtheile der Mischung beziehen, die Relation

$$(8) \qquad \frac{n^2-1}{(n^2+2)d} = a_1\frac{n_1^2-1}{(n_1^2+2)d_1} + a_2\frac{n_2^2-1}{(n_2^2+2)d_2} + \cdots$$

bestehen muss. Dabei sind a_1, a_2 etc. die in der Gewichtseinheit vorhandenen Mengen der Bestandtheile.

Die Ursachen der Farbenzerstreuung sucht der Verfasser nicht in der Anordnung, sondern in der Beschaffenheit der Molecüle. Durch gewisse Annahmen über letztere sucht er es wahrscheinlich zu machen, dass in den früheren Formeln k nicht con-

stant, sondern als eine Function der Schwingungsdauer T anzusehen ist.

Den Schluss der Arbeit bildet die Prüfung obiger Formeln an Beobachtungen. Die Uebereinstimmung ist keine besonders gute. Wn.

E. KETTELER. Theorie der absorbirenden anisotropen Mittel. Carl Rep. XVI. 335-371.

Ueber diese Arbeit ist schon im vorigen Jahre referirt (F. d. M. XI. 1879. p. 738). Wn.

E. KETTELER. Das Dispersionsgesetz. Carl Rep. XVI. 221-231.

Die Gleichung für die Schwingung des Weltäthers, der in der z-Richtung von ebenen Wellen durchsetzt wird, ist bekanntlich

$$m\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2} = e\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2} \quad \text{oder auch} \quad m\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}\partial s = e\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}\partial s,$$

wenn ∂s das während der Zeit ∂t durchlaufene Wegelement ist. Der Verfasser denkt sich nun die Masse m des Aethers noch durch eine fremde mitschwingende Masse m' vermehrt. Die Deformationsarbeit des Aethers vertheilt sich dann auf die Aethermasse m und die Körpermasse m', und die letztere wird in Excursionen von der mittleren Grösse ϱ' in Mitschwingung versetzt, wobei sie während der Zeit ∂t die mittlere Wegstrecke $\partial s'$ zurücklege. Nun wird als Princip aufgestellt, dass die Schwingungsarbeit des intermolecularen Aethers eines Mittels, gemessen durch die Deformation desselben, gleich ist der Summe der Schwingungsarbeiten der Aether- und Körpertheilchen, dieselben gemessen durch die Beschleunigung. Dies giebt

$$\text{(I)} \quad m\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}\partial s + m'\frac{\partial^2\varrho'}{\partial t^2}\partial s' = e\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}\partial s.$$

Ferner wird als zweites Grundprincip angenommen, dass auch die Schwingungsarbeit der Körpertheilchen eines Mittels,

gemessen durch die Molecularkräfte desselben, gleich sein muss der Summe der Schwingungsarbeiten der Aether- und Körpertheilchen, dieselben gemessen durch die Beschleunigungen. Dies giebt, wenn man noch eine Art Reibung hinzunimmt, die die Bewegung der Körpertheilchen dämpft, die Gleichung

$$\text{(II)} \qquad m\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2}\,\delta s + m'\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2}\,\delta s' = -\left(k'\varrho' + \gamma'\frac{\partial \varrho'}{\partial t}\right)\delta s'.$$

Diese beiden Gleichungen bilden die Grundlage der Theorie. Dazu kommt die Annahme, dass in Gleichung (I)

$$\delta s : \delta s' = \mathfrak{A} : \mathfrak{A}',$$

in Gleichung (II) dagegen

$$\delta s : \delta s' = f.\mathfrak{A} : \mathfrak{A}',$$

falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ die Amplituden sind. Man sucht nun den Gleichungen zu genügen durch

$$\varrho = \mathfrak{A} e^{\frac{2\pi}{\lambda} b z} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{a z}{\lambda}\right)\right],$$

$$\varrho' = \mathfrak{A}' e^{\frac{2\pi}{\lambda} b z} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{a z}{\lambda}\right) - \varDelta\right],$$

wo a und b als die Charakteristiken des complexen Brechungsverhältnisses $n = a + b\sqrt{-1}$ zu betrachten sind. Bezeichnet man noch mit v die Lichtgeschwindigkeit im Weltäther, also $e = mv^2$, setzt ferner

$$\frac{4\pi^2 m'}{k'} = \frac{\lambda_m^2}{v^2} = T_m^2, \qquad \frac{2\pi\gamma'}{k'} = \frac{\delta}{v},$$

so wird

$$\text{(III)} \qquad n^2 - 1 = \frac{D\lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2 - \sqrt{-1}\,.\,\delta\,.\,\lambda},$$

wo D eine Constante ist. Dieser Ausdruck repräsentirt das Dispersionsgesetz der optisch einfachen Mittel, d. h. derer mit nur einem Absorptionsstreifen. Er spaltet sich ohne Weiteres in die beiden folgenden:

$$\text{(IV)} \qquad a^2 - b^2 - 1 = \frac{D\lambda_m^2(\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + \delta^2\lambda^2}, \qquad 2ab = \frac{D\lambda_m^2\,\delta\lambda}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + \delta^2\lambda^2},$$

Gleichungen, durch welche die wesentlichen Eigenschaften der Refractions- und Absorptionscurve dargestellt werden. Es folgt eine kurze Discussion der oben genannten Curven. Zum Schluss wird darauf hingewiesen, dass bei nicht einfachen Mitteln n^2-1 aus einer Summe derartiger Ausdrücke besteht, wie die rechte Seite von (II).

Die Begründung der Grundgleichungen erscheint dem Referenten nicht einwurfsfrei. Wn.

E. Ketteler. Constructionen zur anomalen Dispersion. Pogg. Ann. (2) XI. 210-217.

Graphische Darstellung der Gleichungen (IV) der vorhergehenden Arbeit. a^2, als Function von λ betrachtet, wird durch die Refractionscurve, b^2 durch die Absorptionscurve dargestellt. Der Verfasser giebt eine ziemlich einfache angenäherte Construction beider Curven, durch welche dieselben zur unmittelbaren Anschauung gebracht und unter möglichst verschiedenen Bedingungen verfolgt werden. Wn.

O. Hesse. Untersuchungen über das Dispersionsgesetz. Pogg. Ann. (2) XI. 871-908.

Die wesentlich experimentelle Arbeit vergleicht die von Ketteler aufgestellten Dispersionsformeln (cf. die beiden vorhergehenden Referate) mit der Erfahrung. Daneben finden sich historische Notizen über Entwickelung der Dispersionstheorie, sowie einige theoretische Ueberlegungen über die Intensität des Lichtes, das im Innern einer absorbirenden Schicht mehrmals reflectirt ist. Wn.

E. Ketteler. Zur Vervollständigung der Reflexion. Carl Rep. XVI. 261-282.

Der Verfasser zeigt im ersten Theile seiner Arbeit, dass die Fresnel'schen Gesetze der Totalreflexion einen speciellen Fall der

Gesetze der Reflexion an absorbirenden Mitteln bilden. Zur Vereinfachung der Behandlung knüpft er an die Einrichtung des Kohlrausch'schen Totalreflectometers an und beschränkt sich auf eine Combination zweier Mittel, von denen das erstere, optisch dichtere, durchsichtig ist; sein constantes absolutes Brechungsverhältnis heisse n_1 und der Einfallswinkel e. Das zweite, optisch dünnere, Mittel sei absorbirend; sein variabler Brechungscoefficient heisse ν, sein variabler Extinctionscoefficient q. (Nach Herrn Ketteler's Ansicht werden nämlich für absorbirende Medien ν und q variabel.) Wendet man dann die vom Verfasser in einer früheren Arbeit für ein absorbirendes Medium abgeleiteten Differentialgleichungen an (cf. Fort. d. Phys. XXXII. p. 488—494), so ergeben sich für die Amplitude $\mathfrak{R}$ und die Phasenverzögerung χ des reflectirten Strahles folgende Gleichungen, in denen die angehängten Zeichen s und p die Fälle unterscheiden, in denen die einfallende Schwingung senkrecht oder parallel zur Einfallsebene vor sich geht:

$$\mathfrak{R}_s^2 = \frac{(p-n_1\cos e)^2+q^2}{(p+n_1\cos e)^2+q^2}\,\mathfrak{E}_s^2,$$

$$\operatorname{tg}\chi_s = \frac{2qn_1\cos e}{p^2+q^2-n_1^2\cos e},$$

$$\mathfrak{R}_p^2 = \frac{[pn_1-(a^2-b^2)\cos e]^2+[qn_1-2ab\cos e]^2}{[pn_1+(a^2-b^2)\cos e]^2+[qn_1+2ab\cos e]^2}\,\mathfrak{E}_p,$$

$$\operatorname{tg}\chi_p = \frac{2qn_1\cos e[n_1^2\sin^2 e-(p^2+q^2)]}{n_1^2(p^2+q^2)-(a^2+b^2)^2\cos^2 e}.$$

Darin ist, wenn r der Brechungswinkel, also

$$\sin e = \frac{\nu}{n_1}\sin r$$

ist,

$$p = \nu\cos r,$$

während a und b die Specialwerthe von ν und q für senkrechte Incidenz ($e = 0$) sind (cf. die oben citirte frühere Arbeit). Das Zustandekommen der totalen Reflexion ist geknüpft an die Bedingung $r = 90^0$ oder $p = 0$. Der Verfasser untersucht ein-

gehend die einzelnen Specialfälle, für welche diese Bedingung erfüllbar ist. Das ist I) der Fall für $b = 0$. Liegt dann e zwischen den Grenzen, die durch die Gleichungen

$$n_1 \sin e = a \quad \text{und} \quad n_1 \sin e = n_1$$

bestimmt sind, so gehen die obigen Formeln, falls man noch $\frac{n_1}{a} = n$ setzt, genau in die von Fresnel für totale Reflexion gefundenen Ausdrücke über. II) $a = 0$, in welchem Falle bei senkrechter Incidenz die Wellenberge und Wellenthäler durch unendliche Streckung verschwinden. Für derartige Mittel ist bei allen Incidenzen $p = 0$, so dass die Reflexion derselben stets total ist. Das Silber kommt von allen untersuchten Substanzen diesem Grenzfall am nächsten. III) $a = 0$, $b = 0$ (Green'scher Grenzfall, da Green mit seiner Zuziehung die elliptische Polarisation der durchsichtigen Medien zu erklären versucht hat).

Der zweite Theil der Arbeit behandelt die ausgezeichneten Einfallswinkel der Metallreflexion. Der Verfasser stellt die in der oben citirten früheren Arbeit gefundenen Formeln zusammen, formt dieselben um und fügt die Ausdrücke für die Intensität und Phasenänderung des gespiegelten Lichtes hinzu. Er wendet dieselben dann an auf senkrechte Incidenz, streifende Incidenz, auf die Incidenz des Haupteinfallswinkels

$$(e + \mathfrak{r} = 90^0, \quad \text{wo} \quad \sin e = \sqrt{\nu^2 + q^2} \sin \mathfrak{r}),$$

auf den Brewster'schen Winkel

$$e + r = 90^0 \quad (\sin e = \nu \sin r),$$

auf den Hauptphasenwinkel der senkrechten Schwingungen (für den die Phasenverzögerung $\chi_s = 90^0$), auf den Hauptphasenwinkel der parallelen Schwingungen (für den $\chi_p = 90^0$). Die einzelnen hier mitgetheilten Formeln mögen in der Arbeit selbst nachgesehen werden. Erwähnt werden mag noch, dass die Grundvorstellung des Verfassers über Reflexion an einem absorbirenden Medium dahin geht, dass die Lichtschwingungen auf der im Weltäther reflectirten Welle transversal elliptisch, dagegen auf der zugehörigen gebrochenen Welle longitudinal elliptisch

sind, was der Verfasser mit dem Princip der Incompressibilität des Aethers für verträglich hält. Wn.

R. F. GLAZEBROOK. On the reflexion and refraction of light. Proc. of Cambr. III. 329-339.

In seiner Arbeit über Reflexion und Refraction des Lichtes nimmt Green an, dass auf den Aether keine andern Kräfte wirken, als die, welche von der relativen Verschiebung der einzelnen Theilchen herrühren. Kirchhoff dagegen legt in seiner Arbeit über die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze krystallinischer Medien (cf. F. d. M. VIII. 1876. p. 647) die Annahme zu Grunde, dass auf die Grenzfläche der beiden betrachteten Medien noch ein fremder Druck von solcher Beschaffenheit wirkt, dass die Arbeit der schwingenden Aethertheilchen in Folge dieses Druckes verschwindet. In der vorliegenden Arbeit nun geht der Verfasser von denselben Annahmen aus und discutirt genauer den Fall zweier isotroper Medien, wobei er sich eng an Kirchhoff anschliesst. Glr. (Wn.)

M. RÉTHY. Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze von homogenen, isotropen, durchsichtigen Körpern mit Verallgemeinerung und Erweiterung der Grundlage der Neumann'schen Methode. Pogg. Ann. (2) XI. 121-133.

Die gemeinsame Grundlage aller bisher aufgestellten Reflexionstheorien bildet das Fresnel'sche Continuitätsgesetz, das bezeichnender die Hypothese von der Erhaltung der Vibrationsgeschwindigkeit genannt werden könnte. Das Gesetz sagt aus, dass gegenüberliegende Grenzpunkte der beiden Aethermassen der Grösse und Richtung nach gleiche Vibrationsgeschwindigkeit besitzen. Dieses Continuitätsprincip hält der Verfasser für eine willkürliche Hypothese und setzt an deren Stelle folgende allgemeinere, die er als Hypothese von der Erhaltung der Vibrationsrichtung bezeichnet: „Geht die Lichtbewegung von einem Körper

in einen andern über, so ist die Richtung der Vibrationsgeschwindigkeiten in gegenüberliegenden Grenzpunkten unverändert dieselbe, das Grössenverhältnis hingegen im Allgemeinen nicht gleich 1, sondern irgend eine Function des Brechungsexponenten."

Ist z die Normale der Trennungsfläche, xz die Einfallsebene, sind ferner u, v, w die Componenten der Vibrationsgeschwindigkeiten der einfallenden, u_r, v_r, w_r die der reflectirten, u_1, v_1, w_1 die der gebrochenen Welle, so ergiebt das obige Princip, falls noch mit $\nu:\nu_1$ das Verhältnis der resultirenden Vibrationsgeschwindigkeiten auf beiden Seiten der Grenze bezeichnet wird:

$$(1) \quad \nu_1(u+u_r) = \nu u_1, \quad \nu_1(v+v_r) = \nu v_1, \quad \nu_1(w+w_r) = \nu w_1.$$

Diese Gleichungen, in Verbindung mit dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft, geben, wenn man die Entstehung longitudinaler Wellen ausschliesst, genau die Neumann'schen Ausdrücke für die Amplituden der reflectirten und gebrochenen Strahlen; nur ist den Neumann'schen Ausdrücken für die Amplituden der gebrochenen Strahlen noch der Factor $\frac{\nu_1}{\nu}$ hinzuzufügen. Nimmt man also schliesslich mit Neumann an, dass die Schwingungen in der Polarisationsebene vor sich gehen, so sind die Resultate auch mit der Erfahrung in Einklang. Von jeder Hypothese in Bezug auf Aenderung der Dichtigkeit und Elasticität des Aethers beim Uebergange von einem Medium zum andern ist die vorliegende Theorie frei. Nebenbei ergiebt sich, wenn man mit μ und μ_1 die Dichtigkeiten im ersten und zweiten Medium bezeichnet,

$$(2) \quad \nu_1^2:\nu^2 = \mu:\mu_1.$$

Um auch die bei theilweiser Reflexion eintretende elliptische Polarisation zu erklären, bedarf es einer weiteren Hypothese. Betrachtet man zunächst nur die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene, nennt B, B_r, B_1 die Amplituden derselben, φ und φ_1 Einfalls- und Brechungswinkel und nimmt an, dass der reflectirte und gebrochene Strahl an der Grenzfläche Phasenverzögerungen erleiden, resp. gleich δ_r und δ_1, so ergeben die obigen Principien (die für $\delta_r = 0$, $\delta_1 = 0$ auf die Neumann'schen Formeln führten) nur drei Gleichungen zur Bestimmung von B_r, B_1, δ_r, δ_1,

oder, nach Elimination von B_1, δ_1 die eine Gleichung zwischen B, B_r, δ_r:

$$(3)\quad l_1 B_r^2 + 2B_r B\cos\delta_r + m_1 B^2 = 0,$$

$$l_1 = 1 + \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi_1},\quad m_1 = 1 - \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi_1}.$$

Um eine zweite Gleichung zu erhalten, berechnet der Verfasser die Tangentialcomponente Y_z des durch die Lichtbewegung entstehenden inneren Druckes für einen Punkt der Grenzfläche des einen und des andern Mediums. Die Differenz zwischen den Druckcomponenten in beiden Medien sieht er als Mass für den durch die wägbare Materie auf die Einheit der Grenzfläche ausgeübten Druck, den sogenannten fremden Grenzdruck, an. Dieser ist, wenn allein Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene stattfinden, und wenn K und K_1 die Elasticitätscoefficienten beider Medien bezeichnen,

$$(4)\quad P = \left\{K\frac{\partial(v+v_r)}{\partial z} - K_1\frac{\partial v_1}{\partial z}\right\}_{z=0}.$$

Die Hülfshypothese besteht nun in der Annahme, dass dieser fremde Grenzdruck nur bei solchen Körpern gleich Null ist, denen die Ellipticitätsconstante Null zukommt. Ist aber elliptische Polarisation vorhanden, so ist P von Null verschieden. Man findet dann, dass der Maximalwerth von P ist:

$$(5)\quad p = \frac{1}{a^2\sin^2\varphi}[(mB - lB + \cos\delta_r)^2 + l^2 B_r^2 \sin^2\delta_r],$$

wobei

$$l = \sin 2\varphi + \sin 2\varphi_1,\quad m = \sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1,\quad a = \frac{\lambda}{\pi K}$$

sind. Nimmt man diesen Maximalwerth p als bekannt an, so hat man eine zweite Gleichung, die mit (3) zusammen B_r und δ_r ergiebt, nämlich für $B = 1$:

$$(6)\quad \begin{cases} B_r^2 = \dfrac{m^2}{l^2}\left[1 + \dfrac{a^2 p^2 \sin^2\varphi \sin 2\varphi_1}{m^2 \sin 2\varphi}\right], \\ B_r \cos\delta_r = \dfrac{m}{l}\left[1 + \dfrac{a^2 p^2 \sin^2\varphi}{2m \sin 2\varphi}\right]. \end{cases}$$

Hieraus findet der Verfasser, wenn p sehr klein ist und höhere Potenzen von ap vernachlässigt werden,

$$(7)\quad \operatorname{tg}\delta_r = \pm \frac{ap\sin\varphi}{\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1}\sqrt{\frac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi}}$$
$$= \pm \operatorname{tg}(\varphi+\varphi_1)\frac{a_1 p}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi}},$$

wo

$$a_1 = \frac{a}{2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$$

ist. [Richtiger müsste es statt $\sqrt{\frac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi}}$ heissen $\sqrt{\frac{2\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}}$.] Die Gleichung (7) ist mit der Cauchy'schen, resp. Green'schen Formel identisch, wenn man

$$a_1 p = \varepsilon \sin^2\varphi \sqrt{\frac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi}},\quad \text{resp.}\quad a_1 p = \varepsilon \sin\varphi \sqrt{\frac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi}}$$

setzt, wo ε die Jamin'sche Ellipticitätsconstante bedeutet.

Die Hülfshypothese führt nebenbei für $\delta_r = 0$, $\delta_1 = 0$ auf folgende Relation zwischen Elasticitäts- und Brechungsexponent:

$$(8)\quad \frac{K\nu}{\sin^2\varphi} = \frac{K_1\nu_1}{\sin^2\varphi_1}.$$

Für Schwingungen parallel der Einfallsebene ergiebt sich leicht, dass der Maximalwerth einer dem oben genannten fremden Druck entsprechenden Componente sich als lineare Function der Amplituden im einfallenden, reflectirten und gebrochenen Lichte darstellt, wo die Coefficienten von der Form $k\cos 2\varphi$ sind. Der Verfasser macht weiter die folgende Hülfshypothese: Man nehme an, dass der Ausdruck des Maximalwerthes unverändert bleibt, auch wenn die Vibrationen senkrecht zur Einfallsebene erfolgen, nur dass an Stelle der k andere physikalische Constanten treten. Dadurch wird man direct zu den abgekürzten Cauchy'schen Formeln geführt.

Die totale Reflexion wird auf Grundlage derselben Grenzbedingungen auf dieselbe Weise dargestellt, wie nach der Neumann'schen Methode, nur dass wieder $\frac{\nu}{\nu_1}B_1$ an Stelle von B_1 tritt.

Besondere Wichtigkeit legt der Verfasser den Gleichungen (2) und (8) bei. Durch die oben auseinandergesetzte Verallgemeinerung der Grenzbedingungen glaubt der Verfasser die Einwände gegen Neumann's Reflexionstheorie beseitigt zu haben.

Wn.

R. Hofer und M. Kuhn. Durchschnittsmodelle zur Demonstration der Reflexion an sphärischen Spiegeln und der Strahlenbrechung an Linsen. Zeitschr. f. d. Realsch. V. 604-608.

Diese vier Modelle des Convex- und Concavspiegels, der Biconvex- und Biconcavlinse dürften als einfaches und wenig kostspieliges Lehrmittel sich bald Eingang beim Unterrichte in der Optik verschaffen.

Gr.

F. E. Scheller. Zur Behandlung der Linsentheorie an Realschulen. Zeitsch. f. d. Realsch. V. 450-460.

Versuch einer popularisirenden Darstellung jener etwas complicirten Untersuchungen über den Durchgang des Lichtes durch Linsengläser, welche von Helmholtz und Wüllner angestellt worden sind.

In demselben Bande der Zeitschrift (S. 664—666) kritisirt E. Maiss die Scheller'sche Methode, welche seiner Meinung nach in ihrem Bestreben, recht kurz zu sein, gewisse wichtige Punkte unerörtert lässt.

Gr.

L. Lorenz. Ueber die Refractionsconstante. Pogg. Ann. (2) XI. 70-103.

Unter der Refractionsconstante versteht der Verfasser den folgenden Ausdruck

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}\cdot v.$$

Darin ist A der von der Dispersion befreite Brechungsquotient eines Mediums (d. h. der Brechungsquotient für unendlich grosse

Wellenlängen), v das Volumen des betrachteten Körpers. Von diesem Ausdruck leitet der Verfasser das Resultat ab, dass derselbe ungeändert bleibt bei einer Aenderung des Volumens des Körpers, mag dieselbe von einer Temperaturänderung begleitet sein oder nicht. Der Ableitung legt der Verfasser eine eigenthümliche, von ihm früher [Pogg. Ann. CXVIII. (1863), CXXI. (1864)] entwickelte Theorie zu Grunde, die aber bisher noch von keinem andern Autor acceptirt ist. Die hier ohne Ableitung mitgetheilten Grundgleichungen für die Lichtschwingungen lauten:

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

wozu noch zwei analoge Gleichungen kommen, die durch cyklische Vertauschung von ξ mit η und ζ entstehen. ω ist hierbei die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die im leeren Raume constant ist, während sie im Innern der homogenen Körper in eine sehr schnell wechselnde periodische Function der Coordinaten übergehen soll. Für die Lösung der eben genannten Differentialgleichungen wird die Form angenommen

$$(2) \qquad \xi = (\xi_0 + \xi_2)\cos[kt - lx - my - nz - d] + \xi_1 \sin[kt - lx - my - nz - d],$$

und analog für η und ζ. Darin werden ξ_0, η_0, ζ_0 ebenso wie k, l, m, n, d als constante Grössen angenommen, während ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2 periodische Functionen von x, y, z darstellen, deren mittlere Werthe gleich Null sind. Durch Einsetzen der Ausdrücke (2) in die Gleichungen (1) ergiebt sich eine Beziehung zwischen ξ_0 und ξ_2, die sich vereinfacht, wenn man über das Volumen des ponderablen Körpers integrirt und durch das Volumen dividirt. Die Ausführung der Integration geschieht unter der Annahme, dass der homogene Körper aus kugelförmigen Molekülen besteht, deren Zwischenräume durch den Weltäther ausgefüllt sind. In diesen Zwischenräumen hat ω denselben Werth, wie im leeren Raume, während innerhalb der Moleküle ω einen andern Werth hat. Aus der auf diese Weise gewonnenen Gleichung ergiebt sich das oben besprochene Resultat. Die in der Arbeit mitgetheilten Formeln (es ist grösstentheils nur der Gang der Rechnung angegeben) scheinen dem Referenten nicht

überall correct zu sein. Er glaubt, dass sowohl die Grundvorstellungen des Verfassers, als die hier mitgetheilte Ableitung zu erheblichen Bedenken Anlass geben.

Der grösste Theil der Arbeit ist der experimentellen Untersuchung der Refractionsconstante gewidmet. Wn.

Lord Rayleigh. Investigations in optics with special reference to the spectroscop. Phil. Mag. 1880.

Diese Fortsetzung einer früheren Arbeit behandelt die Aberration der Linsen und Prismen in einem Spectroskop.

Csy. (Wn.)

Lord Rayleigh. On the minimum aberration of a lens for parallel rays. Proc. of Cambr. III. 373-375.

Es ist oft behauptet worden, dass Linsen aus Diamant oder andern Edelsteinen, die ein hohes Brechungsvermögen besitzen, eine fast verschwindende Aberration haben. In seiner Optik behauptet Coddington, dass der kleinste Werth der Aberration für $n=2$ gleich $\frac{1}{16}\frac{y^2}{f}$ ist. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit findet nun, dass in dem eben genannten Falle der Coefficient $\frac{7}{16}$, und nicht $\frac{1}{16}$ ist, dass ferner, obwohl die Aberration mit wachsendem n kleiner wird, sie doch für alle in der Natur bekannten Substanzen beträchtlich bleibt. Ferner wird bemerkt, dass es nahe liegt, den Vortheil des höheren Brechungsvermögens darin zu suchen, dass ein solches die Anwendung geringerer Krümmungen gestattet. Aus der Untersuchung geht indess hervor, dass, wenn n wächst, die Krümmungsradien der Linse für das Minimum der Aberration nicht dem Werthe Unendlich zustreben, sondern sich dem endlichen Werthe f nähern.

Glr. (Wn.)

Lord Rayleigh. On reflection of vibrations at the confines of two media between which the transition is gradual. Proc. L. M. S. XI. 51-56.

Der Verfasser untersucht den Vorgang an der Grenze zweier durchsichtiger Medien für den Fall, dass nicht ein plötzlicher Uebergang des einen in das andre stattfindet, sondern ein allmälicher, durch eine Zwischenschicht von continuirlich veränderlicher Dichtigkeit vermittelter. In Bezug auf die Aenderung der Dichtigkeit wird von vorne herein die specielle Annahme gemacht, dass dieselbe proportional ist x^{-2}, falls x die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes ist. Führt man diese veränderliche Dichtigkeit statt der constanten in die Differentialgleichung für die Lichtbewegung ein, so ergiebt sich für die Schwingung eine Gleichung der Form

$$y = Cx^{\frac{1}{2}}\cos(pt - m\lg x + \varepsilon).$$

Es wird nun weiter angenommen, dass die Uebergangsschicht nur von $x = x_1$ bis $x = x_2$ reiche, während auf beiden Seiten die Dichtigkeit constant ist, und unter dieser Annahme das Verhältnis der reflectirten und gebrochenen Amplitude berechnet. Dabei ergiebt sich, dass eine nennenswerthe Reflexion nur stattfindet, falls die Dicke der Uebergangsschicht klein gegen die Wellenlänge ist. Wn.

M. Réthy. Ueber die Polarisation des gebeugten Lichts. Pogg. Ann. (2) XI. 504-512.

Der Verfasser betrachtet die durch die folgenden beiden particulären Lösungen der Differentialgleichungen der Elasticität dargestellten transversalen Schwingungen:

$$(1)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad v = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad w = 0, \\ \varphi = \dfrac{A}{r}\cos 2\pi\left(\dfrac{r}{\lambda} - \dfrac{t}{T} + \delta\right); \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}, \quad v = -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}, \quad w = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \\ \varphi = \dfrac{A'}{r}\sin 2\pi\left(\dfrac{r}{\lambda} - \dfrac{t}{T} + \delta\right), \end{cases}$$

wobei r die Entfernung des schwingenden Punktes von irgend einem festen Punkte ist. Der typische Unterschied zwischen beiden Arten von Wellen ist der, dass im ersten Fall die Vibrationen, im zweiten aber die Normalen der Vibrationsebenen (d. h. der Ebenen, die dem Strahl und der Schwingungsrichtung parallel sind) auf einer bestimmten Richtung senkrecht stehen.

Nimmt man an, dass die einzelnen Elemente der durchsichtigen Stellen eines Gitters Kugelwellen aussenden von dem Charakter einer der beiden obigen Arten, und dass die Polaraxen für sämmtliche Elementarwellen z parallel sind, so führen auch, wie sich ohne Rechnung schliessen lässt, die durch das Zusammenwirken sämmtlicher Wellen resultirenden Vibrationen im ersten Falle ihre Schwingungen senkrecht zur Polaraxe aus, während im zweiten Falle die Normale der resultirenden Schwingungsebene auf der Polaraxe senkrecht steht. Mittels obiger Formeln lassen sich die meisten Beobachtungen über Drehung der Polarisationsebene durch Beugung erklären. Wn.

GLAZEBROOK. Notes on Nicol's prism. Phil. Mag. 1880.

Discussion des Einflusses, den kleine Fehler in der Orientirung eines Nicol'schen Prismas ausüben, wenn man dasselbe zur Messung der Drehung der Polarisationsebene anwendet.

Csy. (Wn.)

GOUY. Sur la théorie des phénomènes d'interférence où intervient la polarisation rotatoire. C. R. XC. 1121-1124.

Der Verfasser meint, die Fresnel'sche Zerlegung eines durch eine Quarzplatte parallel der Axe hindurchgehenden polarisirten Strahles in zwei circular polarisirte von entgegengesetztem Drehungssinn sei unnöthig. Man könne dafür eine einfachere Vorstellung adoptiren. Näheres ist aus der kurzen Notiz nicht zu ersehen. Wn.

Glazebrook. Double refraction and dispersion in Iceland spar: an experimental investigation with a comparison with Huyghen's construction for the extraordinary wave. Phil. Trans. CLXXI. 421-449.

Die wesentlich experimentelle Arbeit zieht aus einer grossen Reihe von Messungen den Schluss, dass die Huygens'sche Construction die Beobachtungen so genau darstellt, dass die Abweichungen nur von der Ordnung der Beobachtungsfehler sind.

Cly. (Wn.)

E. Ketteler. Theorie der Interferenzerscheinung, welche senkrecht zur Axe geschliffene dichroitische Krystallplatten im polarisirten Lichte zeigen. Pogg. Ann. (2) XI. 496-503.

Die Theorie der im Titel genannten Interferenzerscheinung wird in bekannter Art durchgeführt, nur dass die beim Durchlaufen der Platte eintretende Absorption, sowie die beim Eintritt in die Platte und beim Austritt aus derselben stattfindende Phasenänderung sowohl für den ordentlichen, als den ausserordentlichen Strahl berücksichtigt wird. Die Ausdrücke für die genannten Grössen entnimmt der Verfasser seinen früheren Arbeiten. Die resultirende Intensitätsformel ist verwickelt und wenig übersichtlich.

Wn.

E. Lommel. Ueber Fluorescenz. Pogg. Ann. (2) X. 449-472, 631-654.

Herr Lommel vertheidigt die von ihm in einer früheren Arbeit entwickelten Resultate über die Intensität des Fluorescenzlichtes (cfr. F. d. M. IX. 1877. p. 721) gegen die von Hagenb[illegible] dagegen erhobenen Einwürfe (s. F. d. M. XI. 1879. p. 739). [illegible] ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit erörtert er zu d[illegible] Zwecke ausführlich die allgemeinen Grundsätze der Photomet[illegible] die seinen Betrachtungen zu Grunde liegen. Diese weichen v[illegible] den Lambert'schen insofern ab, als nicht die Flächenelem[illegible]

einer leuchtenden Oberfläche, sondern die Volumenelemente des leuchtenden Körpers als lichtstrahlend betrachtet werden, natürlich mit Berücksichtigung der Absorption, welche das Licht auf seinem Wege erleidet. Das Lambert'sche Gesetz, wonach die von einem Oberflächenelement eines glühenden Körpers ausgestrahlte Lichtmenge dem Cosinus des Emanationswinkels proportional ist, erhält hier seine Begründung. Zugleich wird aber gezeigt, dass dasselbe nur für glühende undurchsichtige Körper gilt, nicht mehr für durchsichtige. Die Lommel'sche Annahme ist also allgemeiner und umfassender, als die Lambert'sche.

Im zweiten Abschnitt wird speciell die Intensität des Fluorescenzlichtes betrachtet. Es wird gezeigt, weshalb man auf dieses nicht das Lambert'sche Gesetz anwenden könne, wie es von Hagenbach geschehen ist; und es wird die früher von Herrn Lommel abgeleitete Formel für die Intensität des Fluorescenzlichtes auf's Neue begründet. Der Schluss ist Besprechungen von Beobachtungen gewidmet, die das Stokes'sche Gesetz zum Gegenstand haben. Wn.

E. Lommel. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen.
Clebsch Ann. XVI. 183-208.

Siehe Abschn. VII. Cap. 2. p. 398.

K. Exner. Ueber die Newton'schen Staubringe.
Pogg. Ann. (2) IX. 239-260, XI. 218-237.

Neue Polemik gegen eine Arbeit von Lommel (cfr. F. d. M. VIII. 1876. p. 660, XI. p. 740 und X. 1878. p. 708). Die Einwendungen, die der Verfasser gegen die von Lommel entwickelte Theorie erhebt, beziehen sich wesentlich auf die Zulässigkeit der Annahmen hinsichtlich der Vertheilung von Staubpartikelchen auf einer bestäubten Fläche, sowie auf die Zulässigkeit der Annahme, dass das von der Gesammtheit der Staubtheilchen hervorgebrachte Phänomen ebenso verläuft, als wenn es mit den von den mittleren Partikelchen hervorgebrachten Phänomen identisch

wäre. Das von Herrn Lommel beobachtete Phänomen sei, so behauptet der Verfasser, mit dem von ihm berechneten gar nicht identisch.

Im zweiten Theile entwickelt Herr Exner neue Formeln für das in Rede stehende Phänomen. Es ergiebt sich daraus, dass die Intensität in jedem Punkte des Gesichtsfeldes eine zufällige, von der zufälligen Lage der einzelnen Stäubchen abhängige ist. Dies gilt jedoch nicht mehr für die mittlere Intensität in der Nähe jedes Punktes des Gesichtsfeldes; letztere ist gleich der Summe der Intensitäten, welche durch die einzelnen Staubtheilchen für sich in diesem Punkte hervorgebracht würden. Daraus ergiebt sich auch das Undeutlichwerden der Ringe, wenn das Bestäubungsblättchen aus der Parallellage heraus in eine schiefe Lage gedreht wird. Wn.

H. F. Weber. Die wahre Theorie der Fresnel'schen Interferenzerscheinungen. Carl Rep. XVI. 65-98.

Abdruck einer Arbeit, über die bereits im vorigen Bande berichtet ist (s. F. d. M. XI. 1879. p. 741). Wn.

L. Sohncke und A. Wangerin. Neue Untersuchungen über die Newton'schen Ringe. Berl. Monatsber. 1880. 910-921.

Auszug aus einer Arbeit, über die im nächsten Bande der Fortschritte zu berichten sein wird. Wn.

Feussner. Ueber die Theorie der Interferenzerscheinungen dünner Blättchen. Marb. Ber. 1880.

Das Referat folgt im nächsten Jahre. Wn.

W. Werner. Bestimmung und Untersuchung der Curve, welche die Punkte verbindet, die auf concentrischen, reflectirenden Schalen liegen und der Bedingung ge-

nügen, dass die von einem festen Punkte ausgehenden Lichtstrahlen daselbst so reflectirt werden, dass sie alsdann durch einen zweiten festen Punkt gehen. Grunert Arch. LXVI. 56-72.

Drei beliebige Punkte *A*, *B*, *C* sind fest verbunden. Von *A* gehen Lichtstrahlen aus, die an einem Kreise mit dem Mittelpunkte *C* reflectirt werden. Gefragt wird: „In welchem Punkte *P* muss die Reflexion stattfinden, damit der reflectirte Strahl durch *B* geht, und welches ist der Ort der Punkte *P*, wenn der Radius des Kreises sich ändert?“ Dieser Ort ergiebt sich leicht als eine Curve dritten Grades, die in dem Falle, wo die Strecken *AC* und *BC* gleich sind, in einen Kreis und eine Gerade zerfällt. Im allgemeinen Falle wird *C* Doppelpunkt der Curve, von der noch einige weitere Eigenschaften auf elementare Weise abgeleitet werden, ohne dass sich irgend welche bemerkenswerthen Resultate ergeben. Wn.

A. Cornu. Sur le spectre normal du soleil, partie ultraviolette. Ann. d. l'Éc. N. (2) IX. 21-106.

Die rein experimentelle Arbeit bezweckt eine genaue Bestimmung der Lage der Frauenhofer'schen Linien im ultravioletten Theile des Spectrums. Mathematische Hülfsbetrachtungen sind nur angewandt zur Ermittelung und Elimination der Fehler, die herrühren von der Unvollkommenheit der Apparate (geringe Krümmung der Prismenflächen etc.), resp. von nicht genauer Aufstellung derselben. Wn.

Badal. Études d'optique physiologique. Mém. d. Bord. (2) IV. 65-123.

Die Arbeit ist rein physiologisch. Von mathematischen Betrachtungen, die übrigens ganz elementarer Natur sind, ist nur zu erwähnen die Berechnung des Einflusses, den die Grösse der Pupillenöffnung auf die auf der Netzhaut entstehenden Bilder hat. Wn.

G. Sous. Phakomètre et optomètre. Mém. d. Bord. (2) IV. 47-61.

Anwendung der elementaren Linsenformel auf die Theorie eines Instruments, das dazu dient, die unbekannte Focalweite einer Linse mit Hülfe der bekannten Focalweite einer anderen Linse zu messen. Wn.

R. Ferrini. Sull' aberrazione di sfericità nelle lenti di grossezza e di apertura ordinaria e nei sistemi diottrici centrati. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII. 283-294, 311-374.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die sphärische Aberration eines centrirten Linsensystems aus der sphärischen Aberration der einzelnen Bestandtheile zu bestimmen. Er gelangt dabei durch Umformung bekannter Formeln zu einfachen übersichtlichen Ausdrücken, welche die Discussion der Frage, ob ein System aplanatisch ist, zu erleichtern und namentlich für die numerische Rechnung praktisch zu sein scheinen. Es würde hier zu weit führen, die Endformeln im Einzelnen aufzuführen. Uebrigens enthalten auch manche Abschnitte nur Bekanntes, namentlich die, welche die sphärische Aberration einer einzelnen Kugelfläche, sowie einer gewöhnlichen Linse betreffen.

Wn.

Harkness. The number of lenses required in an achromatic objective. Wash. Bull. III. 65-67.

Es wird gefragt, wie gross in einem achromatischen Linsensystem (die einzelnen Linsen als unendlich dünn und einander berührend angenommen) die Zahl der Linsen sein müsse, damit eine möglichst grosse Zahl von Strahlen verschiedener Brechbarkeit in einem Focus vereinigt werde. Durch einfache Betrachtungen ergiebt sich, dass die Zahl der Linsen gleich ist der Zahl der verschiedenen Potenzen von λ in der zu Grunde gelegten Dispersionsformel, die im Uebrigen beliebig sein kann.

Wn.

Capitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

C. Neumann. Die Principien der Elektrodynamik. Clebsch Ann. XVII. 400-434.

Abdruck einer Schrift, die 1868 als Gratulationsschrift der Tübinger Universität zum funfzigjährigen Jubiläum der Bonner Universität veröffentlicht war. Ueber diese Schrift ist im ersten Bande der Fortschritte (p. 371—375) ausführlich referirt, weshalb eine nochmalige Besprechung nicht nöthig erscheint. In einer nachträglichen Bemerkung weist Herr Neumann darauf hin, dass in seiner Arbeit zuerst der Gedanke, ein elektrodynamisches Potential einzuführen und aus diesem die elektrischen Kräfte durch Variation abzuleiten, publicirt sei. Wenn auch Riemann denselben Gedanken früher gehabt, so sei dies doch erst 1876 durch die von Hattendorf herausgegebenen Vorlesungen Riemann's bekannt geworden. Wn.

J. Fröhlich. Bemerkungen zu den elektrodynamischen Grundgesetzen von Clausius, Riemann und Weber. Pogg. Ann. (2) IX. 261-287.

E. Budde. Das Clausius'sche Gesetz und die Bewegung der Erde im Raume. Pogg. Ann. (2) X. 553-560.

R. Clausius. Ueber die Vergleichung der elektrodynamischen Grundgesetze mit der Erfahrung. Pogg. Ann. (2) X. 608-618.

Die drei zusammengestellten Arbeiten enthalten hauptsächlich einen Einwurf (von Fröhlich) gegen das Clausius'sche Grundgesetz und Widerlegungen desselben durch Budde und Clausius selbst. Indem wir auf die ausführliche Besprechung des Clausius'schen Gesetzes (F. d. M. VIII. 1876. 681—685) und auf eine frühere Discussion desselben (F. d. M. IX. 1877. 734—735) ver-

weisen, mag hier nur noch bemerkt werden, dass der elektrodynamische Theil der Wirkung zweier Elektricitätstheilchen auf einander nach Clausius nicht allein von ihren relativen, sondern auch von ihren absoluten Bewegungscomponenten abhängt. In der ersten Abhandlung werden die drei bis jetzt aufgestellten elektrodynamischen Grundgesetze (von W. Weber, Riemann und Clausius) besprochen und auf ihre Zulässigkeit geprüft. Dieselben kann man am einfachsten vergleichen, wenn man von den elektrodynamischen Potentialen ausgeht. Dieselben sind nach Clausius:

$$V = \frac{kee'}{r}\left\{\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right\},$$

nach Riemann:

$$V = -\frac{kee'}{2r}\left\{\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right)^2\right\}.$$

nach Weber:

$$V = -\frac{k}{2}\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Die X-Componente der elektrodynamischen Wirkung erhält man dann durch die folgende Gleichung:

$$Xee' = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}\right).$$

Hiervon ausgehend berechnet Fröhlich eine Reihe von Wechselwirkungen nach den drei Grundgesetzen. Von Interesse ist hauptsächlich die Wirkung einer elektrischen Masse auf einen geschlossenen Strom unter der Voraussetzung, dass beide sich in relativer Ruhe zu einander befinden, aber mit constanter Geschwindigkeit im Raum sich weiter bewegen, wie dies z. B. der Fall ist, wenn beide auf der im Weltraum sich bewegenden Erde ruhen. Nach dem Clausius'schen Gesetz folgt hierbei eine Anziehung. Da eine solche bisher nicht beobachtet wurde, so ist, dies ist die Folgerung Fröhlich's, das Clausius'sche Gesetz unzulässig. Dass Riemann's und Weber's Gesetze nur zulässig sind, wenn beide Elektricitäten als mit entgegengesetzt gleichen Ge-

schwindigkeiten bewegt angenommen werden, ist früher schon mehrfach ausgesprochen worden.

Die Folgerung Fröhlich's wird von Budde nochmals geprüft. Dabei zeigt sich, dass man die in Frage kommende Wirkung, welche durch die Bewegung der Erde veranlasst wird, und welche Budde als „geokinetische" bezeichnet, ansehen kann als herrührend von einer fingirten elektrischen Belegung des Stromkreises. Diese muss aber, da sie auch auf den Stromkreis selbst wirkt, eine entgegengesetzte Belegung durch Influenz hervorrufen, deren Wirkung nach Aussen die erstere vollständig compensirt, so dass die Schlussfolgerung Fröhlich's als nicht begründet anzusehen ist.

Zu demselben Resultat gelangt auch Clausius selbst. Seine Abhandlung enthält zunächst eine Vertheidigung seines Grundgesetzes gegen Angriffe von Delsaux, weist sodann einen Rechenfehler in den Deductionen Fröhlich's nach, durch den ein Theil seiner Schlüsse hinfällig wird, und wendet sich schliesslich ebenfalls zu der eben besprochenen Frage des Einflusses der Erdbewegung. Clausius hebt hervor, dass er zu der Berücksichtigung der Wirkung der absoluten, statt der relativen Bewegungscomponenten durch die Erwägung veranlasst worden sei, dass diese Wirkung möglicher Weise durch ein Medium übertragen wird. Es bleibt daher vorläufig fraglich, ob ein solches Medium bei einer gemeinsamen Bewegung der in Betracht kommenden Massen ebenfalls an derselben Theil nimmt oder nicht. Im ersteren Fall würde der Einfluss der absoluten fortschreitenden Bewegung ohne Einfluss sein. Ok.

J. Delsaux. Sur la loi de force de M. Clausius entre courants élémentaires. Ann. Soc. scient. Brux. IV. B. 125-140.

Nach dem Verfasser widerspricht eine Folgerung aus dem Clausius'schen Gesetze einem Experiment von Biot und Savart. (Siehe oben.) Mn. (O.)

R. Clausius. Ueber die Anwendung des elektrodynamischen Potentials zur Bestimmung der ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte. Verh. d. naturf. Ver. d. Pr. Rheinl. u. Westf. XXXVII. 1-31; Pogg. Ann. (2) XI. 609-634.

Ausgehend von dem Ausdruck für die X-Componente der Wirkung eines Elektricitätstheilchens auf ein anderes nach seinem Grundgesetz berechnet der Verfasser zunächst die X-Componente der Kraft, welche ein Stromelement auf die Elektricitätseinheit ausübt. Dieselben Rechnungen werden dann auch für das Riemann'sche und Weber'sche Grundgesetz durchgeführt. Die erhaltenen Ausdrücke lassen sich benutzen, um die Wirkungen eines geschlossenen Stromes auf die Elektricitätseinheit zu berechnen. Die drei Componenten lassen sich in allen drei Fällen zurückführen auf eine Function (das elektrodynamische Potential) Π, aus welcher man die X-Componente durch die Operation:

$$X = \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \frac{dx}{dt}}\right)$$

ableiten kann. Für den oben besprochenen Fall erhält man nach dem Clausius'schen Gesetz für Π den folgenden Werth:

$$\Pi = H_x \frac{dx}{dt} + H_y \frac{dy}{dt} + H_z \frac{dz}{dt},$$

wo

$$H_x = k \int \frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds',$$

und H_y, H_z analoge Bedeutung haben. Die elektrodynamischen Potentiale nach dem Riemann'schen und Weber'schen Gesetze erhält man in den Formen:

$$\Pi_1 = \Pi + G_1,$$
$$\Pi_2 = \Pi + G_2,$$

worin G_1 und G_2 gewisse Functionen der Coordinaten etc. bedeuten. Der gefundene Ausdruck für Π wird dann weiter benutzt, um die ponderomotorische Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Element zu berechnen. Auch diese kann wieder

auf ein Potential (Uds) zurückgeführt werden, welches durch die Gleichung gegeben ist:

$$Uds = ids\left\{H_x\frac{\partial x}{\partial s} + H_y\frac{\partial y}{\partial s} + H_z\frac{\partial z}{\partial s}\right\}.$$

Zu demselben Ausdruck führen auch die beiden anderen Gesetze. Endlich kann aus dem elektrodynamischen Potential leicht die elektromotorische Kraft berechnet werden, welche in einem Element ds durch einen geschlossenen Strom inducirt wird. Dieselbe fällt verschieden bei Benutzung der drei Gesetze aus.

Ok.

E. Mathieu. Réflexions sur les principes mathématiques de l'électrodynamique. Ann. d l'Éc. N. (2) IX. 187-208.

Der Verfasser führt die elektrodynamischen Wirkungen zweier Ströme auf die Wechselwirkung der bewegten Elektricitätstheile zurück. Hierbei geht er von den folgenden Voraussetzungen aus:

1. Das Princip der Erhaltung der Energie ist gültig.

2. Für die Wechselwirkung gilt das Princip von Wirkung und Gegenwirkung.

3. Zwei parallele Stromelemente, senkrecht zu ihrer Verbindungslinie, ziehen sich an umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung.

4. Die Wirkung zweier Stromelemente ist unabhängig von ihren Krümmungen.

Der Verfasser geht von den allgemeinen Gleichungen der Mechanik in der Lagrange'schen Form aus und bildet zunächst auf Grund der ersten Annahme einen Ausdruck für das Potential zweier bewegter Elektricitätstheilchen auf einander. Mit Hilfe des zweiten Princips zeigt sich, dass dasselbe ausser dem elektrostatischen Glied einen Ausdruck enthält von der Form:

$$F\left(r, \frac{dr}{dt}\right),$$

d. h. eine noch nicht näher bestimmte Function ihrer Entfernung und deren Veränderung mit der Zeit. Bei der Annahme, dass

beide Elektricitäten (die positive und negative) in jedem Stromelement mit gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeiten sich bewegen, dass ferner ein geschlossener Strom nicht influenzirend wirkt, und mit Benutzung der Annahmen 3) und 4) gelangt man zu dem Ampère'schen Gesetz, resp. zu dem Weber'schen Grundgesetz. Auch wenn man die eine Elektricitätsart als ruhend, die andere als allein bewegt annimmt, kommt man zu jenen beiden Gesetzen, wobei dann allerdings folgt, dass ein geschlossener Strom influenzirend auf ein ruhendes Elektricitätstheilchen wirkt.

Der Verfasser hält die drei ersten Annahmen für unzweifelhaft, die letzte dagegen für nicht so sicher. Ok.

J. Korteweg. Zur Theorie der elektrischen Kräfte. Clebsch Ann. XVI. 533-537.

J. Korteweg. Ueber das ponderomotorische Elementargesetz. Borchardt J. XC. 49-71.

Die erste Mittheilung ist ein kurzer Auszug, die zweite eine ausführlichere Umarbeitung einer in den Abhdl. d. Kgl. Ak. der Wiss. zu Amsterdam im Jahre 1879 veröffentlichten Arbeit des Verfassers.

Um einen von willkürlichen Hypothesen möglichst freien Ausdruck für die Wirkung eines Stromelementes auf ein anderes zu erhalten, geht der Verfasser nur von den folgenden Voraussetzungen aus:

1. Die ponderomotorischen Wirkungen sind proportional mit i_1, i_2, ds_1, ds_2.

2. Sie sind nur abhängig von der relativen Lage der beiden Elemente (also sind zwischen den Spiegelbildern der Elemente die Spiegelbilder der Kräfte und Kräftepaare wirksam).

3. Die Wirkungen zwischen zwei Stromelementen sind durch die zwischen ihren Componenten ersetzbar.

Mit Benutzung dieser Grundsätze werden die Wirkungen zunächst für Elemente in relativ einfachen Lagen zu einander fest-

gestellt und dann die drei Componenten der Resultante und des resultirenden Paares für den allgemeinen Fall berechnet. In dieselben gehen noch sieben Grössen ein, welche durch weitere Betrachungen zu bestimmen sind. Hierzu dient zunächst die Wirkung zweier geschlossener Stromkreise auf einander, wodurch zwei Bedingungen zwischen denselben erfüllt werden müssen.

Zum Schluss wird gezeigt, dass die bisher aufgestellten Elementargesetze, besonders diejenigen von Ampère und Grassmann, ferner das Helmholtz'sche Potentialgesetz durch specielle Annahmen über die noch unbestimmten Grössen abgeleitet werden können. Ok.

D. J. Korteweg. Algemeene theorie der ponderomotorische krachten. Verh. v. Amst. XX.

J. D. van der Waals. Eenige opmerkingen naar aanleiding van de algemeene theorie der ponderomotorische krachten van Dr. D. J. Korteweg. Verh. v. Amst. XX.

Die zuerst genannte Abhandlung enthält eine Untersuchung der allgemeinen Theorie der ponderomotorischen Kräfte. Die Einleitung umfasst eine historische Uebersicht der wichtigsten Theorien von Ampère an. Die Hypothesen, welche aufgestellt werden, um die Ampère'schen Gesetze zu beweisen, reduciren sich auf folgende vier: 1) Die ponderomotorischen Kräfte zwischen zwei Stromelementen sind proportional den Längen der Elemente und den Stromstärken; 2) Die Kräfte sind ferner abhängig von der gegenseitigen Lage der Elemente; 3) Man darf die Kraftwirkungen zwischen zwei Elementen ersetzen durch die zwischen ihren sogenannten Componenten; 4) Zwischen zwei Stromelementen treten keine ponderomotorischen Kräfte auf ausserhalb der Verbindungslinie und keine richtenden Paare.

Während es keine elektrodynamische Theorie giebt, welche nicht die drei ersten Hypothesen annähme, und alle diese Theorien für geschlossene Ströme auf dieselben Kraftwirkungen führen,

wurde die vierte Hypothese über Richtung und Art der Wirkung wiederholt durch andere ersetzt, zuerst durch Grassmann, später durch Helmholtz. Wenn solche Theorien, wie die von Ampère stets Vertheidiger finden, so ist der Verfasser der Ansicht, dass der Nutzen einer allgemeineren Theorie, welche von der vierten Hypothese absieht und also die Richtung und Art der Kraft nicht von vorn herein bestimmt, kaum wird verkannt werden können. Eine solche Theorie wird die von Ampère, Grassmann und Helmholtz als specielle Fälle enthalten und ihr gegenseitiges Verhältnis klar legen. Deshalb wird hier die vierte Hypothese durch eine allgemeine Auffassung ersetzt, wobei man: 1) in Betreff der Richtung der Kraft nur wünscht, dass dem Gesetz der Symmetrie genügt wird; 2) für die Wirkung der Stromelemente auch Kräftepaare annimmt.

Indem der Verfasser nun zur Entwicklung seiner Theorie übergeht, behandelt er die Kräfte und Kräftepaare, welche zwischen zwei Stromelementen wirksam sein können, und untersucht nach einander folgende vier Fälle: 1) Die beiden Elemente sind longitudinal angeordnet in Bezug auf ihre Verbindungslinie; 2) Beide Elemente sind transversal und parallel; 3) Beide Elemente sind transversal und kreuzen einander unter rechten Winkeln; 4) Das eine Element ist longitudinal, das andere transversal hinsichtlich ihrer Verbindungslinie.

Darauf werden die Kraftwirkungen offener und geschlossener Ströme auf ein Element unter verschiedenen Annahmen betrachtet und sodann die Kräfte und Kräftepaare berechnet und gezeigt, dass die für geschlossene Ströme erhaltenen Resultate dieselben Kraftwirkungen ergeben, wie die Ampère'sche Theorie unter zwei Beschränkungen, welche in der analytischen Theorie fortfallen. Nach Zusammenfassung der allgemeinen Theorie in einzelne Sätze und Formeln werden an denselben die speciellen Theorien geprüft, welche durch Hinzufügen neuer Hypothesen zu denen entstehen, auf welchen die allgemeine Theorie beruht. Nach einander werden behandelt: 1) Die Ampère'sche Hypothese, dass ausschliesslich Kräfte, die in der Verbindungslinie wirken, möglich sind; 2) Die Grassmann'sche, dass alle ponderomotorischen

Kräfte senkrecht auf dem Element stehen, auf welches sie wirken; 3) die Stefan'sche, dass alle diese Kräfte umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung sind, und endlich 4) die von Helmholtz, dass die Kraftwirkung zwischen den Stromelementen, ebenso wie die zwischen geschlossenen Strömen ein Potential besitze.

Die Ausdrücke, welche sich ergeben, stimmen vollständig mit denen von Helmholtz überein. Schliesslich behandelt der Verfasser die elektrodynamischen Theorien von Weber und Clausius; die erste führt sowohl für unvollständige als vollständige Stromelemente zu den Ampère'schen Gesetzen; die zweite sieht von der Weber'schen Hypothese ab, ergiebt auch für Kraftwirkungen, welche der Dichtigkeit proportional sind, unter Voraussetzung vollkommener und unvollkommener Stromelemente dieselben Kraftwirkungen, nämlich die Grassmann'schen. In der Kürze wird der Einfluss der diëlektrischen Polarisation auf die erhaltenen Resultate untersucht und ebenso noch der Fall behandelt, dass einer der Ströme durch eine statische Entladung ersetzt wird.

Die Arbeit des Herrn van der Waals schliesst sich der obigen Abhandlung an; wird hier nur die Wirkung unendlich kleiner Ströme auf einander berechnet, so werden dort die Beziehungen abgeleitet aus der Wirkung geschlossener Ströme von endlicher Ausdehnung auf einander und auf ein Stromelement, was deshalb natürlicher ist, weil auch die Versuche mit Strömen von endlicher Ausdehnung angestellt werden. Dass hierbei die Beziehungen verwickelter werden, liegt auf der Hand.

G.

E. Riecke. Ueber die elektrischen Elementargesetze.
Pogg. Ann. (2) XI. 278-316.

Zusammenstellung einer Reihe von Studien, von denen ein Theil schon früher veröffentlicht worden ist (vergl. F. d. M. X. 1878. 717—718). Dieselben beziehen sich auf das Ampère'sche Gesetz, das Helmholtz'sche Potentialgesetz und das Weber'sche

Gesetz, besonders in ihrem Verhältnis zum Princip der Erhaltung der Energie, und auf das Clausius'sche Gesetz.

Ok.

J. Jamin. Sur la formule d'Ampère. Almeida J. VII. 1879. 264-267.

Die Arbeit enthält eine Methode zur Bestimmung der Constanten in der Function, welche die gegenseitige Wirkung zweier Stromelemente darstellt. O.

E. Lehmann. Ueber die Einwirkung ruhender und rotirender Kugelflächen unter Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes. Schlömilch Z. XXV. 171-196, 241-263.

Die nach dem Weber'schen Gesetz erfolgende Wirkung eines Elektricitätstheilchens m auf ein anderes μ wird zunächst in drei rechtwinklige Componenten zerlegt. Dieselben lassen sich in der folgenden Form darstellen:

$$X = m\mu\left\{-\frac{\partial(\varphi+\omega)}{\partial x}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\right\};$$

Y und Z sind analog. Hierin ist $\varphi = \frac{1}{r}$ zu setzen, und $m\mu\varphi$ repräsentirt das elektrostatische Potential. Ferner ist

$$\omega = 2A^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2, \quad \text{wo} \quad \psi = \sqrt{r},$$

(r die Entfernung von m und μ) und $A^2 = \frac{2}{c^2}$ die Constante des Weber'schen Gesetzes ist; ω ist als das elektrodynamische Potential zu bezeichnen. Auf Grund der eben besprochenen Ausdrücke behandelt der Verfasser die folgenden drei Probleme: 1) Einwirkung einer ruhenden gleichmässig mit Elektricität belegten Kugelfläche auf einen in beliebiger Bewegung begriffenen Punkt. 2) Einwirkung einer rotirenden Kugelfläche auf einen in beliebiger Bewegung begriffenen Punkt. 3) Einwirkung zweier rotirender Kugelflächen auf einander.

Die beiden ersten Aufgaben werden nach mehreren Methoden gelöst. Es sind dabei die beiden Fälle zu unterscheiden, wo der Punkt sich innerhalb und ausserhalb der Kugelschale befindet. Die vorkommenden Integrationen lassen sich sämmtlich ausführen.

In Betreff der bei den einzelnen Problemen erhaltenen Resultate müssen wir auf die Originalabhandlung verweisen.

Ok.

G. J. Legebeke. Ueber einen allgemeinen Satz von R. Clausius in Bezug auf elektrische Influenz. Pogg. Ann. (2) X. 154-158.

Ueber den in Frage kommenden Satz ist F. d. M. IX. 1877. 140—141 berichtet worden. Der Verfasser beweist hier den folgenden etwas allgemeineren Satz: Ist ein Agens, welches nach dem elektrostatischen Grundgesetz wirkt, über eine Reihe von Oberflächen mit den Dichtigkeiten h_1, h_2 etc. verbreitet, haben dann die Gesammtpotentiale in den betreffenden Punkten der Flächen die Werthe V_1, V_2 etc., sind ferner bei einer anderen Art der Verbreitung die Dichtigkeiten h'_1, h'_2 etc., die Potentiale V'_1, V'_2 etc., so ist:

$$\Sigma \int V h' do = \Sigma \int V' h do.$$

Dieser Satz geht in den Clausius'schen über, wenn V, V' etc. für jede Einzelfläche constante Werthe haben.

Schliesslich macht der Verfasser darauf aufmerksam, dass die von ihm gefundene Beziehung eine Erweiterung eines Satzes von Gauss (Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Quadrat der Entfernung wirkenden Kräfte, § 19) ist.

Ok.

P. Frost. On the potential of the electricity on two charged spherical conductors placed at a given distance. Quart. J. XVII. 164-168.

Die Potentiale der Elektricität für die beiden einander influenzirenden Kugeln werden zunächst durch einfache Betrachtungen für Punkte der Centrale berechnet. Von diesen ist der Uebergang leicht zu den allgemeineren Formeln, welche mit den bekannten Lösungen Poisson's und Anderer übereinstimmen.

Ok.

G. A. Maggi. Sopra un problema di elettrostatica. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII. 384-391.

Der Verfasser giebt eine Reihe von Transformationen früher entwickelter Formeln, welche sich auf das Problem der Influenz eines elektrischen Massenpunktes auf zwei parallele unbegrenzte Ebenen beziehen, zwischen welchen der Punkt sich befindet.

Ok.

W. D. Niven. Application of Lamé's coordinates to determine the distribution of electricity on a conductor in the form of an ellipsoid placed in a field of electric force. Messenger (2) X. 119-121.

Der Inhalt ist durch den Titel hinreichend gekennzeichnet. Der Verfasser bemerkt, dass sich die angewandte Methode auch auf die analogen magnetischen Erscheinungen anwenden lasse.

Glr. (O.)

J. Korteweg. Ueber die Veränderung der Form und des Volumens diëlektrischer Körper unter Einwirkung elektrischer Kräfte. Pogg. Ann. (2) IX. 48-61.

Bekanntlich haben Duter, Righi und andere Physiker nachgewiesen, dass die isolirenden Zwischenschichten von Condensatoren bei Ladung derselben Deformationen erfahren, nämlich Compressionen in Richtung der elektrischen Kraftlinien und Dilatationen senkrecht dazu. Der Verfasser erklärt diese Erscheinung auf folgende Weise. Er nimmt an, dass die Diëlektricitätsconstante

eines Körpers durch elastische Deformation desselben geändert wird; dann wird eine gewisse Arbeit der elektrischen Kräfte zu leisten sein, wenn man einen elektrisch influenzirten Körper elastisch deformirt. Diese kann berechnet werden und wird von dem Verfasser einer gewissen Kraft zugeschrieben, welche auch umgekehrt eine elastische Deformation hervorbringen muss, wenn ein Körper elektrisch influenzirt wird. Diese Principien werden auf die Berechnung verschiedener Versuche angewandt, besonders auf die Deformation eines kugelförmigen Condensators. Die Volumenvergrösserung Δv desselben wird dann durch die Formel ausgedrückt:

$$\Delta v = \frac{k' V^2 r^3}{2 E d^2},$$

wo r den Kugelradius, d die Dicke der isolirenden Schicht, E den Elasticitätscoefficienten, V das Potential bedeuten. Die Formel stimmt indess nicht vollständig mit den bisher gefundenen Versuchsresultaten überein. Ok.

L. Boltzmann. Zur Theorie der sogenannten elektrischen Ausdehnung oder Elektrostriction. Wien. Anz. 1880. 211-213; Wien. Ber. LXXXII. 827, 1159.

Vor Kurzem hat Quincke in einer sorgfältigen Experimentaluntersuchung eine grosse Anzahl von Erscheinungen behandelt, bei welchen durch Einwirkung starker elektrischer Kräfte auf Isolatoren Deformationen derselben hervorgebracht werden. Der Verfasser behandelt diese Vorgänge unter der Voraussetzung, dass die Formveränderungen durch die gewöhnlichen Fernewirkungen der Elektricität hervorgerufen werden.

Besteht zunächst das diëlektrische Medium aus einer sehr dünnen Kugelschale, welche auf beiden Grenzflächen mit leitenden Belegungen versehen ist, von denen die eine bis zum Potential p geladen, die andere abgeleitet ist, so ist die Volumenänderung Δv der Schale durch die folgende Formel ausgedrückt:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{3 p^2 D^2 [2\lambda + 2\mu - k(\lambda + 2\mu)]}{16 \pi \mu (3\lambda + 2\mu) \alpha^2}.$$

Hierin bedeutet v das Volumen, α die Dicke der Schale, ferner λ und μ die beiden elastischen Constanten nach Lamé's Bezeichnung, während D die Diëlektricitätsconstante des Mediums und

$$k = \frac{(D-\frac{1}{2})(D-1)}{D^2}$$

ist. Besteht das isolirende Medium aus einem Hohlcylinder, der innen und aussen mit leitenden Belegen versehen ist, so erfährt derselbe bei der Elektrisirung der inneren Belegung eine Verlängerung Δl, für welche

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{p^2 k \lambda D^2}{16\pi\mu(3\lambda+2\mu)\alpha^2}.$$

Der Verfasser vergleicht sodann die Formel für den Kugelcondensator mit Versuchen von Quincke und findet, dass die Volumenänderung, welche seine Theorie ergiebt, jedenfalls von derselben Grössenordnung ist, wie die durch den Versuch gefundene.

Zum Schluss folgt eine allgemeinere Behandlung desselben Problems für isolirende Körper von beliebiger Form.

Ok.

W. Giese. Ueber den Verlauf der Rückstandsbildung in Leydener Flaschen bei constanter Potentialdifferenz der Belegungen. Pogg. Ann. (2) IX. 161-208.

Die von R. Kohlrausch zuerst genauer untersuchte Rückstandsbildung bei Leydener Flaschen ist von Riemann (Gesammelte Werke p. 48) theoretisch behandelt worden. Der Verfasser hat eine ausführliche Experimentaluntersuchung angestellt, um die Resultate dieser Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen. Hierbei wurde die äussere Belegung einer Leydener Flasche von einem bestimmten Augenblick an auf constantem Potential erhalten, während die innere Belegung eine bestimmte Zeit isolirt und mit einem Elektrometer verbunden war. Die dort angesammelte und gemessene Elektricitätsmenge kann als Mass für die Strömung in der betreffenden Zeit dienen.

Die Riemann'sche Theorie geht für das Potential V der Elektricität im Innern des Isolators von der partiellen Differentialgleichung aus:

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial t} = p^2 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

wobei vorausgesetzt wird, dass der Isolator aus einer unendlich grossen dünnen Platte besteht. Die yz-Ebene liegt in der Mitte der Platte, die beiden Grenzebenen haben daher die Gleichungen: $x = \pm d$, wenn $2d$ die Dicke ist. Die von Riemann angenommenen Grenzbedingungen bestehen darin, dass

für: $x = +d, \quad V = +c,$
$x = -d, \quad V = -c,$

für beide Flächen: $\frac{\partial V}{\partial x} = 0.$

Die Stromintensität ist:

$$p^2 \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} - q^2 \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Die Gleichungen werden nach bekannten Regeln gelöst. Es stellte sich heraus, dass die Resultate nicht geeignet waren, die Versuche wiederzugeben. Auch eine von Helmholtz vorgenommene und durchgerechnete Modification der Grenzbedingungen führte zu keiner besseren Uebereinstimmung. Helmholtz machte die Annahme, dass die Elektricität nur bis zu einer sehr geringen Tiefe eindringe. Die hierbei zur Lösung des Problems benutzten Rechnungen sind interessante Anwendungen der bei der Wärmeleitung vorkommenden Functionen. Ok.

G. Kirchhoff. Ueber die Messung elektrischer Leitungsfähigkeiten. Berl. Monatsber. 1880. 601-613; Pogg. Ann. (2) XI. 801-812.

Die gewöhnlichen Methoden, die Leitungsfähigkeit eines Körpers zu bestimmen, sind nur anwendbar, wenn derselbe aus einem dünnen Draht besteht. Ist dies nicht der Fall, hat man es also mit einem nicht linearen Leiter zu thun, so kann man folgendermassen verfahren. Man denke sich zwei Punkte des Leiters mit

den Polen einer constanten Kette verbunden. An zwei anderen Punkten sind die Enden des Drahtes einer Galvanometerrolle angelegt, so dass durch dieselbe ein Zweigstrom geht. Ist J_1 die Intensität des Kettenstromes, J_2 diejenige des Zweigstromes und w der Widerstand der Rolle, so besteht die Gleichung

$$\varrho J_1 = (w - r) J_2.$$

In derselben sind ϱ und r Constanten, welche von der Form des körperlichen Leiters und von der Lage der vier Ableitungspunkte abhängen. Die Grösse r wird durch die angewandte Versuchsmethode, wobei ein Differentialgalvanometer zur Verwendung kommt, eliminirt, während ϱ durch einen bekannten Widerstand ausgedrückt wird. Ist die Stromverbreitung in dem betreffenden körperlichen Leiter bekannt, so kann die Grösse ϱ in besonderen Fällen berechnet und dadurch die Leitungsfähigkeit bestimmt werden. Der Verfasser benutzte Leiter von der Form eines rechtwinkligen Parallelepipedons. Die beiden Enden einer Kante waren mit der Kette verbunden. Die Galvanometerdrähte gingen von den Enden der nächsten parallelen Kante aus, so dass die vier Ableitungspunkte die Ecken einer rechtwinkligen Seitenfläche bildeten. Zur Berechnung von ϱ benutzt der Verfasser den von Greenhill gegebenen Ausdruck für das Potential der constanten Strömung in einem rechtwinkligen Parallelepiped mit den Kanten a, b, c, welchem die Elektricität in zwei Punkten zu- resp. abgeleitet wird. Die Grösse ϱ ist dann der Differenz der Potentiale für die beiden Ableitungspunkte des Galvanometerdrahtes gleich. Nach einigen Transformationen erhält man für dieselbe den folgenden Ausdruck:

$$\varrho = \frac{1}{abck} \int_0^\infty d.\vartheta_0\left(\frac{i\pi t}{4a^2}\right) \cdot \vartheta_3\left(\frac{i\pi t}{4b^2}\right) \cdot \vartheta_2\left(\frac{i\pi t}{c^2}\right).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass c die längste Kante ist, und d
a und c die Seiten desjenigen Rechtecks sind, an dessen Ec
die vier Drähte angebracht sind. Die Thetafunctionen sind i
in der Bedeutung gebraucht:

$$\vartheta_0(\tau) = \Sigma(-1)^\nu e^{\nu^2 \tau\pi i},$$
$$\vartheta_2(\tau) = \Sigma e^{(\nu+\frac{1}{2})^2 \tau\pi i},$$
$$\vartheta_3(\tau) = \Sigma e^{\nu^2 \tau\pi i}.$$

Nach einer Reihe von Transformationen wird das bestimmte Integral für zwei besondere Fälle ausgerechnet.

Es sei zunächst $a = b$, c gross im Vergleiche zu a. Dann ist

$$\varrho = \frac{c - 0{,}7272\,a}{a^2 k}.$$

Ferner sei $a = b = \frac{c}{2}$. Dann ist

$$\varrho = \frac{1{,}2732}{ak}.$$

Ok.

H. F. Weber. Beziehung zwischen dem Wärmeleitungsvermögen und dem elektrischen Leitungsvermögen der Metalle. Berl. Monatsber. 1880. 457-478; Wolf Z. 1880. 161-187; Arch. de Genève (3) IV. 107-131.

Während bisher angenommen wurde, dass die Werthe der Leitungsfähigkeit der Metalle für Wärme und Elektricität in constantem Verhältnis zu einander stehen, ist der Verfasser auf Grund einer sorgfältigen Untersuchung beider Grössen zu einem anderen Resultat gekommen.

Das Wärmeleitungsvermögen wurde nach zwei verschiedenen Methoden bestimmt, je nachdem die Metalle zu den besseren oder schlechteren Leitern gehörten. Im ersten Fall hatten dieselben die Form eines Ringes. Ein Querschnitt desselben wurde lange erwärmt, bis die Wärmevertheilung eine stationäre geworden war. Darauf wurde nach Unterbrechung der Erwärmung Abkühlung an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen des es messend verfolgt, während derselbe in einem Raum von nter Temperatur erkaltete. Unter der Voraussetzung, dass rmeleitungsfähigkeit und die specifische Wärme der Voinheit lineare Functionen der Temperatur sind, dass ferner h aussen abgegebene Wärme proportional ist mit

$$h_0\,(u - u_a) + h_1\,(u - u_a)^2,$$

ie Temperatur der betreffenden Stelle des Ringes, u_a dieder Umgebung ist, dass endlich in jedem Querschnitt des

Ringes dieselbe Temperatur herrscht, wird zunächst das Problem theoretisch behandelt. Dasselbe lässt sich vollständig lösen, indem die Temperatur irgend eines Punktes durch eine stark convergirende Reihe dargestellt wird. Werden die Beobachtungen erst eine kurze Zeit nach dem Anfang der Erkaltung begonnen, und für die Beobachtungsstellen Querschnitte gewählt, welche von dem erhitzten Querschnitt um $\frac{2r\pi}{8}$ und um $5\frac{2r\pi}{8}$, auf der Mittellinie gezählt, abstehen, so erhält man für die Temperaturen einfache Functionen der Zeit, welche die Berechnung des Wärmeleitungsvermögens nach absolutem Mass gestatten. Bei schlechter leitenden Metallen wurde die Abkühlung einer kreisförmigen Metallplatte beobachtet, deren Mantelfläche auf constanter niedrigerer Temperatur erhalten wird, während die beiden Basisflächen durch Strahlung Wärme verlieren. Auch dieses Problem wird mathematisch behandelt. In den Ausdruck für die Temperatur treten Bessel'sche Functionen ein. Das elektrische Leitungsvermögen wird aus der Dämpfung bestimmt, welche die Metallringe auf einen schwingenden Magnetstab ausüben. Das Leitungsvermögen ergiebt sich dabei nach absolutem elektromagnetischem Mass. Der Verfasser findet nun, dass das Verhältnis beider Grössen nicht constant, sondern eine lineare Function der specifischen Wärmen der Volumeneinheit (Product aus specifischer Wärme und Dichtigkeit) ist. Bezeichnet man mit k_0 und K_0 die Leitungsfähigkeiten für Wärme und Elektricität, mit c_0 die specifische Wärme, so soll allgemein

$$\frac{k_0}{K_0} = a + bc_0,$$

sein, wo

$$a = 877,$$
$$b = 1360$$

ist. Die Werthe des Verhältnisses liegen nach dem Verfasser zwischen den Grenzen: 2002 für Kupfer und 1275 für Wismuth.

Ok.

J. C. Allan. On some problems in the conduction of electricity. Quart. J. XVII. 65-86.

Der Verfasser behandelt die Strömung der Elektricität in dünnen leitenden Flächen, besonders in einer Kugelschale, ein Problem, das in ähnlicher Weise schon früher von Kirchhoff (vergl. F. d. M. VII. 1875. p. 665-666) und Anderen behandelt worden ist.

Wird die Lage eines Punktes auf Polarcoordinaten (r, ϑ, φ) bezogen, so gilt für das Potential V eine ganz ähnliche Gleichung, wie für die Strömung in der Ebene:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0,$$

wo

$$\mu = \log\left(a \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right)$$

gesetzt ist und a den Radius der Kugel darstellt.

Wird die Elektricität durch ein System punktförmiger Elektroden zu- resp. abgeleitet, so lässt sich das Potential in der Form ausdrücken:

$$V = \Sigma A_n \lg\{e^{2\mu} - 2e^{\mu+\mu_n}\cos(\varphi-\varphi_n) + e^{2\mu_n}\},$$

wobei jedes Glied der Summe einer Elektrode entspricht, deren Lage auf der Kugel durch μ_n und φ_n ausgedrückt wird. Der Verfasser zeigt ferner, wie zu dem System der Potentiallinien das System der Stromlinien berechnet werden kann.

Das Problem wird erheblich complicirter, wenn die leitende Ebene oder die leitende Kugelschale begrenzt ist. Der Verfasser giebt eine Uebersicht über diejenigen Begrenzungen in beiden Fällen, bei welchen bis jetzt eine Lösung gegeben worden ist.

Von ersteren geht derselbe specieller auf die Fälle ein, wo die Strömung in einem von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Ring und in einem Stück desselben stattfindet, welches durch zwei Radien abgeschnitten wird, deren Winkel $\frac{\pi}{n}$ beträgt.

Ausserdem wird noch kurz die Strömung in einer cylindrischen Fläche und in einer Fläche von beliebiger Krümmung besprochen. Ok.

A. GUÉBHARD. Sur une méthode expérimentale propre à déterminer les lignes de niveau dans l'écoulement stationnaire de l'électricité à travers les surfaces conductrices. C. R. XC. 984-987.

A. GUÉBHARD. Sur les lignes équipotentielles d'un plan formé de deux moitiés inégalement conductrices. C. R. XC. 1124-1126.

Eine Metallplatte wird in eine Lösung von essigsaurem Blei und essigsaurem Kupfer gelegt. Durch zwei in die Lösung tauchende Drähte wird der Strom einer galvanischen Kette zu- resp. abgeleitet. Auf der Metallplatte entstehen dann nach Art der Nobili'schen Farbenringe Curvensysteme durch Ablagerung der Zersetzungsproducte in verschiedener Dichtigkeit. Offenbar durch eine äussere Aehnlichkeit verleitet behauptet der Verfasser, dass dieselben mit den Curven gleichen Potentials übereinstimmen, falls man der Platte an den beiden Punkten direct einen Strom zuführte. Diese Auffassung ist jedenfalls irrthümlich. Es kann daher auch nur von einer gewissen Aehnlichkeit die Rede sein, wenn der Verfasser eine Platte anwendet, welche aus zwei verschiedenen Metallen besteht und nun nach seiner Methode die von Kirchhoff, Quincke und Anderen in diesem Fall berechneten und experimentell bestimmten Potentialcurven wiedergefunden haben will. Ok.

E. DORN. Ueber die Fortführung der Elektricität durch strömendes Wasser in Röhren und verwandte Erscheinungen. Pogg. Ann. (2) IX. 513-552, X. 46-77.

Die hier vorliegende umfangreiche Abhandlung ist ausschliesslich experimentell. Während der Untersuchungen des Verfassers über die elektromotorischen Kräfte, welche durch Strömung des Wassers in Röhren erzeugt werden, ist eine wichtige theoretische Untersuchung von Helmholtz (F. d. M. XI. 1879. 750-752) veröffentlicht worden. Die Resultate der Versuche stehen mit der dort entwickelten Theorie in Uebereinstimmung. Ok.

H. Helmholtz. Ueber Bewegungsströme am polarisirten Platina. Berl. Monatsber. 1880. 285-305; Pogg. Ann. (2) XI. 737-759.

In dem ersten Theil der vorliegenden Abhandlung bespricht der Verfasser seine experimentellen Untersuchungen über den Verlauf der galvanischen Polarisation und über die Bewegungsströme. Die beobachteten Erscheinungen werden im zweiten Theil theoretisch erklärt, indem eine Annahme über die Natur der Elektrolyse zu Grunde gelegt wird, welche in nahem Zusammenhang steht mit den Annahmen über die eigenthümlichen Eigenschaften elektrischer Grenzschichten, über welche vor Kurzem (F. d. M. XI. 1879. 750-752) berichtet worden ist. Ok.

A. Witkowski. Ueber den Verlauf der Polarisationsströme. Pogg. Ann. (2) XI. 759-771.

Wird durch angesäuertes Wasser ein elektrischer Strom geleitet, so entstehen an den Elektroden durch die ausgeschiedenen Gase elektromotorische Gegenkräfte, welche die Stärke des ersten Stromes schwächen. Sind die Elektroden von Platin, so dringt der ausgeschiedene Wasserstoff in das Innere des Platins ein. Wird daher die Gegenkraft der Dicke der Gasschicht proportional gesetzt, so wird dieselbe kleiner in Folge der oben erwähnten Erscheinung. Für das Eindringen des Wasserstoffs in das Innere der Metalle setzt der Verfasser das Gesetz der geleiteten Wärme voraus und löst die Aufgabe, die Stärke eines Stromes als Function der Zeit zu berechnen, wenn derselbe durch Platinelektroden und eine Wasserschicht fliesst. Der Gang der Rechnung ist ähnlich, wie bei Problemen der geleiteten Wärme. Die erhaltenen Resultate werden durch Versuche bestätigt. Schliesslich weist der Verfasser darauf hin, dass man auf ein mathematisch sehr ähnlich formulirtes Problem geführt wird, wenn man den Verlauf eines Stromes berechnet, welcher durch zwei verschiedene Metallstäbe fliesst, an deren Berührungsstelle Wärme erzeugt oder verbraucht wird, und auf die Verbreitung dieser Wärme durch Leitung Rücksicht nimmt. Ok.

---

dieselben aus einer elektromotorischen Kraft bestehen, deren Componenten proportional sind den Ausdrücken:

$$(bc' - b'c), \quad (ca' - ac'), \quad (ab' - a'b).$$

Hier bezeichnen a, b, c die Stromcomponenten in dem betreffenden Punkte des Mediums und a', b', c' die magnetischen Kraftcomponenten in demselben Punkte. Die neue elektromotorische Kraft steht also senkrecht auf den Stromlinien und auf den magnetischen Kraftlinien.

Ist es gestattet anzunehmen, dass auch in einem diëlektrischen Medium dieselben Zusatzkräfte bei der Verbreitung von Lichtschwingungen wirksam sind, so würde sich hieraus die Drehung der Polarisationsebene erklären lassen. Ok.

H. R. Hertz. Versuche zur Feststellung einer oberen Grenze für die kinetische Energie der elektrischen Strömung. Pogg. Ann. (2) X. 414-448.

Wirkt in einem Drahtkreise vom Widerstand w eine veränderliche elektromotorische Kraft A, so ist nach dem Ohm'schen Gesetze die Stromstärke i aus der Differentialgleichung zu berechnen:

$$iw = A - 2P\frac{di}{dt},$$

wo P das Potential des Kreises auf sich selbst bedeutet. Käme der Elektricität eine träge Masse zu, so würde diese Gleichung heissen:

$$wi = A - (2P + m)\frac{di}{dt}.$$

Das Vorhandensein einer solchen Masse würde also eine Vermehrung des Potentials P repräsentiren. Um die vorliegende Frage zu entscheiden, mussten daher Extraströme gemessen werden, welche in Drahtstücken entstehen, deren Inductionspotential klein ist und aus der Theorie berechnet werden kann. Es wurden hierbei theils Doppelrollen benutzt, bei denen der Strom je zwei benachbarte Windungen in entgegengesetztem Sinne durch-

läuft, theils geradlinig ausgespannte Drähte. Von Interesse, besonders in mathematischer Beziehung, ist hierbei die Art, wie der Verfasser die Berechnung im ersten Fall durchgeführt hat.

Von der Besprechung der Methode, nach welcher die Extraströme bestimmt wurden, muss hier abgesehen werden. Die Versuche liessen den Einfluss einer Masse der Elektricität nicht erkennen. Der Verfasser fasst das Resultat derselben in dem Satz zusammen:

„Die kinetische Energie (mi^2) der elektrischen Strömung in einem Cubikmillimeter eines kupfernen Leiters, welcher von einem Strome von der elektromagnetischen Dichtigkeit 1 durchflossen wird, beträgt weniger als

0,008 Milligrammillimeter."

Ok.

NIEMÖLLER. Deformation eines elastischen geknickten Stromleiters unter Einwirkung des Erdmagnetismus. Schlömilch Z. XXV. 147-156.

Ein ein bis zwei Meter langer Draht wird in seiner Mitte um einen rechten Winkel umgebogen und die beiden Enden zwischen Holzleisten eingeklemmt, so dass der Draht und die Leiste ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck bilden. Dasselbe wird in die Verticalebene des magnetischen Meridians gebracht und durch den Draht ein elektrischer Strom geleitet. Die elektromagnetische Wirkung des Erdmagnetismus lenkt den Draht aus der Ebene ab, und dadurch wird derselbe deformirt. Die Ablenkung kann mit Hilfe des Mikroskops gemessen werden. Der Verfasser giebt die ausführliche Berechnung dieses Versuches nach den Grundsätzen der Elasticitätstheorie, wobei er die Entwicklungen und Bezeichnungen von Clebsch zu Grunde legt. Die beobachteten Ablenkungen stimmen mit den berechneten gut überein.

Ok.

E. RIECKE. Ueber die sogenannte unipolare Induction. Pogg. Ann. (2) XI. 413-433.

Nach einer historischen Uebersicht über die früheren Versuche, die Theorie dieser Erscheinungen zu geben (vergl. Lorberg, F. d. M. X. 1878. p. 714-716), geht der Verfasser auf das Weber'sche Grundgesetz zurück, um zunächst die elektromotorische Wirkung eines Stromelementes auf ein Drahtelement zu bestimmen. Es wird dann weiter angenommen, dass das Stromelement einem Solenoid angehört, welches um eine Axe rotirt. Hierbei zeigt sich, dass das Solenoid auch in diesem Fall durch einen Magnet ersetzt werden kann, und dass bei der eigentlichen unipolaren Induction nur die Wirkung des rotirenden Magnets auf den ruhenden Theil der Leitung in Betracht zu ziehen ist. Als bemerkenswerthes Resultat stellt sich zum Schluss heraus, dass die von dem Verfasser entwickelte elektrodynamische Theorie der unipolaren Induction zu demselben Resultat führt, wie die ältere elektromagnetische, so dass diese Gruppe von Erscheinungen nicht zur Entscheidung der Frage, ob magnetische Fluida oder Molecularströme anzunehmen sind, verwerthet werden kann.

Ok.

K. Schering. Allgemeine Theorie der Dämpfung, welche ein Multiplicator auf einen Magnet ausübt. Pogg. Ann. (2) IX. 287-302, 452-483.

Durch die Schwingungen des Magnets in einem Multiplicator werden bekanntlich in den Drahtrollen Inductionsströme erregt, welche der Bewegung des Magnets entgegenwirken. Bei kleinen Schwingungsamplituden kann man diese Wirkung als eine Kraft in Rechnung ziehen, welche der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit proportional ist. Sind die Amplituden grösser, oder schwingt der Magnet nicht um seine ursprüngliche Gleichgewichtslage, so ist die dämpfende Kraft allgemeiner als eine Function des Ausschlags anzusehen. Der Verfasser constatirt diese Thatsache zunächst durch den Versuch, indem er das logarithmische Decrement bestimmt, wenn der Magnet um die mittlere Gleichgewichtslage schwingt. Nachdem dann der Magnet durch einen passend liegenden Magnetstab um einen kleinen Winkel

abgelenkt ist, wird das logarithmische Decrement von neuem bestimmt und ergiebt sich kleiner, als im ersten Fall.

Diese Erscheinungen lassen sich theoretisch verfolgen, wenn man für die Bewegungsgleichung des Magnets die folgende Differentialgleichung annimmt:

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2}+P(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}+Q(\varphi)=0,$$

oder bei Entwicklung der Functionen P und Q nach Potenzen von φ und Vernachlässigung höherer Glieder:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2m(1-m_1\varphi^2)\frac{d\varphi}{dt}+n^2(1-n_1^2\varphi^2)\varphi=0.$$

Zur Integration derselben wird zunächst gesetzt:

$$\varphi=Ae^{-mt}\sin(\beta t+B),\quad \beta^2=n^2-m^2,$$

dann werden die Constanten A und B als Functionen von t angesehen und durch Annäherungsrechnung bestimmt.

Aus dem auf diese Weise erhaltenen Integral der Differentialgleichung werden die Werthe der durch die Dämpfung veränderten Schwingungsdauer und des logarithmischen Decrementes berechnet, wobei man erhält:

$$\tau=\frac{\pi}{\beta}(1-S_1\alpha_1^2),\quad \lambda=\frac{\pi}{\beta}m(1-S_2\alpha_1^2).$$

Hier ist α_1 die Ablenkung von der mittleren Gleichgewichtslage, S_1 und S_2 sind Constanten, welche durch den Versuch bestimmt werden können. Die Vergleichung dieser Formeln mit den oben besprochenen Versuchen gab eine gute Uebereinstimmung.

Ok.

C. Laske. Messungen über das Mitschwingen für den Fall starker Dämpfung. Wien. Ber. LXXXII. 1011-1020.

Eine Drahtrolle ist so aufgehängt, dass sie um ihren verticalen Durchmesser drehende Schwingungen ausführen kann. Hierbei werden durch den Erdmagnetismus Ströme erregt, welche zu einem Galvanometer geleitet werden und auf die Magnetnadel desselben wirken. v. Ettingshausen hat die Einwirkung dieser

Ströme auf die Nadel theoretisch untersucht. Die vorliegende Arbeit ist eine experimentelle Prüfung einiger von Ettingshausen erhaltenen Formeln für den Fall, dass die Magnetnadel eine sehr starke Dämpfung hat oder aperiodisch ist. Ok.

F. Himstedt. Einige Versuche über Induction in körperlichen Leitern. Gött. Nachr. 1880. 491-511; Pogg. Ann. (2) XI. 812-832.

Der Verfasser hat zwei Gruppen von Versuchen angestellt. Bei der ersten führt ein System, aus zwei fest mit einander verbundenen Magneten bestehend, drehende Schwingungen um eine Axe aus, welche gleichzeitig der verticale Durchmesser einer leitenden Kugel ist. Durch die Bewegung der Magnetpole werden in der Kugel Ströme inducirt, welche dämpfend auf die Schwingungsbewegung einwirken. Ausgehend von den allgemeinen Bewegungsgleichungen der Elektricität, wie sie Helmholtz in Borchardt J. LXXII. aufgestellt hat, löst der Verfasser das Problem, die elektrischen Strömungen in der Kugel und ihre Rückwirkung auf das magnetische System zu berechnen.

Bei der zweiten Gruppe von Versuchen schwingt umgekehrt eine leitende Kugel, welche bifilar aufgehängt ist, in einem homogenen magnetischen Feld. Auch hier entstehen Inductionsströme und in Folge der Einwirkung der magnetischen Kraft werden die Schwingungen gedämpft. Die Rechnung lässt sich auch in diesem Fall durchführen. Aus beiden Versuchsgruppen kann die Leitungsfähigkeit der Substanz (Kupfer) der Kugeln berechnet werden. Die erhaltenen Resultate stimmen gut mit einander überein.

Ok.

J. Joubert. Sur la loi des machines magnéto-électriques. C. R. XCI. 467-470, 493-495.

Der Verfasser hat die Stromintensität magneto-elektrischer Maschinen, welche Wechselströme liefern, untersucht und gefunden, dass sich für die mittlere Stromstärke in einer halben Pe-

riode der Ausdruck ergiebt:

$$J = \frac{C}{\sqrt{R^2 + m^2}}.$$

Er zeigt sodann, dass dieser Ausdruck sich aus den Gesetzen der Induction ableiten lässt. Ist E die mit der Zeit veränderliche elektromotorische Kraft, R der Widerstand, U das Potential des Stromkreises auf sich selbst, so gilt die Grundgleichung:

$$E = iR + U\frac{di}{dt}.$$

Ist ferner

$$E = E_0 \sin\frac{2\pi t}{T},$$

so ist

$$i = \frac{E_0}{\left(R^2 + \frac{4\pi^2 U^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right).$$

Ferner ist der Mittelwerth von i, von $t = 0$ bis $t = \frac{T}{2}$:

$$J = \frac{\frac{2E_0}{\pi}}{\left(R^2 + \frac{4\pi^2 U^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Von diesen Ausdrücken werden Anwendungen auf die vortheilhafteste Construction magneto-elektrischer Maschinen gemacht.

Ok.

M. Deprez. Sur le rendement économique des moteurs électriques et sur la mesure de la quantité d'énergie, qui traverse un courant électrique. C. R. XC. 590-593.

Wird durch einen elektrischen Strom ein Motor getrieben, so ist die Stromstärke kleiner, wenn der Motor in Bewegung ist, als wenn derselbe ruht. Im letzteren Fall kann man durch Einschaltung eines passenden Widerstandes dieselbe Stromstärke i herstellen, welche sich während der Bewegung des Motors ergiebt. Bezeichnet man mit r_1 den Widerstand des Kreises, mit

r_2 den eben erwähnten Widerstand, so ist die erzeugte Wärme

$$Q = (r_1 + r_2) i^2.$$

Wird bei der Bewegung des Motors die Wärmemenge T in Arbeit umgesetzt, so ist

$$Q = r_1 i^2 + T.$$

Also ist der ökonomische Coefficient $\frac{T}{Q} = \frac{r_2}{r_1 + r_2}$. Der Verfasser wendet diese Betrachtungen auf einen Stromkreis an, welcher zwei dynamoëlektrische Maschinen enthält, von denen die eine einen Strom erzeugt, welcher die andere bewegt. Der ökonomische Coefficient ist in diesem Fall $\frac{E}{E_1}$, wo E_1 die elektromotorische Kraft der ersten, E diejenige der zweiten Maschine bedeutet. Ok.

G. Cabanellas. Sur un nouveau théorème électrodynamique. C. R. XCI. 1062-1063.

Die kurze Notiz bezieht sich auf zwei in Verbindung gesetzte elektrische Maschinen. Ok.

P. F. S. Provenzali. Sulla conservazione del moto. Acc. P. d. N. L. XXXIII. 124-127.

Philosophische Betrachtungen über das Princip der Erhaltung der Energie. Ok.

J. Stefan. Ueber die Tragkraft der Magnete. Wien. Anz. 1880. 14-15; Wien. Ber. LXXXI. 89-117.

Die Aufgabe, die Tragkraft eines Magnets oder die Anziehung eines Magnets auf eine denselben berührende Eisenmasse zu berechnen, ist sehr schwierig und ihre Lösung nur in besonders einfachen Fällen möglich. Der Verfasser behandelt zwei derartige Probleme.

Ein Eisenring sei von einer Magnetisirungsspirale umgeben

und überall gleichmässig magnetisirt. Denkt man sich denselben durch eine Ebene senkrecht zur Ebene der Mittellinie des Ringes zerschnitten, so kann man den einen Theil als Magnet, den anderen als Anker ansehen und die Anziehung beider Theile auf einander berechnen. Wird der Ring in zwei gleiche Theile zerschnitten, so ist die Tragkraft:

$$A = 2\pi\mu^2 q,$$

wo μ das magnetische Moment der Volumeneinheit, q den Querschnitt des Ringes bedeuten. Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit Versuchen über die Tragkraft, sowie die Abhängigkeit derselben von der Stärke des magnetisirenden Stromes können wir hier übergehen.

Bei dem zweiten von dem Verfasser berechneten Fall handelt es sich um eine Kugel, welche durch eine überall gleiche Kraft magnetisirt wird. Denkt man sich dieselbe durch eine Ebene geschnitten, welche zur Kraftrichtung senkrecht ist, so kann wieder der eine Theil als Magnet, der andere als Anker angesehen werden. Ok.

B. Bandke. Einwirkung eines entfernten Magnets und einer von diesem inducirten Eisenkugel auf eine parallelepipedische Magnetnadel. Pr. Saalfeld.

Der Verfasser entwickelt zunächst in bekannter Weise die Formeln für das Potential magnetischer Massen und für die Induction von Magnetismus in Eisenmassen, insbesondere in einer Vollkugel und in einer Hohlkugel. Es wird dann weiter die Einwirkung auf einen Magnetstab berechnet und eine Reihe einfacher Fälle hervorgehoben, welche sich entweder dadurch ergeben, dass die Kugel sich in speciellen Lagen gegen die Nadel befindet, oder dadurch, dass einzelne Dimensionen der Nadel unendlich klein sind. Ok.

K. Schering. Ueber eine neue Anordnung der Magnete eines Galvanometers. Gött. Nachr. 1880. 455-457.

Der Multiplicatorrahmen wird mit seiner Längsrichtung vertical gestellt und statt eines Magnetstabes ein System von 33 fest mit einander verbundenen, kurzen Stäben benutzt, wodurch die Einwirkung von Inductionsstössen erheblich vergrössert wird.

Ok.

W. Schaper. Untersuchungen über die äquipotentiale Vertheilung der magnetischen Fluida cylindrischer Stahlstäbe. Pogg. Ann. (2) IX. 418-451.

Verschiebt man eine Drahtrolle von einem Punkte eines cylindrischen Magnetstabes zu einem anderen, so kann der hierdurch erregte Inductionsstrom in erster Annäherung als Mass der Veränderung des Magnetismus des Stabes an der betreffenden Stelle dienen. Indem der Verfasser nach dieser Methode die Vertheilung des Magnetismus in einem Magnetstab untersucht, geht er von der Annahme aus, dass man den Magnetismus desselben ersetzt denken kann durch zwei magnetische Massen an den Endpunkten des Stabes und durch eine Massenvertheilung in der Axe desselben. Für diese wird das Gesetz angenommen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n z^n,$$

wo z die Entfernung des betreffenden Punktes vom Mittelpunkt bedeutet. Es zeigt sich, dass man bei dem von dem Verfasser benutzten Magnet nur

$$f(z) = M_1 z + M_3 z^3$$

zu setzen braucht.

Auf Grund dieser Annahme wird dann die Stärke des inducirten Stromes berechnet, wenn die Rolle parallel mit sich selbst um ein kleines Stück verschoben wird. Die in die berechnete Formel eingehenden Constanten werden aus den Versuchen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Es zeigt sich, dass die Beobachtungen durch die Formel in befriedigender Weise dargestellt werden. Wird dagegen die benutzte Rolle durch eine Rolle von anderem Radius ersetzt, so stimmen die auf zwei verschiedene Arten ermittelten Gesetze der Verthei-

lung des Magnetismus nicht mehr überein. Daraus folgt, dass für derartige Versuche die Wirkung des Magnets nicht durch die Wirkung von Massen in der Axe ersetzt werden kann. Man muss vielmehr auf die unter allen Umständen gültige Vertheilung von Magnetismus über die Oberfläche des Stabes zurückgehen. Der Verfasser führt auch für diesen Fall die sehr complicirte Berechnung der durch Verschiebung der Spirale erregten Inductionsströme durch, ohne eine Vergleichung mit Versuchen vorzunehmen. Ok.

A. Righi. Contribuzioni alla teoria della magnetizzazione dell' acciaio. Mem. d. Bologna (4) I. 433-545.

Der Verfasser hat eine umfangreiche experimentelle und theoretische Untersuchung über den temporären und permanenten Magnetismus von Stahlstäben angestellt. Insbesondere berücksichtigt derselbe den Einfluss einer plötzlichen und langsamen Entstehung und Aufhebung der magnetisirenden Kraft auf die permanenten Momente, die eigenthümliche Erscheinung der Umkehrung der Polarität bei plötzlicher Unterbrechung u. s. w.; mit einem Wort eine Reihe von Einwirkungen der Coërcitifkraft bei der Magnetisirung und Entmagnetisirung. Ferner giebt derselbe eine sehr umfangreiche Theorie dieser Erscheinungen, wobei er von der Vorstellung drehbarer Molecularmagnete ausgeht und sich im Ganzen an die erste Formulirung dieser Theorie von W. Weber anschliesst. Für die weitere Ausführung dieser Theorie müssen wir auf die Originalabhandlung verweisen. Ok.

O. Pfannstiel. Ueber eine Methode, die Intensität des horizontalen Theiles des Erdmagnetismus in absolutem Masse nur mittels Schwingungsbeobachtungen zu bestimmen. Schlömilch Z. XXV. 271-279.

In seiner Abhandlung „Intensitas vis magneticae terrestris etc.“ erwähnt Gauss kurz eine bereits von Poisson angegebene Me-

thode, die Horizontalcomponente ohne Ablenkungs- oder Winkelbeobachtungen zu bestimmen, bezweifelt aber deren Brauchbarkeit. Der Verfasser bespricht eine ähnliche Methode, bei welcher durch Magnetstäbe im Meridian die Einwirkung des Erdmagnetismus auf eine Nadel verstärkt oder geschwächt wird, wodurch die Schwingungsdauer eine Aenderung erfährt. Er giebt alle für die Berechnung der Versuche vorkommenden Formeln, aus denen hervorgeht, dass man die Wechselwirkung dreier Stäbe hierbei benutzen muss, wenn nur Schwingungszeiten gemessen werden. Auch Beobachtungen werden mitgetheilt, welche recht genaue Werthe der Horizontalcomponente liefern, und welche die Methode als eine ganz brauchbare erscheinen lassen.

Ok.

H. Wild. Vollständige Theorie des Bifilarmagnetometers und neue Methoden zur Bestimmung der absoluten Horizontalintensität des Erdmagnetismus sowie der Temperatur- und Inductionscoëfficienten der Magnete. Pogg. Ann. (2) X. 597-608; Carl Rep. XIII. 325-334.

Der Verfasser hat gefunden, dass bei den Beobachtungen mit dem Bifilarmagnetometer die Torsion der Aufhängungsdrähte, sowie die inducirende Wirkung des Erdmagnetismus auf den Magnetstab nicht vernachlässigt werden dürfen. Ferner schlägt derselbe die folgende neue Methode vor, um mit Hilfe dieses Instruments die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus zu bestimmen. Der Magnetstab M wird in die transversale Lage gebracht und der Torsionswinkel z gemessen. Ferner wird ein zweiter Stab M' in das Bifilarmagnetometer gebracht und die Torsionswinkel z_1 und z_2 bestimmt, während ausser dem Erdmagnetismus noch der Stab M im Meridian liegend auf M' wirkt. Bei der letzten Beobachtung ist M um 180° gedreht. Endlich sind noch die Schwingungszeiten der Magnete in den drei Fällen zu bestimmen. Aus den gefundenen Winkeln und Schwingungszeiten können dann die Horizontalintensität und die Inductions-

coefficienten berechnet werden. Der Verfasser giebt zum Schluss alle hierzu erforderlichen Formeln ohne Ableitung an.

Ok.

Lösungen von Aufgaben über elektrische Ströme von G. C. Foster finden sich Educ. Times XXXIII. 32-33, 66-67.

O.

Capitel 4.

Wärmelehre.

E. Herrmann. Compendium der mechanischen Wärmetheorie mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Maschinentechnik. Berlin. 1879. Ernst u. Korn. Z. dtsch. Ing. XXIV. 49-56, 103-112.

Herr F. Grashof bespricht das für Maschinentechniker bestimmte Buch ausführlich. Nach einer Einleitung folgen vier Abschnitte mit den Ueberschriften: Ableitung der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. Das Verhalten der Gase. Das Verhalten der Dämpfe und tropfbaren Flüssigkeiten. Theorie der calorischen Motoren.

Rs.

M. Deprez. Sur le mesureur d'énergie. C. R. XC. 590-593, 812-814.

Der Verfasser hat in der ersten Mittheilung das Mass für die Energiemenge, welche durch einen Schliessungskreis geht, auf das Product JJ' der Stromintensitäten in der Haupt- und Nebenschliessung zurückgeführt und beschreibt in der zweiten einen Apparat, mit dessen Hülfe man den Werth von JJ' leicht erhalten kann.

Rs.

Despeyrous. Sur la thermodynamique. Mém. d. Toul. (8) II. 167-175.

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen führen die Ansichten des Verfassers darüber, was Wärme, Licht, Schall u. s. w. seien, ihn zu dem Schluss: „Die Gesetze der Mechanik verknüpfen und erklären alle physikalischen Erscheinungen.“ Im zweiten Theil handelt es sich hauptsächlich um die Herleitung des Boyle-Gay-Lussac'schen Gesetzes aus der Gleichung für die lebendige Kraft eines Gases. Rs.

G. van der Mensbrugghe. Sur l'application du second principe de la thermodynamique aux variations d'énergie potentielle des surfaces liquides. Bull. de Belg. (2) XLIX. 620-627.

Berichtigende Ergänzung zu den Noten, die im Bd. XLVIII. p. 344 und folgende abgedruckt sind. Mn. (O.)

G. van der Mensbrugghe. Du rôle de la surface libre de l'eau dans l'économie générale de la nature. Bull. de Belg. (2) L. 155-157.

Besprechung einer Arbeit, die der Verfasser im Jahre 1879 der Association française pour l'avancement des sciences vorgelegt hatte. Er giebt darin hauptsächlich einen vervollständigenden Bericht über mehrere seiner früheren Arbeiten. Mn. (O.)

G. van der Mensbrugghe. Voyages et métamorphoses d'une goutelette d'eau. Bull. de Belg. (2) L. 423-427.

Auseinandersetzung eines grossen Theils der Untersuchungen des Verfassers über die thermodynamische Theorie der Flüssigkeiten, mit Ausschluss der theoretischen Rechnungen.

Mn. (O.)

A. Pazienti. Considerazioni generali intorno alla termodinamica. Mem. Ist. Ven. XX. 249-256.

Die aus dem zweiten Hauptsatze hergeleitete Gleichung

$$Ar = (s-\sigma)T\frac{d\mu}{dT}$$

leistet beim Studium der Eigenschaften von Flüssigkeiten gute Dienste. Indem ausserdem durch Experimente bekannt gewordene Zahlen benutzt werden, können Beziehungen über die Verdampfungswärme leicht verständlich gemacht und durch einfache Schlüsse hergeleitet werden. Rs.

O. E. Meyer. Ueber eine veränderte Form meines Beweises für das Maxwell'sche Gesetz der Energievertheilung. Pogg. Ann. (2) X. 296-304.

L. Boltzmann. Erwiderung auf die Notiz des Herrn O. E. Meyer, „Ueber eine veränderte Form etc.“ Pogg. Ann. (2) XI. 529-534.

1) Damit die von Herrn Boltzmann gemachten Bemerkungen (s. F. d. M. XI. 1879. 778-779) nicht mehr zutreffen, geht der Verfasser beim neuen Beweise von einer anderen Annahme aus. Nach gegebenem Beweise wird auf die Einwände des Herrn Boltzmann eingegangen; dabei wird bemerkt, dass es sich nicht um ein Maximum in streng mathematischem Sinne gehandelt habe.

2) Herr Boltzmann vermisst den Grund, warum beim Beweise grade die Wahrscheinlichkeit bei gegebener und nicht die bei willkürlicher Reihenfolge der Theilchen gesucht wird. Die Lösung des neuen Problems, welches sich Herr Meyer gestellt hat, sei durchaus kein Beweis des Maxwell'schen Gesetzes.

Rs.

A. Walter. Theoretische Bestimmung der Gesetze, wonach bei vollkommenen Gasen die Molecularsphären resp. Wirkungssphären, die Weglänge, sowie die Coefficienten der inneren Reibung und Wärmeleitung von der Temperatur abhängen. Pr. Tarnowitz.

Für den Fall, dass die Masse der Molecüle als unveränderlich betrachtet werden kann, seien die Gesetze des Wechsels der Geschwindigkeiten bei den Molecülen der vollkommenen Gase als erledigt zu betrachten, dagegen nicht die der Veränderungen der räumlichen Ausdehnung der Molecüle. Der Verfasser will einen Beitrag zur Lösung dieses Problems liefern. Für die Erscheinung der inneren Reibung erhält er durch seine Betrachtungen Resultate, welche mit der Erfahrung gut übereinstimmen.

Rs.

H. A. Lorentz. De bewegingsvergelijkingen der gassen en de voortplanting van het geluid volgens de kinetische gastheorie. Versl. en Mededeel. XV. 350-394.

Kurze Zeit nach dem Erscheinen der ersten Abhandlung von Clausius über die moleculare Theorie der Gase machte Jochmann (Pogg. Ann. Bd. CVIII.) das Bedenken geltend, dass diese Theorie von den Bewegungserscheinungen der Gase, namentlich der Schallbewegung keine Rechenschaft geben könne. Er wurde darauf geführt durch die Meinung, dass die neue Anschauungsweise wohl den Druck eines Gases gegen einen andern Körper, aber nicht den gegenseitigen Druck einander nahe benachbarter Gasschichten erklären könne. Sobald Clausius nachgewiesen hatte, dass die Gasmolecüle nicht allein gegen einen fremden Körper, sondern auch gegen einander stossen, fiel dies Bedenken weg und konnte die Möglichkeit einer Erklärung zugegeben werden. Später wurden dann auch durch verschiedene Forscher die Fragen behandelt: Welches ist nach der neueren Theorie der Mechanismus der Schallbewegung, und ferner, wie verhalten sich dabei die Gasmolecüle, und welche Beziehung besteht zwischen der Geschwindigkeit des Schalles und der mittleren Geschwindigkeit des Molecüls? Die auf diese Fragen gegebenen Antworten konnten nicht befriedigend genannt werden, bis Maxwell, obwohl er nicht absichtlich die Beantwortung dieser Fragen vornahm, den Weg zeigte, auf dem die Antwort zu erhalten ist. In seiner weiten Abhandlung über die Theorie der Gase (Phil. Mag. XXXV.)

hat er die Bewegungsgleichungen dieser Körper abgeleitet, und dies ist für die Erklärung der Schallbewegung als vollkommen genügend zu betrachten. So lange Maxwell keine besondere Voraussetzung über die Wirkung der Gasmolecüle auf einander macht, erhält er die Bewegungsgleichungen nur in einer allgemeinen für die Anwendung unzureichenden Form. Sie enthalten nämlich die Componenten des Druckes, ohne dass sie als abhängig von der Dichtigkeit, Temperatur und Bewegung des Gases vorausgesetzt sind. Um diese Abhängigkeit zu finden, wird die Annahme gemacht, dass die Molecüle einander abstossen mit einer Kraft, welche umgekehrt proportional ist mit der fünften Potenz des Abstandes. Da man diese Annahme schwerlich für richtig halten wird, ist es wünschenswerth, die Bewegungsgleichungen unabhängig von derselben abzuleiten. Wird diese Aenderung angebracht, so lassen die Betrachtungen Maxwell's nur noch für mehratomige Gase an Strenge zu wünschen übrig.

In der obengenannten Abhandlung sucht der Verfasser auch für die mehratomigen Gase die Bewegungsgleichungen ohne besondere Voraussetzungen über die Bewegung der Molecüle abzuleiten. Will man nur in den Hauptzügen eine Erklärung der Schallbewegung geben, so kann man sich mit unendlich kleinen Störungen des Gleichgewichtszustandes begnügen und von der Wirkung äusserer Kräfte, so wie von der inneren Reibung und der Wärmeleitung absehen. Mit Rücksicht auf andere Anwendungen der Bewegungsgleichungen hat indessen der Verfasser von Anfang an das Vorhandensein äusserer Kräfte und endlicher Störungen angenommen und später auch die Reibung und Wärmeleitung in Rechnung gebracht.

Im ersten Paragraph wird die Grundgleichung der molecularen Bewegungen der mehratomigen Gase nach Boltzmann's Vorgang abgeleitet. Das Resultat ist die Formel:

$$b-a=\frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \zeta}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial x}\xi+\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial z}\zeta+\frac{\partial F}{\partial t}.$$

Hierin sind x, y, z die Coordinaten eines Volumenelementes dl, ξ, η, ζ die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes eines Molecüls. Die in einer bestimmten Gruppe vorhandene Anzahl Elemente wird durch

$$F(\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \ldots p_k, \quad x, y, z, t)\, d\lambda\, dl,$$

dargestellt, worin E die Summe der Energie der Bestandtheile und der Energie ihrer relativen Bewegung hinsichtlich des gemeinschaftlichen Schwerpunktes ist, $p_1, \ldots p_k$ Parameter sind, welche constant sind, so lange ein Molecül sich ausserhalb des Einflusses der andern bewegt, sich aber ändern nach einem Stoss oder einer Begegnung der Molecüle. Ferner ist

$$d\lambda = d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dE\, dp_1 \ldots dp_k.$$

Ist ferner A die Anzahl der Molecüle, die in Folge des Stosses die Gruppe verlassen, B diejenige der hineintretenden, so ist

$$A = a\, dl\, d\lambda\, dt, \quad B = b\, dl\, d\lambda\, dt.$$

Sobald F bekannt ist, können a und b als Functionen von $\xi, \ldots p, x, y, z, t$ gefunden werden, so dass die obige Formel als Grundgleichung zur Bestimmung von F betrachtet werden kann.

Im zweiten Paragraphen werden aus dieser Gleichung ohne besondere weitere Voraussetzungen über die gegenseitige Wirkung der Molecüle einige Folgerungen gezogen. Hierzu gehört die wohlbekannte Gleichung der Continuität und die Gleichungen, welche in der allgemeinen Theorie der innern Bewegungen eines Körpers die Beschleunigung eines Elementes als abhängig von den äusseren Kräften und von den normalen und tangentialen Drucken und Spannungen darstellen.

Im drittenParagraphen wird zu einer ersten Annäherung durch Vernachlässigung der inneren Reibung und Wärmeleitung fortgeschritten; die Formeln werden unter dieser Voraussetzung vereinfacht und auch die Wirkung äusserer Kräfte ausser Acht gelassen. Im folgenden Paragraphen wird die Uebereinstimmung der so erhaltenen Resultate verglichen mit den Formeln, welche auf gewöhnliche Weise in der Theorie des Schalles entwickelt werden und so die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles abgeleitet. Hierfür wird gefunden:

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5+6\theta'(h_0)}{1+2\theta'(h_0)}\,h_0},$$

worin $\theta(h)$ die intermoleculare Energie für die Masseneinheit des Gases bedeutet; dies Resultat stimmt genau mit der Formel $V = \sqrt{\frac{kp_0}{\delta_0}}$ überein, welche gewöhnlich in der Theorie des Schalles abgeleitet wird und experimentell geprüft ist. Sodann wird ausführlich gehandelt von der Energie, welche in einem Gas vorhanden ist, in welchem eine Schallbewegung stattfindet, und das erhaltene Resultat mit denen verglichen, welche andere Forscher erhalten haben.

In dem letzten Paragraphen kehrt der Verfasser zu der genaueren Ableitung der Bewegungsgleichungen zurück und bringt nun auch die innere Reibung und Wärmeleitung in Rechnung. Hier beschäftigt sich der Verfasser besonders mit dem Wärmeleitungscoefficienten k, welchen man berechnen könnte, wenn der Bau der Molecüle und ihre gegenseitige Wirkung bekannt wäre. Das einzige, was ohne diese Kenntnis aus den Gleichungen abgeleitet werden kann, wie auch bereits zu mehreren Malen bemerkt wurde, ist, dass dieser Coefficient unabhängig von der Dichtigkeit ist. Dasselbe wird auch vom Reibungscoefficienten μ bewiesen. Doch wird noch ein neuer Coefficient ν eingeführt, welcher jedoch nur bei mehratomigen Gasen vorkommt und ebenfalls von der Dichtigkeit unabhängig ist. Dieser wird vom Verfasser folgendermassen definirt: Wenn ein Gas in einem stationären Ruhezustand verharrt, besteht eine gewisse Beziehung zwischen der Energie A_1 der fortschreitenden Bewegung der Molecüle und der intermolecularen Energie A_2; für die Masseneinheit sind dieselben $\frac{1}{2}h$ und $\theta(h)$. Anders liegt die Sache, wenn der Zustand veränderlich ist. Wird z. B. ein Gas zusammengepresst, dann steigt die Bewegungsgeschwindigkeit seiner Molecüle und also auch h; in Folge der Stösse wird nun auch A_1 wachsen. Es wird inzwischen eine gewisse Zeit verfliessen, bis A_2 den Werth $\theta(h)$ annimmt, der im stationären Zustand dem Werthe von A_1 entspricht. Während im Verlaufe der Zusammendrückung h steigt,

wird $A_2 < \theta(h)$ sein. Dies wird durch die Constante ν angegeben. Bei der Zusammenpressung hat nämlich

$$k = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

einen gewissen Werth und νk bestimmt grade, um wie viel A_2 sich von $\theta(h)$ unterscheidet. Da während der Zusammendrückung k negativ ist und $A_2 < \theta(h)$ sein muss, wird ν einen positiven Werth haben. Unglücklicherweise scheint aber für eine experimentelle Bestimmung von ν wenig Aussicht zu sein. Denn nur bei Dichtigkeitsänderungen, welche viel schneller geschehen, als es bei den gewöhnlichen Versuchen über Luftschwingungen der Fall ist, wird ν einen merklichen Einfluss haben können.

Mit den drei Coefficienten k, μ, ν werden nun aber die Resultate sehr complicirt; bei unendlich kleinen Störungen des Gleichgewichtszustandes können sie als constant betrachtet werden, und der Verfasser erhält zum Schlusse einfachere Formen der Bewegungsgleichungen. G.

R. Clausius. Ueber einige neuere Untersuchungen über die mittlere Weglänge der Gasmolecüle. Pogg. Ann. (2) X. 92-103.

Der Verfasser leitet die schon 1858 von ihm gegebene Gleichung für die mittlere Weglänge eines Molecüls

$$l = \frac{1}{n\pi\varrho^2} \frac{\bar{v}}{\bar{r}}$$

ab. Es ist n die Anzahl der Molecüle in der Raumeinheit, ϱ der Radius der Wirkungssphäre eines Molecüls, d. h. die um den Schwerpunkt eines Molecüls beschriebene Kugel, bis zu deren Oberfläche der Schwerpunkt eines anderen Molecüls sich ihm nähern kann, bevor ein Abprallen eintritt. Stellt man sich die Molecüle als harte elastische Kugeln vor, so ist ϱ doppelt so gross als der Radius der Kugeln. $\bar{v}$ ist der Mittelwerth der absoluten Geschwindigkeit eines Molecüls, $\bar{r}$ der Mittelwerth der relativen Geschwindigkeit zweier Molecüle. Als Näherungswerth

für $(\bar{v}:\bar{r})$ fand der Verfasser (3:4). 1859 gab Maxwell sein Gesetz über die Geschwindigkeiten der einzelnen Gasmolecüle. Aus diesem ergab sich für jenes Verhältnis der Werth $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Darauf beschäftigt sich der Verfasser mit den gegen obige Gleichung erhobenen Einwänden von Frowein (Nieuw. Arch. V.), Korteweg (Arch. Néerl. XII. 241-254, s. F. d. M. VIII. 1876. 715-716) und van der Waals (Arch. Néerl. XII. 201-218, s. F. d. M. VIII. 1876. 716-717). Jene Gleichung zu corrigiren, erscheint dem Verfasser nicht zweckmässig, so lange eine nähere Kenntnis über die Molecüle fehlt. Man begnüge sich bei der Bestimmung der mittleren Weglänge mit einer Annäherung und zwar mit obiger Gleichung ihrer einfachen Form wegen. Dabei muss man aber stets beachten, dass sie mit einer Ungenauigkeit der Moleculardimensionen behaftet ist. Diese Ungenauigkeit fällt in dieselbe Kategorie, wie die Abweichung der Gase vom Boyle-Gay-Lussac'schen Gesetze. Rs.

L. Boltzmann. Zur Theorie der Gasreibung. Wien. Ber. 1880. 117-158.

Auf die Schwierigkeiten in der Berechnung jener Function, welche die Vertheilung der Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen der Molecüle eines Gases bestimmt, wird hingewiesen. Diese Schwierigkeiten übertragen sich auf die Berechnung der inneren Reibung, und etwas Aehnliches gilt auch bezüglich der Diffusion zweier Gase und der Wärmeleitung. Bisher hat man nur die Grössenordnung der Reibungs-, Diffusions- und Wärmeleitungsconstanten gewinnen können. Ueber das Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung braucht man allerdings keine Annahme zu machen, wenn man mit Maxwell annimmt, dass die Gasmolecüle während des Zusammenstosses nicht wie elastische Kugeln auf einander wirken, sondern dass sie auf einander eine Abstossung ausüben, welche der fünften Potenz der Entfernung ihrer Centren umgekehrt proportional ist. Durch diese Annahme wird der während des grössten Theiles der Zeit geradlinige Weg

eines Molecüls nur gekrümmt, wenn es zufällig einem anderen Molecül ungewöhnlich nahe kommt, was der modernen Gastheorie nicht widerspricht. Die Behauptung, dass die Annahme dem Joule-Thomson'schen Versuche widerspreche, ist falsch. Allerdings sei die Maxwell'sche Annahme kein Naturgesetz und soll es auch nicht sein. Beide Hypothesen (elastische Kugeln und $\frac{K}{r^5}$) stellen das Verhalten der Gasmolecüle nur so lange angenähert dar, als diese einander so nahe sind, dass durch ihre Wechselwirkung eine erhebliche Veränderung ihrer geradlinigen Bewegung hervorgerufen wird, und geben dann zwar quantitativ, aber nicht wesentlich qualitativ verschiedene Bahnen. Ziemlich dieselbe Beziehung, welche Herr Stefan unter Benutzung der Hypothese elastischer Kugeln zwischen der Diffusionsconstanten zweier Gase und ihren Reibungsconstanten gefunden hat, folgt bei gewissen Annahmen aus der anderen Hypothese $\left(\frac{K}{r^5}\right)$. Dem Folgenden wird die Hypothese elastischer Kugeln zu Grunde gelegt. Um eine exacte Bestimmung der Reibungsconstanten bei dieser Hypothese erhalten zu können, muss das Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung ermittelt werden. Dies geschieht im Anschluss an Gleichung (44) seiner „Weiteren Studien über das Wärmegleichgewicht ...“ (Wien. Ber. LXVI. s. F. d. M. IV. 1872. p. 566). Das Problem wird zurückgeführt auf die Bestimmung einer gewissen Function. Diese konnte bisher nicht in geschlossener Form, sondern nur als Reihe, die nach Potenzen von v^2 fortschreitet, erhalten werden. Die Berechnung der Coefficienten c_n dieser Reihe, welche weitläufig, aber ausführbar ist, sowie die Anwendung der hier befolgten Principien auf die Diffusion zweier Gase und auf die Wärmeleitung wird einer späteren Abhandlung vorbehalten. Sind die Coefficienten bestimmt, so ist der Reibungscoefficient

$$\mu = -\frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{15}\frac{Cm}{q\sqrt{h}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n+5)}{2^{n+3}h^{n+3}}c_n$$

bekannt. C, q, h sind Constanten, m ist die Masse eines Molecüls. Die Convergenz der Reihe ist noch zu beweisen. Nach-

dem zwei der erhaltenen Formeln noch synthetisch hergeleitet sind, wird das Problem für die Ebene behandelt, nämlich „die Bewegung elastischer Kreise in einer unendlichen Ebene oder elastischer Kreiscylinder im Raume, deren Axen zu Anfang parallel und deren darauf senkrechte Endflächen ursprünglich in je einer Ebene lagen.“ Rs.

J. D. VAN DER WAALS. Onderzoekingen omtrent de overeenstemmende eigenschappen der normale verzadegden damp- en vloeistof-lijnen voor de verschielende stoffen en omtrent eene injziging in den vorm dier lijnen bij mengsels. Verh. v. Amst. XX.

J. D. VAN DER WAALS. Over de coëfficienten van iutrekting en van samendrukking in overeenstemmende toestanden der verschielende vloeistoffen. Verh. v. Amst. XX.

Beide Abhandlungen enthalten eine Fortsetzung der bekannten Untersuchungen des Verfassers über die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Die erste handelt von den übereinstimmenden Eigenschaften der normalen gesättigten Dampf- und Flüssigkeitslinien für die verschiedenen Stoffe und über eine Modification in der Form dieser Linien bei Mischungen. Der Verfasser geht davon aus, dass auf jeder isothermischen Linie eines Stoffes unterhalb der kritischen Temperaturen zwei Punkte vorhanden sind, welche als Grenzen betrachtet werden müssen, ausserhalb welcher es möglich ist, dass der Stoff homogen den gegebenen Raum ausfüllt. Der Ort, wo diese Punkte liegen, hängt aber von verschiedenen Umständen ab, so von der Art der Wände und der Form des Raumes. Aber vorläufig dürfen als die wichtigsten unter den möglichen Orten dieser Punkte diejenigen betrachtet werden, welche das Volumen des gesättigten Dampfes oder der Flüssigkeit angeben, da es möglich ist, ohne Veränderung des Druckes von dem einen Volumen zum andern überzugehen. In diesem Fall sind die Punkte, wie zuerst 1875 durch

Maxwell und später 1879 durch Clausius bewiesen ist, auf solcher Höhe gelegen, dass dieselben als Mittel der Höhen angesehen werden dürfen, in welchen die Punkte der theoretischen Curve oberhalb der Abscissenaxe liegen. Ihrer Hauptform nach ist die Curve, welche das Resultat dieser Construction ist, bekannt; ihr Scheitel liegt in der Nähe des kritischen Punktes. Eine Formel für diese Curve ist jedoch noch nicht gefunden. Doch kam es dem Verfasser als wahrscheinlich vor, dass bei allen Stoffen, bei denen keine Besonderheiten, wie Dissociation stattfinden, die Formel dieser Curve die nämliche sein würde, nur unterschieden durch andere Werthe der Constanten. Schon mehrmals versuchte er die Formel der gesättigten Dämpfe und Flüssigkeiten (die Grenzlinie) festzustellen, aber nicht nur die langweilige Berechnung und Complicirtheit der Endformeln, sondern auch der Mangel an Experimenten zur Controle hielten ihn von der Mittheilung der erhaltenen Resultate zurück. Doch glückte es ihm einen Zusammenhang zwischen den Linien für verschiedene Flüssigkeiten zu finden, der mit Sicherheit freilich nur in der Nähe des Scheitels, mit grosser Wahrscheinlichkeit aber auch für den ganzen Verlauf dieser Linien gilt. Dieser Zusammenhang wird folgendermassen angegeben: Wenn der Druck in Theilen des kritischen Druckes, das Volumen in Theilen des kritischen Volumens und die absolute Temperatur in Theilen der kritischen absoluten Temperatur ausgedrückt wird, haben alle Stoffe dieselben Isothermen. Aus diesem Zusammenhang ergeben sich viele andere Beziehungen; die wichtigsten sind: 1) Ist für die verschiedenen Stoffe die absolute Temperatur derselbe Theil der kritischen absoluten Temperatur, dann ist auch vor allem der Druck der nämliche Theil des kritischen Druckes. 2) Ist die absolute Temperatur derselbe Theil der kritischen absoluten Temperatur, dann ist auch das Volumen sowohl des gesättigten Dampfes als auch der Flüssigkeit der nämliche Theil des kritischen Volumens. 3) Wenn man für die verschiedenen Stoffe die Grenzlinie construirt hat, indem man Druck und Volumen in solchem Masstab nimmt, dass die Scheitel zusammenfallen, dann decken die Curven einander vollkommen.

Diese auf theoretischem Wege gefundenen Beziehungen werden an einer Anzahl von Beobachtungen geprüft. Dazu können alle die Stoffe benutzt werden, deren kritischer Druck und kritische Temperatur bekannt sind. Hierbei darf indessen nicht übersehen werden, dass der kritische Druck für keinen einzigen Stoff mit vollkommener Genauigkeit bekannt ist, weil er aus dem Volumen des einen oder anderen permanenten Gases durch Anwendung des Gesetzes von Boyle erhalten ist. Vollkommene Uebereinstimmung von Theorie und Beobachtung darf man deshalb nicht erwarten; doch ist sie so gross, dass, wenn auch der Verfasser noch nicht zu entscheiden wagt, ob die Regel vollkommen richtig ist, sie doch als eine Näherungsregel für den ganzen Verlauf der Curve angesehen werden kann. Auch die Anwendung der gefundenen Beziehungen auf Mischungen wird besprochen. Hier sind keine Beobachtungen bekannt, wodurch die Existenz einer solchen Curve über allen Zweifel erhoben würde, doch sind nach dem Verfasser theoretische und empirische Daten genug vorhanden, um dies höchst wahrscheinlich zu machen. Aus seinen Betrachtungen folgt, dass auch bei Mischungen eine Grenzlinie vorhanden ist, welche sich jedoch erst dann über die Abscissenaxe erhebt, wenn das Volumen kleiner ist als das kritische Volumen, sich aber wahrscheinlich bei sehr niedrigen Temperaturen dieser Axe nähert und sie erreicht, woraus sich der Satz ergeben würde: Alle Stoffe können sich mit einander mischen, wenn nur der Druck einen gewissen Werth überschreitet. Um den experimentellen Beweis dieses Satzes zu liefern, wird man entweder viel höhere Drucke oder viel tiefere Temperaturen anwenden müssen, oder Mischungen suchen, bei denen bereits bei gewöhnlichen Temperaturen Neigung sich zu mischen, vorhanden ist.

In einer Nachschrift bespricht der Verfasser das durch W. Dühring aufgestellte Gesetz über die Temperaturen, wobei die verschiedenen Dämpfe eine gleiche Spannung zeigen. Aus der vorausgehenden Abhandlung erhellt, dass ein solches Gesetz keine rationelle Bedeutung haben kann, weil die Ungleichheit des kritischen Druckes nicht in Rechnung gezogen ist. Nur wenn

zwei Stoffe gleichen kritischen Druck haben, besteht Identität zwischen dem Gesetz von Dühring und dem des Verfassers, wie mit Hülfe von Beobachtungen gezeigt wird. Zum Schluss werden die empirischen Formeln von Magnus und Sajotschewsky für Wasserdampf und Aetherdampf besprochen und mit den obigen Untersuchungen verglichen.

Die zweite im Anfang dieses Referats genannte Abhandlung erscheint als eine Fortsetzung der ersten. Aus dem erwähnten Gesetz von dem Zusammenfallen der isothermischen Linien gleichen Ranges werden hier wieder auf theoretischem Wege einige Folgerungen abgeleitet über den Werth der Coefficienten für Ausdehnung und für Zusammenpressung für verschiedene Stoffe, besonders im flüssigen Zustand. Die hauptsächlichsten sind diese: 1) Die Ausdehnungscoefficienten der verschiedenen Stoffe in übereinstimmenden Zuständen sind umgekehrt proportional der absoluten kritischen Temperatur. 2) Stimmen Temperatur und Volumen überein, so sind diese Coefficienten umgekehrt proportional dem kritischen Druck.

Die Art, wie diese Gesetze durch Beobachtungen zu prüfen sind, wird entwickelt und durch einige Beispiele erläutert, wozu die Beobachtungen von Pierre und Kopp genommen werden. Diese stimmen vortrefflich mit der Theorie überein, zeigen aber hier und da Abweichungen, so dass für jetzt die Frage nach dem Grad von Annäherung, womit das aufgestellte Gesetz gilt, noch nicht beantwortet werden kann. Um hierüber grössere Sicherheit zu erlangen, müssten mehr empirische Daten vorhanden sein. G.

Fr. Roth. Ueber die Zusammendrückbarkeit der Gase.

Pogg. Ann. (2) XI. 1-37.

Nachdem die bisherigen experimentellen Untersuchungen über die Abweichungen vom Boyle-Gay-Lussac'schen Gesetze zusammengestellt sind, beschreibt der Verfasser den von ihm benutzten Apparat, berichtet über die Versuche, welche er mit Kohlensäure, schwefliger Säure, Aethylen und Ammoniak ausgeführt hat, und

stellt die gewonnenen Resultate in Tabellen zusammen und graphisch dar. Alle vier Gase wurden bei den Temperaturen des Wasserdampfes und des Anilindampfes (ca. 184°) untersucht, und ausserdem Kohlensäure bei 18,5°, 49,5°, schweflige Säure bei 58°, Aethylen bei 18,5°, 50,2° und Ammoniak bei 30,2°, 46,6° und 52,8°. Es folgt eine Zusammenstellung der Formeln, welche für die Gase die Beziehung zwischen Druck und Volumen, oder zwischen Druck, Volumen und Temperatur geben sollen. Der Gleichung von van der Waals

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT$$

wird besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Der Verfasser nimmt a als von van der Waals richtig bestimmt an und berechnet b. Die Abweichungen des b bei jeder einzelnen Versuchsreihe sieht er hauptsächlich als eine Folge der Unsicherheit von a an und glaubt, dass die Beziehung zwischen Druck, Volumen und Temperatur für die Gase durch obige Gleichung vollständig wiedergegeben wird. Der Verfasser berücksichtigt dabei auch die Untersuchungen von Janssen, welche dieser in dem Andrew'schen Apparate mit Stickstoffoxydul ausgeführt hat. Die durch die van der Waals'sche Gleichung gegebene Erklärung und Bestimmung der kritischen Temperatur wird mitgetheilt, und bei Benutzung der Ergebnisse des Herrn Sajotschewsky über die kritische Temperatur a und b für eine Anzahl Stoffe berechnet. Rs.

R. Pictet. Équation générale donnant la relation qui existe pour tous les liquides entre leur température et la tension maximum de leurs vapeurs à cette température. C. R. XC. 1070-1074.

Für die Spannkraft der Dämpfe von Flüssigkeiten hat Regnault empirische Formeln, aber keine allgemein gültige Gleichung gegeben. Der Verfasser leitet eine solche ab, indem er folgenden vollständigen und umkehrbaren Kreisprocess betrachtet: In einem Kessel verdampfe bei der Temperatur t' 1 Kilogramm einer Flüssigkeit unter

dem Drucke P'. Die gebildeten Dämpfe lasse man in einen Cylinder von der constanten Temperatur t' (in Celsiusgraden) eintreten. Der Druck sinke dann von P' auf P, wobei die Cylinderwände die Dämpfe auf der Temperatur t' erhalten. Beim Austritt aus dem Cylinder gelangen die Dämpfe in einen „Temperaturänderer"; durch eine centrale Röhre desselben wird später die condensirte Flüssigkeit in ein Reservoir von der Temperatur t $(t < t')$ und dann in den Kessel zurückgeführt. Die Dämpfe treten mit der Temperatur t aus dem „Temperaturänderer" heraus und dringen in den Condensator ein, wo sie unter dem Drucke P und bei der Temperatur t verflüssigt werden. Von dort tritt die Flüssigkeit in den „Temperaturänderer" und, da die specifische Wärme der Flüssigkeit immer grösser ist, als die der Dämpfe, wird beim Eintritt des gleichen Gewichtes Dampf in den „Temperaturänderer" die Temperatur der Flüssigkeit niemals gleich t' sein, und der Kessel von der Temperatur t' wird die Differenz ersetzen müssen. Es sei λ' die Verdampfungswärme der Flüssigkeit bei der Temperatur t', c bez. k die specifische Wärme der Flüssigkeit und die des Dampfes, $(c-k)(t'-t)$ die nothwendige Wärme, um die aus dem „Temperaturänderer" heraustretende Flüssigkeit auf die Temperatur t' zu bringen, $(F:E)$ die Wärme, welche bei der Ausdehnung des Dampfes und der Erzeugung von F Kilogrammeter von den Wänden des Cylinders geliefert wird. Um zu erfahren, welches die Maximalgrösse der Arbeit ist, die zwischen den Grenzen t' und t erhalten werden kann, wird die zur Erzeugung der Temperatur t' erforderliche Wärmemenge berechnet und der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie angewendet. Die so erhaltene Menge von Kilogrammen wird gleich der durch den Druck auf den Stempel geleisteten Arbeit gesetzt, und man erhält

$$(1) \qquad \left[\lambda' + (c-k)(t'-t) + \frac{F}{E}\right] \frac{t'-t}{274+t'} = F.$$

Wenn δ, die Dichte des Dampfes, constant angenommen wird, ist

$$F = \frac{10333.(274+t')}{1,293\delta\times 274}\int_{\frac{V}{P'}}^{\frac{V}{P}}\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{10333.(274+t')}{1,293\delta\times 274}\, l\left(\frac{P'}{P}\right)\text{Kilogramm.}$$

Es wird angedeutet, wie die Berechnung von F zu erfolgen hat, wenn man δ nach dem Gesetz der Covolumina variabel annimmt. Unter Berücksichtigung bezüglicher Arbeiten von Regnault und Hirn erhält man aus Gleichung (1)

$$l\left(\frac{P'}{P}\right) = \frac{[\lambda'+(c-k)(t'-t)]431\times 274\times 1,293.\delta(t'-t)}{10333.(274+t')(274+t)},$$

d. h. die Beziehung zwischen dem veränderlichen Druck P und der zugehörigen Temperatur t für alle Flüssigkeiten. In Bezug auf das Wasser stimmen die aus der Formel berechneten Werthe gut mit den von Regnault erhaltenen Werthen. Auch für andere Flüssigkeiten soll eine gute Uebereinstimmung vorhanden sein.

Rs.

W. Schlemüller. Der Zusammenhang zwischen Höhenunterschied, Temperatur und Druck. Prag. H. Domenicus.

Die Abnahme der Temperatur der Atmosphäre bei wachsender Entfernung von der Erdoberfläche wird von dem Verfasser in folgender Weise erklärt. Nach der neueren Gastheorie haben die Molecüle eines Gases Geschwindigkeiten, deren Mittelwerth vom Druck und von der Temperatur abhängt. Dringt ein Molecül aus einer tieferen Schicht in eine höhere, so muss dasselbe, grade wie ein in die Höhe geworfener Körper, in Folge der Wirkung der Schwerkraft einen Theil seiner lebendigen Kraft verlieren. Nun wird zwar ein Molecül im Allgemeinen nur verschwindend kleine Wege durchlaufen und dann gegen ein anderes anprallen. Es lässt sich aber doch übersehen, dass die mittlere Geschwindigkeit nach demselben Gesetze mit der Höhe abnehmen muss, als wenn solche Zusammenstösse nicht stattfänden. Eine geringere lebendige Kraft entspricht einer niedrigeren Temperatur

und dadurch erklärt sich die Abnahme derselben mit der Höhe. Wird dieselbe hiernach berechnet, so ergiebt sich auf 175 Meter eine Differenz von 1° C. und, wie leicht zu übersehen, ist die Abnahme der Höhe proportional. Die Atmosphäre muss dann eine Grenze haben in einer Höhe nämlich, wo die mittlere Geschwindigkeit Null ist. Hierfür ergeben sich Werthe zwischen 40000 und 50000 Meter. Diese Zahlenwerthe sollen mit den bisher vorliegenden Beobachtungen sowohl über die Abnahme der Temperatur mit der Höhe, als auch mit der muthmasslichen Höhe der Atmosphäre in guter Uebereinstimmung stehen.

Legt man das oben gefundene Gesetz der Temperaturabnahme in ruhender Luft zu Grunde, so erhält man die folgende neue Formel für die barometrische Höhenmessung:

$$h = 47925^{m}(1+\alpha t)\left\{1-\left(\frac{p}{p_n}\right)^{\frac{1}{5}}\right\}.$$

Dass die ganze Ableitung der hier mitgetheilten Schlüsse nicht ohne Bedenken ist, insofern es sich stets um die Benutzung eines Mittelwerthes der Geschwindigkeit statt der wahren, theils grösseren, theils kleineren Werthe handelt, giebt der Verfasser am Schlusse selbst zu. Ok.

A. Ritter. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper. Pogg. Ann. (2) X. 130-143, XI. 332-345.

Fortsetzung der Arbeit, über die bereits in früheren Bänden dieses Jahrbuches (s. XI. 1879. p. 781) berichtet worden ist. Ueber diese beiden Abtheilungen wird im Zusammenhang mit dem im nächsten Jahre folgenden Schluss berichtet werden. O.

W. Schlemüller. Vier physikalische Abhandlungen. Prag. H. Domenicus.

I ist gegen Herrn v. Bauernfeind gerichtet, welcher in der Abhandlung „Die Beziehungen zwischen Temperatur, Druck und Dichtigkeit in verschiedenen Höhen der Atmosphäre“ (Münch.

Ber. X. 1880. 107-122) seine Priorität bezüglich mehrerer Formeln der Schrift des Verfassers „Der Zusammenhang zwischen Höhenunterschied, Temperatur und Druck in einer ruhenden, nicht bestrahlten Atmosphäre, sowie die Höhe der Atmosphäre. Prag, Domenicus. 1880.“ wahren wollte. Als wesentlichen Unterschied der Arbeit des Verfassers und der des Herrn v. Bauernfeind von 1862 stellt ersterer hin, dass seine Gesetze für jede aus einem beliebigen Gase bestehende Atmosphäre auf jedem Weltkörper gelte, sobald dieselbe nur der Gravitation unterworfen ist, während die Gesetze des Herrn v. Bauernfeind aus in den unteren Schichten der Erdatmosphäre angestellten Beobachtungen abgeleitet waren, also auch nur für diese Schichten Geltung hätten.

II. Die Arbeit, welche für die Temperaturerhöhung von 1 Kilogramm Luft von 0° auf 100° innerhalb gewisser Dichtigkeitsgrenzen bei constantem Volumen nöthig ist, wird anders berechnet, als es von Clausius geschehen ist. Aus einer dabei erhaltenen Formel verschafft sich der Verfasser die Sätze: „Die specifischen Wärmen eines Gases bei constantem Volumen verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den absoluten Temperaturen. Das Verhältnis der specifischen Wärme eines Gases bei constantem Drucke C zu jener bei constantem Volumen c ist nicht constant, sondern eine mit wechselnder Temperatur etwas abnehmende Grösse:

$$\frac{C}{c} = 1 + \frac{4}{g}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

In III wird die mittlere Jahrestemperatur eines Parallelkreises als Function der geographischen Breite bestimmt.

In IV wird für das barometrische Höhenmessen eine Correction wegen der Temperaturabnahme mit wachsender Breite gegeben.

Rs.

R. Clausius. Ueber das Verhalten der Kohlensäure in Bezug auf Druck, Volumen und Temperatur. Pogg. Ann. (2) IX. 337-358.

Aus den Versuchen von Andrews, welcher Kohlensäure bei verschiedenen Temperaturen starken Drucken unterworfen hat, wird das Gesetz zu ermitteln versucht, welches an Stelle des Boyle-Gay-Lussac'schen zu setzen sei. Die Gleichung von Rankine, mit welcher die von W. Thomson und Joule gegebene nahezu übereinstimmt, und die von Hirn, Recknagel und van der Waals aufgestellten Gleichungen werden erwähnt und besprochen. Van der Waals hatte für die Gleichung

$$pv = RT$$

gesetzt

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT,$$

wofür man auch schreiben kann

$$p = R\,\frac{T}{v-b} - \frac{a}{v^2},$$

R, a und b sind Constanten. Als Werthe derselben fand van der Waals für Kohlensäure aus den ersten Versuchen von Andrews

$$R = \frac{1{,}00646}{T_0}, \quad a = 0{,}00874, \quad b = 0{,}0023,$$

wenn T_0 die dem Gefrierpunkt entsprechende Temperatur, also näherungsweise 273 ist, als Druckeinheit eine Atmosphäre, und als Volumeneinheit das Volumen gewählt ist, welches die Kohlensäure unter dem Druck einer Atmosphäre bei der Temperatur T_0 einnimmt. Darauf sind von Andrews 1876 die Resultate dreier neuer Versuchsreihen für die Temperaturen 6,5°, 64° und 100° veröffentlicht worden, welche der Gleichung von van der Waals nicht entsprechen, mit derselben auch nicht durch Veränderung der Constantenwerthe in Uebereinstimmung gebracht werden können. Van der Waals hat die gegenseitige Anziehung der Molecüle von der Temperatur unabhängig, nur als Function des Volumens angenommen. Dies ist unzulässig, wenn sich das Gas nicht mehr im „vollkommenen Gaszustande“ befindet. Die Abweichung des Gases von diesem Zustande wird aber grade untersucht. Wenn auch für grössere Volumina, die durch die gegenseitige Anziehung der Molecüle erzeugte Druckabnahme

dem Quadrat des Volumens umgekehrt proportional sei, so gelte dies doch nicht allgemein. Mit Rücksicht hierauf und auf die verschiedenen angegebenen Formeln, so wie auf die bisherigen Beobachtungen gelangt der Verfasser zu der Gleichung

$$p = R\frac{T}{v-\alpha} - \frac{c}{T(v-\beta)^2},$$

in welcher R, c, α und β constante Grössen sind. Die Werthe dieser Constanten für Kohlensäure sind

$$R = \frac{1{,}00682}{T} = 0{,}003688, \qquad c = 2{,}0935,$$

$$\alpha = 0{,}000843, \qquad \beta = 0{,}000977.$$

Bei der Prüfung, wie weit die Formel mit der Erfahrung bei den einzelnen Versuchen übereinstimmt, werden sämmtliche Versuche von Andrews berücksichtigt. Der Ausdehnungscoefficient der Kohlensäure unter Atmosphärendruck ist nach Regnault gleich 0,00371 gesetzt. Zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen wird eine genügende Uebereinstimmung gefunden. Die Annahme scheint berechtigt, dass die vorhandenen Differenzen eher den Beobachtungsfehlern als einer Unrichtigkeit der Formel zuzuschreiben sind. Endlich wird die Frage, wo für Temperaturen unterhalb des kritischen Punktes die von James Thomson gezeichneten Druckcurven und die dem wirklichen Vorgange entsprechenden horizontalen Geraden sich schneiden, dahin beantwortet, dass das Flächenstück zwischen der Thomson'schen Curve und der Geraden oberhalb von dieser gleich ist dem von der Curve und der Geraden begrenzten Flächenstücke unterhalb der Geraden. Dadurch ist die Lage der Geraden bestimmt. Rs.

C. Viry. Méthode synthétique rapide pour établir les formules fondamentales relatives aux changements d'état. C. R. XCI. 106-108.

Anstatt eines elementaren Carnot'schen Kreisprocesses betrachtet der Verfasser den folgenden: 1) Die Gewichtseinheit

einer Flüssigkeit wird von der Temperatur T auf $T+dT$ unter dem veränderlichen Drucke des gesättigten Dampfes erhitzt und absorbirt eine Wärmemenge $c\,dT$, wenn c die specifische Wärme der Flüssigkeit unter dem veränderlichen Drucke des gesättigten Dampfes ist. 2) Die Flüssigkeit wird bei der constanten Temperatur $T+dT$ vollständig verdampft und absorbirt dabei die Wärmemenge $r+dr$, wenn r die Verdampfungswärme bei T^0 bedeutet. 3) Bei der Annahme, dass der Dampf sich ausdehnt, während er gesättigt bleibt und seine Temperatur um dT sich erniedrigt, absorbirt er eine Wärmemenge $-c_1 dT$, wenn c_1 die specifische Wärme des bei T^0 gesättigten Dampfes ist. 4) Der Dampf wird bei der Temperatur T vollständig condensirt und überträgt dabei auf den Condensator eine Wärmemenge r. Die gesammte verschwundene und in Arbeit verwandelte Wärme ist

$$c\,dT + dr - c_1 dT,$$

die geleistete Arbeit

$$(s-\sigma)\,dp,$$

wenn σ das Volumen der Flüssigkeit, s das des gesättigten Dampfes bei T^0 ist. Setzt man $s-\sigma = u$, so hat man

$$c - c_1 + \frac{dr}{dT} = Au\frac{dp}{dT}.$$

Da der Kreisprocess geschlossen und umkehrbar ist, so erhält man durch Anwendung des Satzes

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

$$c - c_1 + \frac{dr}{dT} = \frac{r}{T}.$$

Also

$$r = ATu\frac{dp}{dT}$$

und

$$c_1 = c + \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T}.$$

In der letzten Gleichung kann man c_1 durch C, die specifische Wärme der Flüssigkeit unter constantem Drucke, ersetzen, wenn man von der sehr geringen Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeit absieht.

Rs.

N. SLUGUINOFF. Ueber einige Folgerungen aus der mechanischen Theorie der Wärme. Carl Rep. XVI. 512-515.

Es sei E der reciproke Werth des Wärmeäquivalents der Arbeitseinheit, c' die specifische Wärme bei constantem Drucke, c' die bei constantem Volumen, t, p, v Temperatur, Druck und Volumen; dann gilt nach Clausius die Gleichung

$$E(c'-c) = T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

wenn der Körper seinen Aggregatzustand nicht ändert und seine Zustandsänderungen auf umkehrbare Weise erfolgen. Die Wärmecapacitäten sind dabei als veränderlich anzusehen. Ist a_p der reciproke Werth des Spannungscoefficienten, a_v der des Ausdehnungscoefficienten und wird $(c':c) = 1+k$ gesetzt, so findet der Verfasser

$$(1)\qquad pv = Ekc\,\frac{(a_p+t)(a_v+t)}{T}.$$

Setzt man $a_p = a_v = a$, so erhält man durch Integration der Gleichung

$$\frac{1}{a+t}+\frac{\partial kc}{\partial t}\frac{1}{kc} = \frac{1}{T}$$

$$(2)\qquad kc = C\frac{T}{a+t}.$$

C bedeutet eine Constante. Gleichung (1) heisst für $a_p = a_v = a$:

$$(3)\qquad pv = Ekc\frac{(a+t)^2}{T},$$

und mit Benutzung von (2) wird diese Gleichung

$$(4)\qquad pv = EC(a+t).$$

Wenn kc constant ist, hat man $a+t = T$. Der Verfasser gewinnt dann den Satz: „Das Product aus dem Moleculargewichte der Gase und ihrer specifischen Wärme ist der Grösse $\left(\frac{c'}{c}-1\right)$ umgekehrt proportional." Ausserdem findet er

$$T = \frac{1}{3gE}u^2\delta,$$

wo u die mittlere Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung

der Gasmolecüle und g die Beschleunigung beim freien Fall ist. Den Schluss bildet eine Bemerkung über die Verwendung der Gleichungen (2), (3), (4) bei festen Körpern. Rs.

A. Wüllner. Ueber die specifische Wärme des Wassers. Pogg. Ann. (2) X. 284-291.

L. Pfaundler. Ueber die Berechnung der Temperaturcorrection bei calorimetrischen Messungen. Pogg. Ann. (2) XI. 237-246.

1) Weder die von Herrn Wüllner in seiner Experimentalphysik angegebene Formel, welche zur Berechnung der specifischen Wärme bei Versuchen nach der Mischungsmethode dient, noch die von Herrn Pfaundler gegebene sind richtig. Eine neue wird abgeleitet und nach ihr die Correctionen für die von Herrn von Münchhausen ausgeführten Versuche umgerechnet.

2) Die neue Formel des Herrn Wüllner ist nicht einwurfsfrei. Grade in den Fällen, für welche sie bestimmt ist, sind gegen ihre Anwendung Bedenken vorhanden. Das vom Verfasser in der neuen Auflage von Müller's Lehrbuch der Physik, Abth. 2 p. 304-305 gegebene von Regnault stammende Verfahren ist dagegen einwurfsfrei. Der Verfasser leitet seine Correctionsformel ab. Für specielle Fälle ist ein vereinfachtes Verfahren möglich, an welches Herr Wüllner bei seinen Aeusserungen über die Pfaundler'sche Formel vielleicht nur gedacht hat. Rs.

J. D. van der Waals. De betrekking tusschen spanning, volume en temperatuur bij dissociatie. Versl. en Mededeel. XV. 199-217.

Wenn auch eine Grenze besteht, wodurch in allen Fällen die Trennung zwischen den chemischen und physikalischen Erscheinungen der Dissociation gegeben wird, so ist doch die Möglichkeit vorhanden, sie mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie aus einem Gesichtspunkte zu betrachten, und es ergiebt sich aus diesem Aufsatz, dass ähnliche Gesetze für beide gelten. Um dies

darzuthun, wird der Zusammenhang ermittelt, welcher zwischen Spannung, Volumen und Temperatur eines in Dissociation befindlichen Stoffes besteht, woraus das Verhältnis, in welchem die getrennten Bestandtheile in dem heterogenen Gemenge vorkommen, gefunden werden kann. Durch die Untersuchungen von Willard Gibbs ist der Verfasser dazu geführt, frühere eigene Studien über die Continuität des gasförmigen und flüssigen Aggregatzustandes fortzusetzen und zeigt nun, dass bei den Dissociationserscheinungen die Aenderung der Entropie gleich Null ist, und dass die Energie und Entropie eines Gasgemenges gleich ist der Summe derselben Grössen für die einzelnen Bestandtheile. Die erhaltenen Resultate werden mit denen von Gibbs, sowie denen von Guldberg und Waage verglichen und in genügender Weise übereinstimmend gefunden. Verschiedene Fälle von Dissociation werden in ihren Einzelnheiten verfolgt. Das Schlussergebnis, zu welchem der Verfasser kommt, ist, dass, obgleich die Art, auf welche die Temperaturfunction der Dissociation erhalten ist, noch ausserhalb der Betrachtungen der kinetischen Theorie liegt, die Ableitung aus dieser Theorie auf keine grosse Schwierigkeiten stösst. Er hofft später einen Versuch der Ableitung dieser Function aus der Theorie der Molecularbewegungen mittheilen zu können.

G.

J. Boussinesq. Sur les problèmes des températures stationnaires, de la torsion et de l'écoulement bien continu, dans les cylindres ou les tuyaux dont la section normale est un rectangle à côtés courbes ou est comprise entre deux lignes fermées. Liouville J. (3) VI. 177-187.

Das Problem der stationären Temperaturen in Cylindern, deren Normalschnitte krummlinige Rechtecke sind, und bei welchen die Temperatur in jeder Erzeugenden constant ist, aber von einer Erzeugenden zur anderen wechselt, ist von Lamé in seinen „Leçons sur les coordinées curvilignes“ und von E. Mathieu in seinem „Cours de physique mathématique“ mit Benutzung von mehr oder

weniger Sätzen über krummlinige Coordinaten behandelt. (Dieselbe Methode ist auch anwendbar, wenn der Umriss statt aus vier nur aus zwei, dann geschlossenen, Curven besteht, und ferner, wenn man längs der ganzen Ausdehnung einiger Querschnittseiten nicht die Temperatur, sondern den Wärmezufluss einer willkürlichen Constanten gleich setzt.) Der Verfasser löst das Problem direct, unabhängig von solchen Sätzen für den Fall einer aus zwei Linien bestehenden Begrenzung und deutet an, wie der Fall einer vierlinigen Begrenzung analog behandelt werden kann. Ferner weist er darauf hin, dass nicht nur die Frage nach den stationären Temperaturen in unendlich langen Prismen beantwortet wird, sondern auch die Gesetze der Torsion derselben Prismen und die des gleichförmig anhaltenden Abflusses einer Flüssigkeit in geraden Röhren, deren Hohlraum denselben Querschnitt hat, wie jene Prismen, erhalten werden, was der Verfasser bereits 1871 (s. F. d. M. III. 1871. 503-506) erwähnt hat. Dieselbe Rechnung giebt auch die Lösung eines vierten Problems, nämlich der Bewegung einer nicht schweren einen festen Hohlcylinder ausfüllenden Flüssigkeit, wenn der Cylinder um eine zu den Erzeugenden parallele Axe rotirt, die innere Reibung der Flüssigkeit vernachlässigt werden kann und die Geschwindigkeitscomponenten nach den festen Coordinatenaxen in jedem Punkte den entsprechenden partiellen Ableitungen einer Function φ gleich sind. (Man vergleiche auch die §§ 704 ff. des Handbuches von Thomson und Tait.) Rs.

C. Niven. On the conduction of heat in ellipsoids of revolution. Phil. Trans. CLXXI. 117-151.

Der Verfasser bemerkt, dass das Problem der stationären Temperatur von Ellipsoiden zwar im Allgemeinen eine vollständige Lösung mit Hülfe der von Green und Lamé eingeführten Functionen gefunden habe, dass dagegen das entsprechende Problem der Leitung noch nicht so erfolgreich behandelt worden sei. Herr Mathieu hat allerdings in seinem: „Cours de physique mathématique“ gezeigt, wie das Problem auf gewöhnliche Differentialgleichungen reducirt werden könne, und wie man im Fall eines

Umdrehungsellipsoids zu einer näherungsweisen Lösung derselben gelangen könne. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem in einer mehr directen und allgemeinen Art behandelt.

Wie Herr Mathieu wählt der Verfasser zu Coordinaten eines Punktes das Azimuth φ des dem Punkte entsprechenden Meridianschnittes und die Parameter α und β des der Flächeconfocalen Ellipsoids und Hyperboloids, welche sich in dem Punkt schneiden. Zuerst wird gezeigt, wie man die allgemeine Leitungsgleichung in diese Coordinaten transformiren kann. Die so erhaltene Gleichung lautet:

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\coth\alpha\frac{dV}{d\alpha}+\coth\beta\frac{dV}{d\beta}+\left(\frac{1}{\sinh^2\alpha}+\frac{1}{\sinh^2\beta}\right)\frac{d^2V}{d\varphi^2}$$
$$=\frac{c^2}{k^2}(\cosh^2\alpha-\cosh^2\beta)\frac{dV}{dt}\cdot$$

Dieser Gleichung genügt eine Reihe von Ausdrücken der Form:

$$e^{-\lambda^2kt}\cos m\varphi\,\vartheta_m^k(\beta)\,\Omega_m^k(\alpha),$$

wo k durch eine Gleichung bestimmt wird, welche unendlich viel Wurzeln hat. Die Function ϑ wird nach Functionen entwickelt, die Todhunter nach Heine associirte Functionen von $\cos\beta$ genannt hat. Es wird sodann gezeigt, dass die Wurzeln der Gleichung in k in zwei Classen zerfallen, und dass die entsprechenden Ausdrücke für ϑ verschiedene Formen annehmen, für deren eine die Differenz zweiten Grades und Ordnung der associirten Function grade ist, während dieselbe bei der andern ungrade ist. Die Werthe von $\Omega(\alpha)$ zerfallen in ähnlicher Weise in zwei Classen. Diese Werthe werden zunächst nach Gliedern der kleineren Axe des confocalen Ellipsoids, dann der grösseren Axe entwickelt, wobei die erste Reihe nach Functionen fortschreitet, welche der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du}{dx}+\left(1-\frac{n(n+1)}{x^2}\right)u=0$$

genügen. Die zwei Lösungen dieser Gleichung treten beide in endlicher Form auf. Die eine S_n ist für $x=0$ endlich, die andere T_n dagegen unendlich. Im Weiteren werden die Eigenschaften dieser Functionen untersucht. Nach der Entwickelung dieser Function bespricht der Verfasser das System der Glei-

chungen, welches k bestimmt, wobei er sich bald mehr bald weniger an die Untersuchung von Heine für ein ähnliches System anschliesst.

Betreffs des speciellen Problems der Wärmeleitung wird die einschränkende Bedingung gemacht, dass entweder die Oberfläche auf constanter Temperatur erhalten wird oder der Körper sich durch Strahlung abkühlt. Der erste Fall ist mathematisch einfacher. Man kann ihn sich realisirt denken durch einen Körper, der mitten in eine unbegrenzte Flüssigkeit gebracht ist. Nach genügender Zeit wird er dann die Temperatur der umgebenden Flüssigkeit angenommen haben. Unter dieser Voraussetzung können die verschiedenen Werthe von λ aus der Gleichung $\Omega_m^k = 0$ gefunden werden. Die Wurzeln von Ω_0^0 werden bis auf e^4 untersucht. Dann folgt die Betrachtung der Strahlung. Hier zeigt der Verfasser nur, wie die successiven Näherungen gefunden werden können.

Die Rechnungen werden zunächst nur für den Fall eines Ellipsoids durchgeführt, dessen grössere Axe die Umdrehungsaxe ist. Es wird aber gezeigt, dass die Ausdrücke und Resultate leicht auf den Fall eines planetarischen Ellipsoids übertragen werden können. Der Hauptzweck der Arbeit geht aber auf eine Untersuchung der Functionen, welche bei der mathematischen Behandlung des Problems auftreten. Cly. (O.)

J. Rosner. Ueber Wärmeleitung und die Methoden das Wärmeleitungsvermögen der Körper zu bestimmen. Pr. Wiener-Neustadt.

Die Differentialgleichung für die Wärmeleitung und die Oberflächenbedingungen werden aufgestellt. Ausgehend von dem particulären Integral

$$a e^{(lx+my+nz)} e^{k(l^2+m^2+n^2)t}$$

der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

ergiebt sich das allgemeine Integral in der Form

$$u = \frac{1}{2^3(\pi k t)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta, \gamma) e^{-\frac{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}{4kt}} d\alpha \, d\beta \, d\gamma,$$

wo

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = a_1 e^{-(l_1 \alpha + m_1 \beta + n_1 \gamma)} + a_2 e^{-(l_2 \alpha + m_2 \beta + n_2 \gamma)} + \dots$$

ist. Für fünf Specialfälle, nämlich für einen Stab, dessen Querschnitt gegenüber der Länge sehr klein ist, für einen Würfel, für ein Prisma von endlichen Dimensionen, für eine Kugel und für einen Cylinder werden die Differentialgleichungen gegeben und die vollständigen Integrale abgeleitet. Daran schliesst sich eine historische Darlegung der Methoden, welche zur Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens für feste, flüssige und gasförmige Körper in Anwendung gebracht sind. Rs.

G. Kirchhoff und G. Hansemann. Ueber die Leitungsfähigkeit des Eisens für Wärme. Pogg. Ann. (2) IX. 1-47.

Mittels einer neuen Methode wird das Verhältnis der Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme zu dem Producte aus specifischer Wärme und Dichtigkeit bestimmt. Die Anordnung ist so getroffen, dass die Ableitung der Wärme nach aussen auf jenen Werth von geringerem Einflusse ist, als bei der Methode von F. Neumann. Auf eine Fläche eines Würfels von 140 mm. langen Seiten wurde, nachdem dieser die Temperatur des Beobachtungsraumes angenommen hatte, aus einer Brause ein kräftiger Wasserstrom geleitet, dessen Temperatur von der des Beobachtungsraumes um einige Grade verschieden war. Innerhalb des Würfels konnte die Temperatur in einigen Punkten des Lothes, welches in der Mitte der besprengten Fläche errichtet werden kann, mittels Thermoketten bestimmt werden. u sei die Temperatur des Körpers im Punkte (x, y, z) zur Zeit t, c das Product aus der specifischen Wärme und der Dichtigkeit, k die Leitungsfähigkeit. Wenn man annimmt, dass k und c constant sind, und $(k:c) = a$ setzt, so ist die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

zu lösen. Eine Würfelkante habe die Länge l, die Gleichungen der Würfelflächen seien

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x = l, \quad y = l, \quad z = l.$$

Der Einfachheit wegen werde angenommen, dass bis zur Zeit $t = 0$ überall $u = 0$ ist, in jenem Augenblicke aber für die Fläche $z = 0$ $u = 1$ wird, während die anderen Seiten ihre Wärme gegen eine Umgebung von der Temperatur Null ausstrahlen. Zu obiger Differentialgleichung kommen dann die Bedingungen:

$$\text{für } t = 0 \quad u = 0,$$

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = hu, \qquad \text{für } x = l \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -hu,$$

$$\text{für } y = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = hu, \qquad \text{für } y = l \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -hu,$$

$$\text{für } z = 0 \quad u = 1, \qquad \text{für } z = l \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -hu,$$

wo h eine Constante, nämlich das Verhältnis der äusseren zur inneren Leitungsfähigkeit bedeutet. Es giebt nur eine Lösung dieser Aufgabe, und diese kann man finden, wenn man u gleich einer nach aufsteigenden Potenzen von h fortschreitenden Reihe setzt. Es genügt, die beiden ersten Glieder dieser Reihe zu bestimmen. Also ist

$$u = U_0 + hU_1.$$

Die Gleichungen werden aufgestellt, welche von den Functionen U_0 und U_1 erfüllt werden müssen. Setzt man

$$U(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2} dx,$$

so ist

$$\begin{aligned} U_0 = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + U\left(\frac{2l-z}{2\sqrt{at}}\right) - U\left(\frac{4l-z}{2\sqrt{at}}\right) + \cdots \\ - U\left(\frac{2l+z}{2\sqrt{at}}\right) + U\left(\frac{4l+z}{2\sqrt{at}}\right) - \cdots \\ = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R. \end{aligned}$$

Die Bestimmung von U_1 ist complicirter. Nachdem sie ausgeführt

ist, werden die numerischen Werthe von U_1 für die verschiedenen Punkte, in welchen die Temperatur gemessen wurde, und für den grössten vorkommenden Werth der Temperatur bestimmt. Da der Coefficient h, welcher besonders bestimmt wurde, sehr klein ist, so kann das Product hU_1 vernachlässigt werden. Ferner wird unter der Voraussetzung, dass die Seitenflächen und die hintere Fläche des Würfels keinen merkbaren Einfluss auf die Verbreitung der Wärme ausüben, d. h. dass $R+hU_1$ vernachlässigt werden kann, gezeigt, dass man statt der Temperaturen in einem unverletzten Würfel die der Löthstellen der Thermoketten nehmen kann, falls der Durchmesser jedes Canals unendlich klein angenommen wird. k und c, daher auch a sind nicht constant, wie bisher angenommen ist, sondern hängen von der Temperatur ab. Jeder für a berechnete Werth wird daher immer nur für eine bestimmte Temperatur richtig sein. Diese Temperatur kann unter der Voraussetzung ermittelt werden, dass jene Grössen innerhalb der in Betracht kommenden Temperaturintervalle lineare Functionen der Temperatur sind und sich nur wenig ändern. Es wird gezeigt, wie die Temperaturen aus den Galvanometerbeobachtungen gefunden wurden. Für die Leitungsfähigkeit des Eisens dividirt durch das Product aus seiner specifischen Wärme und seiner Dichtigkeit bei der Temperatur ϑ erhalten die Verfasser

$$\frac{k}{c} = a = 16{,}94 - 0{,}034(\vartheta - 15^{\circ}),$$

wenn Sec., mm. und Celsiusgrad als Einheiten gewählt sind.

Rs.

H. F. Weber. Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten. Pogg. Ann. (2) X. 103-129, 304-320, 472-500; Carl Rep. XVI. 389-454.

A. Winkelmann. Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn H. F. Weber „Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten.“ Pogg. Ann. (2) X. 668-676.

H. F. Weber. Entgegnung auf die Bemerkungen des Herrn A. Winkelmann. Pogg. Ann. (2) XI. 347-352.

A. Winkelmann. Notiz zu der Entgegnung des Herrn H. F. Weber. Pogg. Ann. (2) XI. 734-736.

H. Herwig. Bemerkung über das Wärmeleitungsvermögen des Quecksilbers. Pogg. Ann. (2) X. 662-667.

H. F. Weber. Entgegnung auf die Bemerkung des Herrn Herwig: „Ueber das Wärmeleitungsvermögen des Quecksilbers.“ Pogg. Ann. (2) XI. 345-347.

1) ist ein Abdruck aus Wolf Z. XXIV. 252-298, 355-400. Ueber die Anordnung der Experimente und die theoretische Untersuchung ist bereits berichtet (s. F. d. M. XI. 1879. 788-790). Wasser, Kupfervitriollösung, drei Zinkvitriollösungen, Kochsalzlösung, Glycerin, Alkohol, Schwefelkohlenstoff, Aether, Olivenöl, Chloroform, Citronenöl und Benzin wurden untersucht. Für diese Flüssigkeiten wird gefunden: Die Grösse des Wärmeleitungsvermögens k ist der specifischen Wärme der Volumeneinheit proportional, die innere Reibung und einige andere Einflüsse scheinen, wenn auch in geringem Grade, sich geltend zu machen. „Durchsichtige nicht metallische Flüssigkeiten haben bei gleicher Temperatur nahezu die gleiche Temperaturleitungsfähigkeit η.“ Für die vier Flüssigkeiten Wasser, Kochsalzlösung, Zinkvitriollösung und Glycerin wurde die Wärmeleitungsfähigkeit auch für die mittlere Temperatur von etwa 24° bestimmt und aus diesen Versuchen folgt, dass der Coefficient α dem Wärmeleitungsvermögen k_0 nahezu proportional ist, wenn $k = k_0(1 + \alpha t)$ gesetzt wird. Hierauf werden die gewonnenen Resultate mit den von Lundquist, Winkelmann und Beetz erhaltenen verglichen. Nach der Ansicht des Herrn Weber hat Herr Winkelmann seine Resultate nicht richtig interpretirt und in Folge dessen falsch corrigirt; bei anderem Verfahren befänden sich die Versuche des Herrn Winkelmann in Uebereinstimmung mit denen des Herrn Weber. Ferner wurde auch eine metallische Flüssigkeit, im Handel vorkommendes Quecksilber, nach derselben Methode untersucht. Für η bei etwa 4° erhält man einen ungefähr 30 Mal grösseren Werth, als der für nicht metallische durchsichtige Flüssigkeiten betrug. Daraus wird geschlossen: Während bei nicht metallischen Flüssig-

keiten die Wärmeleitung in einer einfachen Uebertragung der lebendigen Kraft der bewegten ponderabeln Molecüle von Schicht zu Schicht zu bestehen scheint, lässt das für Quecksilber gefundene ganz abweichende Resultat vermuthen, dass in der Wärmeleitung innerhalb metallischer Substanzen die von Schicht zu Schicht stattfindende innere Strahlung das wesentliche Element ist, und dass die zwischen je zwei Nachbarschichten eintretende Uebertragung der lebendigen Kraft der bewegten ponderabeln Molecüle nur eine secundäre Bedeutung hat. Dies weist darauf hin, zu untersuchen, wie weit der Parallelismus des Wärmeleitungs- und des elektrischen Leitungsvermögens geht (s. Seite 793). Die für steigende Temperaturen gefundene Zunahme des Wärmeleitungsvermögens von Quecksilber widerspricht dem Ergebnis des Herrn Herwig, zu welchem dieser aber nur gelangt ist, weil der theoretische Theil fehlerhaft war. Bei richtiger Behandlung des Problems stimmt das aus den Beobachtungen des Herrn Herwig erhaltene Resultat unter gewissen Annahmen qualitativ und quantitativ mit dem Ergebnis des Herrn Weber überein.

2) Herr Winkelmann lässt die Interpretation des Herrn Weber nicht gelten.

3) und 4) Die Verfasser bleiben bei ihren Ansichten.

5) Herr Herwig giebt zu, dass die Ausstellung des Herrn Weber principiell berechtigt ist, nämlich dass die von ihm seiner Zeit aufgestellte Differentialgleichung

$$\frac{1}{1+\alpha t}\frac{d^2 t}{dx^2} = Bt$$

für die Wärmeleitung in einem nach aussen Wärme abgebenden Stabe nicht ausreichend ist, sondern genommen werden muss

$$\frac{1}{1+\alpha t}\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{\alpha}{(1+\alpha t)^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = Bt.$$

Hierin ist $B = \frac{phr}{q}$, h die äussere Wärmeleitungsfähigkeit, r der innere Wärmeleitungswiderstand für 0°, p der Umfang, q der Querschnitt des Stabes und t die Temperatur an der um x vom Anfange des Stabes entfernten Stelle. Die Temperatur

der Umgebung ist gleich 0 gedacht. Bei der Integration der letzten Gleichung begnügt sich Herr Herwig nicht mit der von Herrn Weber gegebenen Annäherung, sondern führt die Rechnung vollständiger durch.

6) Herr Weber constatirt, weil ihm der Vorwurf der Ungenauigkeit gemacht war, dass er das Problem nur in erster Annäherung gelöst, also nicht genau behandelt habe. Rs.

A. Witz. Essai sur l'effet thermique des parois d'une enceinte sur les gaz qu'elle renferme. Almeida J. VIII. 14-20.

Auszug aus der Arbeit, Ann. d. Ch. et Ph. (5) XV. 433-529. In einem einfachen speciellen Falle war aus zahlreichen Experimenten für die Geschwindigkeit der Erwärmung oder Abkühlung

$$v = (0{,}11 + 0{,}0016\,\varepsilon)\varepsilon$$

gefunden worden, wo ε den Ueberschuss der Temperatur der Wand über die des Gases bedeutet. Folgende theoretische Betrachtung wird angestellt: Die Wirkung der Wand auf ein Gas in Bezug auf v setzt sich aus zwei Theilen zusammen, der erste bezieht sich auf die Wand, der zweite auf das Gas. Der erste Theil hängt ab von ε, der Temperatur der Wand τ, dem Ausstrahlungsvermögen E, der Leitungsfähigkeit K, und von der Gestalt und den Dimensionen des Gefässes, was durch $\frac{S}{V}$ bezeichnet sei. Der zweite Theil ist abhängig von t, der Temperatur des Gases, D, seiner Dichtigkeit, C, seiner Wärmecapacität, P, dem Drucke, A, der Absorptionsfähigkeit, K', der Leitungsfähigkeit, und M, seiner Beweglichkeit oder der Bewegung der Molecüle. Also

$$v = \varphi\left(\tau, \varepsilon, E, K, \frac{S}{V}\right), \quad f(t, P, A, M, K, D, C).$$

In Folge der Resultate, welche aus den mit Luft ausgeführten Experimenten sich ergeben, setzt der Verfasser

$$v = \varphi\left(\varepsilon, K, \frac{S}{V}\right), \quad f(P, M).$$

Die weitere Untersuchung der Einflüsse führt ihn zu der Beziehung

$$v = (\alpha + \beta\varepsilon)\varepsilon.$$

Rs.

G. Grassi. Sulla trasmissione del calore tra due fluidi in movimento separati da una parete solida. Rend. Ist. Lomb. (2) XIII. 47-52; N. Cim. VII. 127-135.

Zwei Flüssigkeiten von verschiedenen Temperaturen seien durch eine feste Wand getrennt und mögen sich in continuirlicher Bewegung längs der Wand befinden. Es sei C der Transmissionscoefficient der festen Wand, x die Differenz zwischen den Temperaturen der beiden Flüssigkeiten in irgend einem Normalschnitte der Wand, welche parallele Oberflächen habe, dS ein kleiner Theil der Wandfläche, welcher sich zwischen zwei Normalschnitten befindet, Q die in der Zeiteinheit übergeführte Wärmemenge, x_0 der Werth von x an der Wand, wo die wärmere Flüssigkeit eintritt, x_1 der Werth von x am anderen Ende der Wand, wo die wärmere Flüssigkeit die Wand verlässt; dann lautet die Differentialgleichung

$$-\frac{dx}{Cx} = (x_0 - x_1)\frac{dS}{Q}.$$

Die Integration ergiebt

$$\frac{1}{x_0 - x_1}\int_{x_1}^{x_0}\frac{dx}{Cx} = \frac{S}{Q}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt die mittlere Ordinate der zwischen den Abscissen x_1 und x_0 befindlichen Ordinaten der Curve $y = \frac{1}{Cx}$ dar. „Unter der Annahme, dass in den verschiedenen Uebertragungsfällen die in der Zeiteinheit übergeführte Wärmemenge immer dieselbe ist, wird die von einem gegebenen Stromsystem verlangte Oberfläche S der mittleren Ordinate proportional sein; also je kleiner die mittlere Ordinate ist, um so vortheilhafter ist das entsprechende Transmissionssystem.“

Um das Problem lösen, die Eigenschaften jener Curve angeben zu können, muss man das Variationsgesetz des Transmissionscoefficienten kennen. Es sei die Wand eben und von der Dicke s; c sei die innere Leitungsfähigkeit, c_0 und c_1 seien die Coefficienten der äusseren Leitungsfähigkeit, dann hat man

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1} + \frac{s}{c}.$$

Aus den Experimenten von Rossetti und Peclet kann man das gewünschte Gesetz nicht sicher ableiten. Im Allgemeinen muss man annehmen, dass der Transmissionscoefficient nicht nur von der Temperaturdifferenz x, sondern auch vom absoluten Werthe der Temperatur abhängt. Man hätte also zu setzen

$$C = a + bx^2 + f_0(T) + f_1(t).$$

Wenn man die beiden letzten Glieder vernachlässigt, wird man die anderen so zu verändern haben, dass der dadurch begangene Fehler ausgeglichen wird. Für gewisse Fälle wird eine der drei Formen

$$C = a + bx^2, \quad C = a + b_1 x, \quad C = a - b_2 x$$

anwendbar sein. Dagegen erscheint die Annahme von Rankine, $C = bx$, nicht zulässig.

Schliesslich werden die drei Fälle, entgegengesetzte Ströme, gleichgerichtete Ströme, ein einfacher Strom, betrachtet, und wird der Satz ausgesprochen: „Das System entgegengesetzter Ströme ist vortheilhafter, als das gleichgerichteter Ströme, und dieses ist vortheilhafter, als das eines einzigen Stromes.“ Rs.

J. Jamin. Compléments à la théorie de la rosée. Almeida J. VIII. 41-48.

Nach Anführung der von Dulong und Petit gegebenen Formeln für die Abkühlung durch Ausstrahlung zeigt der Verfasser, dass die bedeutende nächtliche Abkühlung namentlich der Wiesen, nicht wohl durch die Ausstrahlung allein erklärt werden kann. Indem er die Theorie des Psychrometers heranzieht, weist er nach, dass feuchte Flächen einer doppelten Abkühlung unterliegen, der durch Ausstrahlung und durch Verdunstung. Experimentell hat er diese Thatsache nachgewiesen durch drei Thermometer, eines mit versilberter Kugel unter einem schützenden Schirm, eins mit geschwärzter Kugel und eins mit angefeuchtetem schwarzen Stoff umgeben. Das erste zeigte die Lufttemperatur, das zweite einen Unterschied von τ Grad, von der Abkühlung herrührend, das dritte einen um $\tau + \tau'$ tieferen Stand, wo τ' durch Verdunstung verursacht wurde. Rasenflächen, überhaupt die

Blattflächen der Pflanzen verdunsten ziemlich energisch, entziehen dadurch der umgebenden Luft die Wärme bis der Sättigungspunkt erreicht ist; von da ab verlieren sie ihre Wärme nur noch durch Ausstrahlung, während der Wärmeverlust fortwährend durch Verdichtung des Wasserdampfes ersetzt wird. Es zeigt sich so, dass der Thau zum Schutz gegen Nachtfröste werden kann. Letzteres hat Verfasser ebenfalls durch einen Versuch bestätigt, indem er ein Aetherhygrometer durch einen starken Luftstrom abkühlte und den Gang der Temperatur durch eine Curve darstellte. Dieselbe fällt stark ab (0,9° in 3 Min.), bis das Thauen beginnt; von da ab wird sie flach (etwa 0,3° in derselben Zeit). Nach Aufhören der künstlichen Abkühlung steigt das Thermometer langsam bis der Thau verschwunden ist, hernach wieder schneller.

Bn.

A. Oberbeck. Strömungen von Flüssigkeiten in Folge ungleicher Temperatur innerhalb derselben. Pogg. Ann. (2) XI. 489-495.

Im Anschluss an die in Pogg. Ann. (2) VII. 271-292 (siehe F. d. M. XI. 1879. 787-788) veröffentlichte Abhandlung des Verfassers wird das angegebene Problem für den Fall gelöst, dass alle in der Flüssigkeit vorkommenden Temperaturunterschiede nur wenig von derjenigen abweichen, bei welcher stabiles Gleichgewicht herrscht. Unter Beibehaltung der damaligen Bezeichnungen gelten für die ersten Glieder in den Reihen für den Druck und die Stromcomponenten die Gleichungen

$$\Delta\vartheta = 0$$

$$\Delta u = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \Delta w = \frac{\partial p}{\partial z} - \beta\vartheta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

dabei ist $\beta = \frac{\varrho_0 G}{\mu}$, wenn ϱ_0 die Dichtigkeit bei 0° und G die Constante der Schwere ist. Dazu kommen die Bedingungen, dass ϑ für die Flüssigkeit an den festen Wänden gegebene con-

stante Werthe hat, und u, v, w an denselben verschwinden, da die Flüssigkeit haften soll. Eine particuläre Lösung erhält man, wenn man

$$u=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z},\quad v=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z},\quad w=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+F$$

setzt, und

$$\Delta F=-\beta\vartheta,\quad \Delta f=-F$$

ist. Die weitere Behandlung des allgemeinen Problems wird nur angedeutet. Darauf wird die Rechnung an einem Beispiele durchgeführt. Eine vollständig mit Flüssigkeit gefüllte Hohlkugel vom Radius R werde von aussen her so lange erwärmt, bis sich eine stationäre Temperaturvertheilung hergestellt hat, die aber nur wenig von jener Vertheilung abweicht, bei welcher sich die Flüssigkeit im stabilen Gleichgewicht befindet. Der Einfachheit wegen wird noch angenommen, dass die Temperatur um den verticalen Durchmesser herum symmetrisch vertheilt ist. Die Flächen gleicher Temperatur sind Rotationshyperboloide, deren gemeinsame Axe der verticale Durchmesser ist. In einem Kreise der horizontalen Mittelebene ruht die Flüssigkeit, innerhalb desselben steigt sie auf, ausserhalb desselben sinkt sie nieder.

Rs.

A. Hempel. Ueber den Wärmezustand der Erde. Grunert Arch. LXV. 337-363.

Da in dem Handbuche der theoretischen Physik von Thomson und Tait bezüglich der secularen Abkühlung der Erde die Resultate aus den gemachten Annahmen nicht hergeleitet sind, beziehungsweise deren Herleitung nur angedeutet ist, so giebt der Verfasser diese rechnerische Ergänzung. Rs.

Roth. Erwiderung. Hoffmann Z. XI. 499-501.

Die Erwiderung richtet sich gegen ein vor neun Jahren in den Fortschritten veröffentlichtes Referat (cfr. F. d. M. III. 1871. p. 545). Dort war die Richtigkeit der Resultate, zu denen der

Verfasser in einer 1871 erschienenen Arbeit gelangt war, angezweifelt, weil die Abhängigkeit der Bestrahlung eines Flächenelements von dem Einfallswinkel der Strahlen nicht berücksichtigt war. Der Verfasser sucht nun in seiner Erwiderung darzuthun, dass für seine Zwecke diese Vernachlässigung gestattet gewesen sei, und beruft sich zu dem Zwecke auf eine 1877 veröffentlichte Arbeit von Wiener (cf. F. d. M. XI. 1879. p. 790-793). Mindestens enthielt also die frühere Arbeit des Verfassers eine Lücke, deren Vorhandensein dort mit keinem Worte erwähnt war. Abgesehen aber davon, dass die frühere Beweisführung unvollständig war, ergaben sich auch aus der Nichtberücksichtigung des Einfallswinkels grobe Incorrectheiten, wie z. B. der Satz: „Die Wärmesumme, welche eine gleich grosse Fläche verschiedener Planeten während eines ganzen Umlaufs um die Sonne von dieser durch Strahlung erhält, verändert sich nur mit dem Parameter der Bahn.“ Referent glaubt daher völlig im Recht gewesen zu sein, wenn er die frühere Beweisführung des Verfassers als eine verfehlte bezeichnet hat. Wn.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1.

Geodäsie.

L. Giletta. Bibliografia. Battaglini G. XVIII. Appendice.

G. B. Daddi. Comenti ad un opusculo intitolato Bibliografia. Battaglini G. XVIII. Appendice.

Kritik und Antikritik der beiden Werke:

G. B. Daddi. Corso di Geodesia. Torino. 1876.

G. B. Daddi. Della combinazione degli errori nel metodo dei minimi quadrati. Fratelli Bocca. 1879. B.

N. Jadanza. Sulla latitudine, longitudine ed azimut dei punti di una rete trigonometrica. Battaglini G. XVIII. 137-159.

Herleitung der Formeln, welche von C. G. Andrae in der „Danske Graadmaaling" zur geodätischen Uebertragung von Länge, Breite und Azimuth benutzt worden sind.

B.

Albrecht. Ueber die Umkehrung der Bessel'schen Methode der sphäroidischen Uebertragung. Astr. Nachr. XCVI. No. 2294. 209-218.

Aus den bekannten Bessel'schen Formeln für die geodätische Uebertragung von Länge, Breite und Azimuth wird für die Lösung der Aufgabe, den geodätischen Bogen zwischen zwei gegebenen Punkten zu bestimmen, eine Näherungsformel entwickelt, welche bei der Ermittelung des Unterschiedes zwischen der sphärischen und der sphäroidischen Länge die successiven Approximationen der indirecten Lösung erheblich abkürzt und bei kleinen Bögen eine directe Rechnung gewährt. B.

Bruns. Ueber die Umkehrung der Bessel'schen Methode der sphäroidischen Uebertragung. Astr. Nachr. XCVII. No. 2309. 73.

Bezugnehmend auf den Artikel in den Astr. Nachr. 2294 (vgl. vorst. Ref.) wird angegeben, wie man dasselbe Ziel auf einfachere Weise erreichen kann. B.

E. Pucci. Sulle posizioni geografiche. Battaglini G. XVIII. 358-367.

Die Aufgabe der geodätischen Uebertragung von Länge, Breite und Azimuth, sowie die umgekehrte Aufgabe wird in vorliegender Arbeit dadurch gelöst, dass die Reductionen der Bestimmungsstücke des geodätischen Dreiecks auf ein gewisses sphärisches Dreieck nach Potenzen der Bogenlänge entwickelt werden. Das sphärische Hülfsdreieck, durch dessen Wahl sich diese Methode von anderen unterscheidet, hat im Ausgangspunkte dieselbe Breite und dasselbe Azimuth, wie das geodätische, während die Länge des sphärischen Bogens der des geodätischen proportional ist. B.

A. G. Greenhill. On the differential equation of the ellipticities of the strata in the theory of the figure of the earth. Quart. J. XVII. 203-208.

Anknüpfend an die von Adams in seinen „Lectures on the figure of the earth“ gegebene Form der im Titel genannten Differentialgleichung zeigt der Verfasser, wie die Integration derselben sich durch Bessel'sche Functionen erledigen lässt, sobald man eine bestimmte Form der Beziehung zwischen dem Radius und der Dichtigkeit der einzelnen Schichten zu Grunde legt. Die eingeführte Hypothese ist im Uebrigen ziemlich willkürlich, aber etwas allgemeiner als die von Laplace behandelte.

B.

Faye. Sur les variations séculaires de la figure mathématique de la terre. C. R. XC. 1185-1191.

Faye. Sur la réduction des observations du pendule au niveau de la mer. C. R. XC. 1443-1447.

Beide Aufsätze beschäftigen sich mit den systematischen Abweichungen, welche die beobachteten Pendellängen gegenüber der üblichen theoretischen Formel zeigen. Es erscheint überflüssig auf die von Herrn Faye versuchte Erklärung und die daran geknüpften Folgerungen einzugehen, da derselbe hierbei wesentliche und längst in erschöpfender Weise behandelte Umstände völlig ausser Acht lässt. B.

C. Winterberg. Ueber die Anziehung von Massenpunkten insbesondere mit Rücksicht auf die Lothstörungen. Grunert Arch. LXV. 113-161.

Der Inhalt der Arbeit ist im Wesentlichen eine analytisch-geometrische Discussion der Niveauflächen eines Systems von zwei Massenpunkten. Die Anwendungen, welche hiervon am Schlusse auf die Theorie der Lothstörungen gemacht werden, sind in sofern nicht ohne Bedenken, als die Reduction der Massen-

unregelmässigkeiten des Erdkörpers auf Massenpunkte nur eine äusserst rohe Approximation gewährt. B.

HELMERT. Zur Frage der Beweiskraft der Gradmessungen für die Existenz der näherungsweise rotationsförmigen Gestalt des Geoids. Z. f. Verm. IX. 269-277.

Um zu erläutern, wie weit man aus den geometrischen Messungen der Geodäten auf die Rotationsgestalt des Geoids schliessen könne, wird gezeigt, dass die kugelartige Rotationsgestalt eine nothwendige Consequenz von einer der beiden folgenden Annahmen ist: 1) Punkte mit der Längendifferenz Null liegen gegenseitig in den Azimuthen 0° oder 180°; 2) Zwischen zwei Parallelen oder Orten gleicher Polhöhe liegen auf allen geographischen Meridianen gleich lange Bögen. B.

JORDAN. Elementare Begründung des Fundamentalsatzes über die geodätische Linie auf einer Umdrehungsfläche. Z. f. Verm. IX. 297-298.

WIENER. Zusatz zu der elementaren Begründung des Fundamentalsatzes über die geodätische Linie auf einer Umdrehungsfläche von Prof. Jordan. Z. f. Verm. IX. 337-338.

HELMERT. Nochmals der Fundamentalsatz für die geodätische Linie auf Umdrehungsflächen. Z. f. Verm. IX. 388. B.

P. GLOTIN. Navigation orthodromique. Mém. de Bord. (2) III. 377-395. B.

MAREK. Ueber approximative trigonometrische Berechnungen. Z. f. Verm. IX. 74-89. B.

Jordan. Ueber die günstigste Seitengleichung im Viereck. Z. f. Verm. IX. 65-73.

Der Aufsatz ist eine Vervollständigung der auf den genannten Gegenstand bezüglichen Untersuchung in Zachariae's Werk „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten", bei welcher nicht alle möglichen Fälle erschöpft worden waren. Hervorzuheben ist die einfache geometrische Gestalt, in welche sich das Schlussresultat kleiden lässt. B.

P. Glotin. Résolution des triangles sphériques par des triangles rectilignes sur une projection gnomonique. Mém. de Bord. (2) III. 395-401.

Da bei der centralen Projection die grössten Kreise auf der Kugel als Gerade in der Projectionsebene erscheinen, so lassen sich die Aufgaben der sphärischen Trigonometrie mittels dieser Projection auf die Auflösung ebener Dreiecke zurückführen. In dem vorliegenden Aufsatze wird dies im Einzelnen für die verschiedenen Fälle durchgeführt. B.

A. Ferrero. Note sur un procédé pratique pour établir l'accord entre plusieurs bases d'une triangulation. Astr. Nachr. XCVII. No. 2316. 177-182.

Um in einem Netze mit bereits ausgeglichenen Winkeln ohne Aenderung der letzteren die Grundlinien in Uebereinstimmung zu bringen, wird ein Verfahren vorgeschlagen, welches darauf hinauskommt, dass die Dreiecksseiten von jeder Grundlinie aus berechnet und aus den Einzelwerthen die geometrischen Mittel gebildet werden. B.

A. Börsch. Ueber den Einfluss der Wahl verschiedener Nullrichtungen auf die Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen. Astr. Nachr. XCVII. No. 2316. 181-184.

Dass bei der Bessel'schen Methode für Beobachtung und

Ausgleichung von Richtungen die Wahl der Nullrichtung ohne allen Einfluss auf die Endresultate sein müsse, ist ein Satz, der eigentlich sich von selbst versteht. Da jedoch dieser Satz bestritten worden ist, so unternimmt der Verfasser zu zeigen, in welcher Weise die Coefficienten der Gleichungssysteme für verschiedene Nullrichtungen zusammenhängen. B.

C. H. Kummell. Solution of a problem. Analyst VII. 145-147.

Von zwei Landmessern soll ein ebenes Feld von n Seiten gemessen werden. Der eine misst die Reihen

$$(1,2),\ (2,3),\ \ldots\ (n-1,n),\ (n,1)$$

mit einer Kette, der andere die Lagen

$$z_{1,2},\ z_{2,3},\ \ldots\ z_{n-1,n},\ z_{n,1}$$

mit einem Theodolithen. Es ist bekannt, dass der erste einen wahrscheinlichen Fehler von c Zoll per Kette und der andere von w'' per Winkel macht. Man soll mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate die Normalgleichungen finden, welche die kleinsten wahrscheinlichen Correctionen für die gemessenen Grössen geben. Glr. (O.)

O. de Rossi Re. Intorno alla costruzione delle curve intercalari nelle superficie rappresentate per le loro linee di livello e descrizione di un nuovo tiracurve-opisometro. Acc. P. N. L. XXXIII. 232-238.

Um zwischen gegebene äquidistante Niveaulinien neue einzuschalten, schlägt der Verfasser folgende Regeln vor. Wenn zwischen drei aufeinanderfolgenden Niveaulinien eine Gerade sich so ziehen lässt, dass die Gefälle von der ersten zur zweiten und von der zweiten zur dritten Linie einander gleich sind, so wird das Profil längs jener Geraden als geradlinig betrachtet und der Ort der einzuschaltenden Curve durch eine einfache Proportion gefunden. Wenn die beiden Gefälle ungleich sind, wird das be-

treffende Profilstück als Kreisbogen betrachtet und der Ort der neuen Linie durch eine einfache Construction ermittelt.

Das im Titel genannte Instrument ist nichts anderes als ein Curvenlineal, gebildet von einer elastischen Lamelle, deren Krümmung sich nach Belieben variiren lässt. B.

LINDEMANN. Directe trigonometrische Berechnung der Aufgabe der unzugänglichen Distanz. Z. f. Verm. IX. 58.

B.

A. NAGEL. Mittheilungen aus dem Gebiete der Geodäsie. Civiling. 1880. 177-204, 393-424.

Die erste Abtheilung, Nr. 6) der ganzen Reihe von Mittheilungen, behandelt folgende Aufgabe: „Es sind zwei mehrere Kilometer von einander entfernte Punkte gegeben; es soll ein Zwischenpunkt der geraden Linie zwischen diesen beiden Endpunkten bestimmt werden.“ Die Aufgabe wird erst für den Fall, dass die Aussicht zwischen beiden Endpunkten frei ist, dann auch für den Fall, dass keine Aussicht vorhanden ist, behandelt und an Beispielen erläutert. Nr. 7) enthält eine ausführliche Darstellung der Basismessung auf der Plattform des Dresdener Polytechnikums. O.

E. MAYER. Ueber Küstenaufnahmen. Leipzig. Teubner.

Capitel 2.

Astronomie.

H. C. E. MARTUS. Astronomische Geographie. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Leipzig. C. A. Koch.

Das vorliegende Lehrbuch setzt die mathematischen Kenntnisse eines Primaners voraus. Abschnitt I, der Sternhimmel, be-

handelt das Himmelsgewölbe, die Sternbilder, die astronomischen Messinstrumente, die verschiedenen Coordinatensysteme an der Sphäre, die astronomischen Zeiten und Zeitmasse, die Strahlenbrechung und die Hauptaufgaben der sphärischen Astronomie. Abschnitt II, die Erde, behandelt im 1. Capitel die Kugelgestalt der Erde und des Mondes, die Beweise für erstere, die geographische Ortsbestimmung und die Kartenprojection. Capitel 2 enthält die geodätischen Instrumente und die Principien der Gradmessungen, erläutert an dem Berliner Dreiecksnetz, Berechnung des Erdradius und der Erdkrümmung kürzeste Linien auf der Erdkugel und Grösse und Distanz des Mondes. Capitel 3, Bewegung der Erde, bespricht Rotation und Translation der Erde, die verschiedenen Beweise dafür, wobei die Erscheinungen an den anderen Gliedern des Sonnensystems in ausgedehntem Masse zur Erläuterung herangezogen werden, die Kepler'schen Gesetze und die Gravitation, die Methoden zur Bestimmung der Sonnenparallaxe, die Stellung der Erde im Sonnensystem und die Mondbahn. Capitel 4 endlich behandelt die Elemente der Geodäsie auf dem Ellipsoid, die Pendelmessungen und die Lothablenkungen. Das vorliegende Buch unterscheidet sich, wie aus dieser summarischen Inhaltsübersicht hervorgeht, in der Anlage nicht wesentlich von den zahllosen Leitfaden und Lehrbüchern, welche die mathematische Geographie mehr oder minder elementar oder populär behandeln, in Bezug auf Reichhaltigkeit und Ausführlichkeit ist es jedoch den meisten überlegen. Der Verfasser ist, wie die zahlreichen Citate und Noten zeigen, bemüht gewesen, für die Zahlenangaben und anderen Daten auf die besten Quellen zurück zu gehen, und dies ist ihm im Allgemeinen gelungen. Die zahlreichen Beispiele und Aufgaben sind meist sehr instructiv gewählt, ebenso sind die Abbildungen und Figuren mit Sorgfalt behandelt. Die Beschreibung einzelner Messapparate ist höchst ausführlich, wenngleich sie, für den Schüler wenigstens, die directe Anschauung oder ein schematisches Modell wohl nicht ersetzen können. Hierher gehört u. a. die Beschreibung des Vernier, des Sextanten, des Theodoliten, des Mikrometers, des Chronographen, des Basisapparates von Brunner und des Foucault'schen Pendels der Königstädtischen Realschule zu Berlin.

Ebenso ist ein Hauptgewicht auf die Darstellung der Methoden gelegt, welche zu grundlegenden Resultaten geführt haben. Zu moniren sind verschiedene Ungenauigkeiten und Auslassungen, welche durch den elementaren Charakter der Darstellung keineswegs entschuldigt werden. Ebenso sind einzelne vom Verfasser reproducirte Urtheile über Fragen der praktischen Geodäsie mindestens als einseitig zu bezeichnen. B.

H. RÉSAL. Astronomie nautique. Liouville J. (3) VI. 85-89.

Anzeige des Buches: Astronomie nautique von Faye.

B.

E. MILLOSEVICH. Riflessioni sulla navigazione astronomica e specialmente sulla „Nouvelle navigation astronomique.“ Atti d. Ist. Ven. (5) V. 1010-1033.

B.

J. HARTMANN. Lehrbuch der Zeitbestimmung und Zeitrechnung für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterrichte. München. E. Stahl.

Die erste Abtheilung giebt nach Vorausschickung der nöthigen Elemente aus der sphärischen Astronomie eine sehr ausführliche Theorie der Sonnenuhren, an die sich ein etwas dürftiger Abschnitt über moderne Zeitbestimmung anschliesst. Die zweite Abtheilung ist der Darlegung des Kalenderwesens vom Alterthum bis auf die Neuzeit gewidmet. Als Anhang sind Tabellen für den Meton'schen und Callippischen Cyclus, sowie ein immerwährender Kalender alten und neuen Styls beigefügt. B.

NORDMANN. Ueber eine Art der Centralbewegung, welche die Planetenbewegung als Specialfall einschliesst. Pr. Halberstadt.

Siehe Abschn. X. Cap. 4. A. p. 672.

H. A. Howe. A new approximate solution of Kepler's problem. Astr. Nachr. XCVII. No. 2322. 273-276.

H. A. Howe. Two new solutions of Kepler's problem. Astr. Nachr. XCVIII. No. 2348. 305-308.

B.

Th. von Oppolzer. Ueber die Bestimmung grosser wahrer Anomalien in parabolischen Bahnen. Berl. Monatsber. 1880. 511-515.

Umformung der von Bessel für den in Rede stehenden Fall gegebenen Rechnungsvorschrift, nebst zwei Täfelchen zur Erleichterung der Rechnung. B.

W. Fabritius. Ueber den Fall des grössten Kreises bei Bahnbestimmungen aus drei beobachteten Oertern. Astr. Nachr. XCVI. Nr. 2298. 279-286.

Unter Richtigstellung einer früheren Arbeit desselben Verfassers werden die verschiedenen Möglichkeiten discutirt, welche den sogenannten Fall des grössten Kreises, d. h. das Versagen der üblichen Bahnbestimmungsmethoden herbeiführen können.

B.

De Gasparis. Sopra una relazione di distanze nel problema dei tre corpi. Astr. Nachr. XCVI. No. 2302. 337-344.

Bezieht man im Drei-Körperproblem die Bewegung eines jeden Körpers auf jeden der beiden andern, so bestehen zwischen den Elementen der osculirenden Ellipsen, welche diesen sechs Bewegungen entsprechen, einfache Relationen, deren Entwickelung Gegenstand des Aufsatzes ist. B.

Weiler. Das Problem der drei Körper in der neuen Störungstheorie. Astr. Nachr. XCVII. No. 2311. 97-112; No. 2313. 129-144; No. 2315. 161-176; No. 2317. 193-208.

Da der wesentlich aus Formelentwickelungen bestehende Inhalt der Arbeit eine auszugsweise Wiedergabe nicht zulässt, so muss sich Referent zur Charakterisirung auf die Angabe beschränken, dass diese „neue Störungstheorie", welche den Anspruch erhebt, einen wesentlichen Fortschritt über das Bisherige zu bedeuten, auf der Integration eines Systems 7[ter] Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen beruht, zu welchen der Verfasser unter Benutzung der Jacobi'schen Elimination des Knotens durch Einführung von besonderen Variabeln gelangt, und dass die erforderlichen Integrationen in successiver Annäherung durch Quadraturen geleistet werden. B.

Ch. Trépied. Sur la méthode de Cauchy pour le développement de la fonction perturbatrice. C. R. XC. 1474-1477.

Bezieht sich auf die Beseitigung einer Schwierigkeit, welche bei einer der von Cauchy vorgeschlagenen Methoden zur Entwickelung der Störungsfunction eintreten kann, wenn es sich um grosse Excentricitäten handelt. B.

F. Tisserand. Sur un développement particulier de la fonction perturbatrice. C. R. XC. 557-561.

Die behandelte Entwickelung rührt von Cauchy her. Der Verfasser giebt nicht allein eine einfache Herleitung für dieselbe, sondern entwickelt auch den Zusammenhang zwischen den von Cauchy hierbei eingeführten Transcendenten und den Laplace'schen Y, sowie den hypergeometrischen Reihen. B.

De Gasparis. Verificazione ed uso di una formola pel calcolo delle perturbazioni planetarie. Acc. R. d. L. (3) IV. 246-248.

Die Formeln, deren Anwendung hier durch ein numerisches Beispiel erläutert wird, beruhen darauf, dass die gesuchten Stö-

rungen nach Potenzen der Zwischenzeit entwickelt werden. (Vgl. F. d. M. XI. 1879. p. 803.) B.

S. Newcomb. A method of developing the perturbative function of planetary motion. Am. J. III. 193-210.

Der Verfasser entwickelt einen Algorithmus, welcher auf rein mechanische Weise die reciproke Distanz zweier Planeten nach den Potenzen der Excentricitäten e und e' zu entwickeln gestattet. Als das Wesentliche hierbei ist hervorzuheben, dass, sobald die Entwickelungen nach e für $e' = 0$ und nach e' für $e = 0$ aufgestellt sind, die Ausdrücke für die dann noch anzuwendenden Operationssymbole durch symbolische Multiplication gefunden werden. B.

Lehmann-Filhés. Schreiben an den Herausgeber. Astr. Nachr. XCVIII. No. 2348. 307-310.

Beweis des folgenden Satzes: „Gegeben sind die drei Oerter P, P', P'' eines Planeten und die entsprechenden Oerter E, E', E'' für die Erde. Verbindet man den Durchschnitt der Sehne EE'' und des Radiusvectors zu E' mit dem analogen Punkte für den Planeten, so geht diese Gerade mit Vernachlässigung der höheren Potenzen der Zwischenzeiten immer durch denselben Punkt von $E'P'$." B.

E. Sourander. Sur le discriminant de l'équation dont dépendent les inégalités séculaires des planètes. Act. Soc. Fenn. XI.

Siehe F. d. M. XI. 1879. p. 805. M. L.

De Gasparis. Sulla variazione della eccentricità nelle orbite planetarie. Acc. R. d. L. (3) IV. 50.

Bekanntes. B.

De Gaspasis. Sur la variation de la longitude du noeud, de l'inclinaison, et du demi-paramètre dans les orbites planétaires. Astr. Nachr. XCVI. No. 2293. 205-208.

Bekanntes. B.

A. de Gasparis. Sur la variation du demi-grand axe des orbites planétaires. Monthl. Not. XL. 269-270.

Der Verfasser will zeigen, dass man durch Anwendung der von ihm in den Astr. Nachr. 2270 gegebenen Formeln zu bekannten Resultaten kommt. Glr. (O.)

A. Gaillot. Sur les tables du mouvement de Saturne de Le Verrier. C. R. XCI. 847-849.

Der Verfasser macht Mittheilung davon, dass eine von Gyldén aufgefundene empirische Correction der Saturnstafeln von Leverrier Letzterem bereits bekannt war, aber aus ganz bestimmten Gründen nicht berücksichtigt wurde. B.

A. Souchon. Sur un point de la théorie analytique du système du monde. Astr. Nachr. XCVII. No. 2318. 209-220.

Enthält die Vervollständigung der von Pontécoulant gegebenen Entwickelung für die grosse Ungleichung bei Jupiter und Saturn. B.

H. Hennessy. Sur la figure de la planète Mars. C. R. XC. 1419-1422.

Der Verfasser sucht auf Grund früher von ihm entwickelter Formeln zu zeigen, dass die Young'schen Messungen der Marsabplattung besser mit der Annahme eines früher flüssigen Zustandes, als der einer Oberflächenerosion harmoniren.

B.

O. CALLANDREAU. Détermination, par les méthodes de M. Gyldén, du mouvement de la planète Héra. C. R. XC. 82-85.

B.

G. H. DARWIN. On the secular changes in the elements of the orbit of a satellite. Phil. Trans. CLXXI. 713-891.

Die Arbeit handelt von dem Einfluss einer Fluthreibung (frictional tide) in einem Planeten auf die Bahn seiner Satelliten und besteht aus einer Einleitung, Theil I bis VIII und einem Appendix. Theil VII hat zum Titel: Summary and discussion of results, und enthält eine Auseinandersetzung des Problems und eine summarische Inhaltsangabe von Theil I bis VI. Theil VIII hat den Titel: Review of the tidal theory of evolution as applied to the Earth and the other members of the solar system. Er enthält eine Sammlung der gefundenen Resultate in einer Form, in der sie zugleich einen geschichtlichen Ueberblick der Untersuchungen über das Verhältnis von Erde und Mond giebt, und zum Schluss auch die übrigen Planeten Mars, Jupiter, Saturn und ganz kurz Uranus und Neptun berücksichtigt. Cly. (O.)

SOUILLART. Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter. Mem. of R. Astr. Soc. XLV. 1-149.

In dieser Abhandlung behandelt der Verfasser die analytische Theorie der Jupitertrabanten nach der Methode der Variation der Constanten. Einen Versuch über diesen Gegenstand hat der Verfasser bereits in den Ann. d. l'Ec. N. (1) II. veröffentlicht. Aber fortgesetzte Betrachtungen und gründlichere Studien der Laplace'schen Theorie haben ihn allmälig zu wesentlichen Verbesserungen, Modificationen und Ergänzungen der früheren Arbeit geführt. Er stellt daher in dieser Arbeit alle seine Untersuchungen über die Frage zusammen, welche als Basis für eine neue Bestimmung der Elemente und zur Construction neuer Tafeln dienen können. Die Theorie ist im Ganzen der von

Laplace entsprechend und unterscheidet sich von ihr nur durch die Verschiedenheit der fundamentalen Methode. Durch eine Modification der gewöhnlichen Integrationsmethode erhält der Verfasser die erste Näherung in den Ungleichheiten des Radiusvectors und der Länge neben den Gliedern der ersten Ordnung in Beziehung auf die störende Kraft, deren wichtigste das Quadrat von ihr enthält. Laplace hatte die Glieder von höherer als der ersten Ordnung als vernachlässigbar betrachtet; der Verfasser findet jedoch, dass sie sehr merkbar sind und die Coefficienten der grossen Ungleichheiten der drei ersten Satelliten wesentlich beeinflussen. Das ist der wesentlichste Punkt, in dem keine Uebereinstimmung zwischen den beiden Theorien vorhanden ist.

Glr. (O.)

A. DE GASPARIS. Sulla variazione dell' area descritta dalla luna intorno alla terra, prodotta dall' azione solare. Acc. R. d. L. (3) IV. 116.

Bekannte Störungsformel. B.

J. C. ADAMS. Note on the constant of lunar parallax. Monthl. Not. XL. 482-488.

Bemerkungen über die scheinbar mangelnde Uebereinstimmung in den Werthen der Constante der Mondparallaxe, die der Verfasser im Nautical Almanac für 1856 und Hansen in seiner Einleitung zu den Mondtafeln gegeben hatte. Glr. (O.)

J. C. ADAMS. Investigation of the secular acceleration of the moon's mean motion caused by the secular change in the eccentricity of the earth's orbit; taking into account terms of the order m^4, but neglecting the eccentricity and inclination of the moon's orbit. Monthl. Not. XL. 472-482.

Analytische Untersuchung der beiden Hauptglieder der Accele-

ration unter den im Titel gegebenen Voraussetzungen. Die Resultate sind mit denen übereinstimmend, welche der Verfasser in einer Arbeit in den Phil. Trans. von 1853 gegeben hatte.

Glr. (O.)

G. B. Airy. On the theoretical value of the acceleration of the moon's mean motion in longitude, produced by the change of eccentricity of the earth's orbit. Correction and addition. Monthl. Not. XL. 368-376, 385, 578-599.

J. C. Adams. Note on the Astronomer Royal's investigation of the theoretical value of the acceleration of the moon's mean motion. Monthl. Not. XL. 411-415.

Herr Airy untersucht den Werth der säcularen Acceleration durch eine „numerische" Mondtheorie und erhält den alten Werth von 10″ als die Acceleration für ein Jahrhundert. Herr Adams macht auf die Mängel der Schlussfolgerung aufmerksam; in dem Zusatz giebt Herr Airy eine zweite Untersuchung, in der er den Adams'schen Werth von 6″ erhält. Glr. (O.)

G. H. Darwin. On the secular effects of tidal friction. Astr. Nachr. XCVI. No. 2294. 217-222.

Selbstanzeige von vier in den Schriften der R. Society publicirten Arbeiten. B.

Lehmann-Filhés. Ueber die Bestimmung des Radiationspunktes eines Sternschnuppenschwarms mit Hülfe eines neuen Meteoroskops. Astr. Nachr. XCVI. No. 2296. 241-248.

Das Meteoroskop ist eine parallactische Maschine, welche ausser Rectascension und Declination eines Punktes der Meteorbahn noch den Positionswinkel der letzteren angiebt. Während die Rechnung sich hierbei sehr einfach gestaltet, soweit der rein

geometrische Theil der Aufgabe in Frage kommt, erfordert die Abschätzung des jeder Messung beizulegenden Gewichtes eine weitläufigere Untersuchung, welche den Hauptinhalt des Aufsatzes ausmacht. B.

Lehmann-Filhés. Ueber die Vertheilung der Radiationspunkte an der Himmelskugel. Astr. Nachr. XCVII. No. 2327. 353-368; No. 2328. 369-372.

Um die scheinbare Vertheilung der Radianten an der Himmelskugel zu ermitteln, hatte Schiaparelli die Annahme zu Grunde gelegt, dass die Vertheilung der parabolischen Meteorbahnen in grosser Entfernung von der Sonne eine rein zufällige sei; die daraus gezogenen Schlüsse widersprachen jedoch der Erfahrung. Der Verfasser unternimmt nun zu zeigen, dass dieser Widerspruch schwindet, sobald man die räumliche Ausdehnung des Erdkörpers mit berücksichtigt. B.

H. Gyldén. Versuch einer mathematischen Theorie zur Erklärung des Lichtwechsels der veränderlichen Sterne. Act. Soc. Fenn. XI.

Siehe F. d. M. XI. 1879. p. 810. M.-L.

C. Taylor. Insigniores orbitae cometarum proprietates. Messenger (2) IX. 158-164; X. 79-83.

Fortsetzung der Arbeit aus dem Messenger (2) IX. 63-71 (s. F. d. M. XI. 1879. p. 47). Sie enthält Mittheilungen über Sätze von Lambert, die sich in seinem dort citirten Werke befinden und Kegelschnitte, besonders die Bewegung in Kegelschnitten betreffen. Zu denselben werden verschiedene Beweise mitgetheilt.

Glr. (O.)

R. Radau. Sur la réfraction de Bessel. C. R. XC. 1264-1267.

B.

C. Israel. Ueber die theoretisch möglichen Fälle der Polhöhenbestimmung. Grunert Arch. LXV. 225-239.

Es wird vorausgesetzt, dass von den Bestimmungsstücken: Höhen, Azimuthe oder Azimuthdifferenzen, Stundenwinkel oder Zeitdifferenzen, Declination, Lage des Meridians, die zur Ermittelung der Polhöhe nothwendige resp. hinreichende Anzahl gegeben sei. Unter der Annahme, dass die Beobachtungen sich nur auf einen einzigen Stern beziehen, werden dann die verschiedenen möglichen Fälle durchmustert und classificirt.

B.

G. Lorenzoni. Sul luogo sferico dei punti nei quali è minima la variazione dell' azimut rispetto al tempo. Atti d. Ist. Ven. (5) V. 749-775.

Die Arbeit behandelt ausführlich den Ort der Punkte an der Sphäre, in denen die Ableitung des Azimuths, genommen nach dem Stundenwinkel bei constanter Declination und Polhöhe, dem absoluten Betrage nach ein Minimum wird. An die Discussion der Curven auf der Sphäre schliesst sich dann die Behandlung ihrer centralen, stereographischen und orthographischen Projection.

B.

A. Abetti. Sulla determinazione del tempo coll' osservazione dei passagi delle stelle pel verticale della polare. Atti d. Ist. Ven. (5) VI. 931-957.

Die hier entwickelte Methode der Zeitbestimmung ist eine Modification der bekannten Methode von Döllen. Die Abänderung besteht im Wesentlichen darin, dass jeder Stern in beiden Kreislagen beobachtet wird, und dadurch die Berücksichtigung des Collimationsfehlers und eventuell die Reduction auf den Mittelfaden fortfällt. B.

G. LORENZONI. Sulla determinazione delle coordinate angolari mediante gli strumenti astronomici e, in particolare, sullo strumento dei passagi. Atti d. Ist. Ven. (5) IV. 1273-1370.

Die Arbeit, welche an sich nichts neues enthält, ist eine speciell für das Bedürfnis italienischer Leser bestimmte monographische Darstellung der Theorie astronomischer Winkelmessungen, mit besonderer Berücksichtigung des Durchgangsinstruments.
B.

A. SAPORETTI. Metodo teorico pratico per iscoprire gl'istanti del nascere e tramontare della luna specialmente colla Connaissance des Temps e col Nautical Almanac Greenwich. Mem. di Bologna (4) I. 235-275.

Eine für den elementaren Gegenstand recht weitschweifige Darlegung von Methoden zur Berechnung der Auf- und Untergänge des Mondes. B.

PECHÜLE. Dérivation de formules de réduction pour des observations à disque circulaire, faites avec le micromètre annulaire en proximité de l'horizon. Astr. Nachr. XCVIII. No. 2339. 165-174.

Enthält die Reductionsvorschriften für Ringmikrometerbeobachtungen von Scheiben. B.

E. B. ELLIOTT. Calendar formulae. Wash. Bull. II. 37-38.

Regel, um den zu einem bestimmten Datum gehörigen Wochentag zu finden. B.

Anhang.

F. X. Steck und J. Bielmayr. Sammlung von arithmetischen Aufgaben in systematischer Ordnung. 6te Aufl. Kempten. Kösch.

Unveränderte neue Auflage der bereits früher besprochenen Sammlung. O.

A. Boset. Traite élémentaire d'algèbre. Bruxelles. Mayolez. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

Inhalt: 1) Buchstabenrechnen. 2) und 3) Lineare und quadratische Gleichungen. 4) Reihen und Logarithmen. 5) Kettenbrüche und unbestimmte Gleichungen. 6) Combinationen. Wahrscheinlichkeit. Binomen. Reihen. 7) Wurzelrechnung. Exponentialgleichungen. 8) Elemente der Differentialrechnung mit den gewöhnlichen Anwendungen. 9) Allgemeine Theorie der Gleichungen. 10) Differenzen. 11) Rationale Brüche. Recurrente Reihen. 12) Determinanten. Theorie der Elimination. Capitel 9 ist nach dem Cours d'analyse von Catalan, Capitel 12 nach Salmon bearbeitet. Es fehlt dem Buche häufig an der erforderlichen Strenge, namentlich an den Stellen, wo die Methode der Grenzen, des unendlich Kleinen und der unbestimmten Coefficienten angewandt wird. Mn. (O.)

F. J. STUDNIČKA. Lehrbuch der Algebra für die oberen Klassen der Mittelschulen. Zweite Aufl. (Böhmisch.)

Die Veränderung bezieht sich auf die Einfügung von zwei neuen Paragraphen, wovon der erste (§ 7) die Theilbarkeit der Zahlen sammt Folgerungen, der zweite (§ 8) die Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt zum Gegenstande hat. Ausserdem findet sich darin eine einfachere Ableitung der Binomialcoefficienten vor.

Std.

W. GOSIEWSKI. Algebra. Warschau. (Polnisch).

Die Schrift enthält eine Auseinandersetzung des Inhalts der Algebra, dann ein Programm dieser Lehre für Gymnasien und Realschulen, eine Notiz über Geschichte der Algebra in Europa und speciell in Polen. Dn.

W. TRYBULSKI. Arithmetik. Warschau. (Polnisch).

Die Abhandlung enthält in kurzer Darstellung die Geschichte der Arithmetik im Allgemeinen, eine ausführlichere Geschichte dieser Lehre in Polen, eine Inhaltsangabe mehrerer älterer und neuerer polnischer arithmetischer Lehrbücher, eine klare Darlegung der modernen Unterrichtsmethoden und viele Bemerkungen pädagogischen Inhalts. Dn.

W. SCHRADER. Mathematisches Formelbuch. Leitfaden und Repetitorium. Halle. Schrödel u. Simon.

Enthält eine übersichtliche Sammlung des Formelmaterials aus der Arithmetik, Algebra, Analysis, Trigonometrie, analytischen Geometrie und mathematischen Geographie, wie es auf Schulen gebraucht wird. O.

BREMIKER's logarithmisch-trigonometrische Tafeln (mit 6 Decimalen), nebst einer Tafel der Gauss'schen Logarithmen. Polnische Ausgabe mit Erläuterungen von Dr. Daniel Wierzbicki aus Krakau. Berlin. Nicolai.

Dn.

F. G. GAUSS. Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln zum Gebrauche für Schule und Praxis. 11te Aufl. Leipzig. Stern.

Neue unveränderte Auflage der bekannten Tafeln.

O.

CH. A. VOGLER. Erwiderung auf einige Fragen des Herrn Lalanne. Z. f. Verm. IX. 127-131.

Herr Vogler hatte in der Anzeige seines Buches „Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln und zu deren Gebrauch beim Schnellrechnen sowie beim Schnellquotiren mit Aneroid und Tachymeter, für Ingenieure, Topographen und Alpenfreunde.... Berlin 1877. Ernst u. Korn" im Repertorium der Math. II. 268—271 sich über die von Herrn Lalanne (z. B. C. R. LXXXV. 1012—1014, s. a. F. d. M. IX. 1877. 813—814) erhobenen Klagen geäussert. Hierauf antwortete Herr L. Lalanne in demselben Bande des Repertoriums 416—419. Er hielt seine Klagen aufrecht und stellte verschiedene Fragen an Herrn Vogler. In der Erwiderung vertheidigt sich dieser gegen die Vorwürfe, macht auf Missverständnisse des Herrn Lalanne aufmerksam, erkennt wieder die Priorität desselben, soweit sie ihm berechtigt erscheint, an und beantwortet die an ihn gerichteten Fragen.

Rs.

J. M. MCKENZIE. Erreurs dans les tables mathématiques. Darboux Bull. (2) III. 31-32.

Giebt Fehler an, die sich in: Vazquez Queipo, „Tables de logarithmes à six décimales" und anderen Tafeln finden.

O.

W. ADAM. Methodische Anweisung zum Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel mit Anwendung zu geometrischen Berechnungen, nebst zahlreichen Uebungsaufgaben. Zugleich das Wichtigste von den Operationen mit Potenzausdrücken und Wurzelgrössen enthaltend. Zweite verbesserte Aufl. Stuttgart. G. Lemppenau.

Das vorliegende Elementarbuch ist in erster Linie zum Gebrauche an Schullehrer-Seminarien bearbeitet. Die in den beiden ersten Abschnitten zusammengestellten Sätze der Potenz- und Wurzellehre werden nicht bewiesen, sondern nur aus einzelnen Beispielen abstrahirt. Die Vorschriften für die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel enthalten manche für die Praxis brauchbaren Winke. In der zweiten Auflage ist besonders die Methode der Cubikwurzelausziehung durch Kürzungen verbessert worden. M.

SYLVESTER. Solution of a question (4031). Educ. Times XXXIII. 96.

Es wird der Begriff tree, Baum, hier für „Wissenschaftssystem“ gebraucht (wir haben analoge Bezeichnungen in den Worten Silberbaum, Bleibaum etc.), folgendermassen festgesetzt: 1) Eine Verzweigung (ramification) ist ein System von Beziehungen zwischen Punkten, so dass jeder Punkt mit einem oder mehreren Punkten in Beziehung steht, doch so, dass kein System von aufeinanderfolgend bezogenen Punkten einen in sich selbst zurückkehrenden Kreis bildet. 2) Ein Baum ist eine irreducible Verzweigung, d. h. eine solche, in der kein Aggregat von zwei oder mehreren Verzweigungen möglich ist. M.

W. C. WITTWER. Grundzüge der mathematischen Chemie. Schlömilch Z. XXV. 353-374.

Die in seinem Buche „Die Moleculargesetze. Leipzig, 1871“ veröffentlichte Theorie des Verfassers, welche die Erscheinungen

der Molecularphysik darstellen sollte, wird auf die Chemie angewendet. Im allgemeinen Theile werden die Hypothesen gegeben und einige Fundamentalsätze entwickelt, welche für alle chemischen Erscheinungen gelten. In dem speciellen Theile sollen die einzelnen Elemente behandelt werden; bisher ist nur der Wasserstoff in Betracht gezogen. Rs.

A. Kurz. Aus der Schulmappe. Bair. Bl. XVI. 28-32, 226-231, 360-366, 456-460.

77. Zur Einleitung in die Physik. Als die drei Hauptcapitel werden postulirt: Statik und Dynamik; Hydrostatik; Hydrodynamik, Aerostatik, Aerodynamik sammt Capillarität; Wellenlehre und Akustik. Die Imponderabilien werden in besonderen Abschnitten behandelt. 78. Ein Beispiel der Centrifugalkraft. Elementare Berechnung der Festigkeitsgrenze für eine durch die Centrifugalkraft in Anspruch genommene Radspeiche. 79. Der Regenbogen. Darstellung der Brechungsverhältnisse durch Zeichnung. 80. Theoretische Schallgeschwindigkeit. Dieselbe wird nach einer bekannten Formel für Luft, Wasser und Eisen numerisch berechnet. 81. Mechanik der Seifenblase. Da auf die äussere und innere Haut einer solchen resp. die Drucke $K \pm \frac{H}{\varrho}$ wirken, so muss der Ueberdruck der inneren gegen die äussere Luft der Kraft $\frac{2H}{\varrho}$ Gleichgewicht halten. 82. Ueber den Foucault'schen Pendelversuch. Besprechung der kritischen Arbeit von Röthig (Schlömilch Z. XXIV. 1879., s. F. d. M. XI. p. 42) 83. Skalenaräometer. Hinweis auf die bekannte rein geometrische Construction der Skala einer solchen Senkwaage. 84. Die Energie des Pendels. Im Anschluss an Maxwell wird die bekannte Formel für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels aus der Thatsache hergeleitet, dass ein Pendel in der Verticale die kinetische Energie $\frac{2m\pi^2 e^2}{T^2}$ besitzt, und dass

der nämliche Ausdruck die potentielle Energie für den Moment der grössten Elongation darstellt. 85. Reduction des Barometers auf 0°. Hierfür existiren Tabellen, deren Angaben jedoch dem Verfasser zufolge nur für eine Messingskala gelten, für eine Glasskala dagegen um $\frac{1}{16}$ verkleinert werden sollen. 86. Die mechanische Wärmetheorie noch einmal. Specialisirung des zweiten Hauptsatzes an dem Beispiel der Heissluftmaschine. 87. Specifische Gewichtsbestimmung mit Rüchsicht auf den Luftauftrieb und die Temperatur des Wassers. Die in Miscelle 68 vom Verfasser gegebene Formel deckt sich mit den von Beetz und Kohlrausch zum gleichen Zwecke angegebenen Formeln. 88. Die Wasserpumpe. Elementare Bestimmung des von einer Hebe- und Druckpumpe geleisteten Arbeitsquantums. 89. Die Optik als IV. Capitel der Physik. Dreizehn Abschnitte. 90. Die Thermik als V. Capitel. Zwölf Abschnitte. 91. Die Elektrik als VI. (letztes) Capitel der Physik. Sechzehn Abschnitte. 92. Die specifische Wärme der Luft und das Poisson'sche Gesetz. Dieses Gesetz, welches den adiabatischen Process der Thermodynamik in die Formel $p:p_0 = (v_0:v)^k$ kleiden lehrt, ist beim Unterrichte besser zu verwenden, als Näherungsformeln. 93. Ein grosser, bequemer, billiger Wellenapparat. Bleikugeln, die von der Decke eines Zimmers herabhängen und durch Stücke dünnen Spiraldrahtes unter sich verbunden sind. 94. Alle Interferenzfälle. Dieselben sichtbar vor Augen zu stellen, kann man sich mit Vortheil des Blackburn'schen Pendels bedienen. 95. Ueber die Verdampfungswärme des Wassers. Die Clausius'schen Formeln lassen in ihrer Structur den physikalischen Process erkennen, dass die von der Wärme bei der Verdampfung zu leistende Arbeit mit der Höhe der Temperatur abnimmt. 96. Ueber die Fallgesetze. Vorschlag, die bezüglichen Formeln graphisch zu interpretiren. 97. Ueber die Fallbeschleunigung auf der Erde. Deren Variation lässt sich mit feinen Wägungsvorrichtungen dadurch nachweisen, dass ein und derselbe Körper in verschiedenen Entfernungen von der Erde verschieden schwer erscheint. 98. Ueber die Geschwindigkeit des Pendels. Nachtrag zu Miscelle 84. 99. Pendel mit Widerstand. Wenn

$$x = x_0 e^{-at} \cos \frac{2\pi t}{T}$$

ist, so kann man $r = x_0 e^{-at}$ als Gleichung einer logarithmischen Spirale betrachten und so den fraglichen Schwingungszustand als Projection der Bewegung in einer solchen Curve auffassen.

100. Ueber den Luftwiderstand und die Luftreibung. Zurückführung der bezüglichen Constanten auf absolutes Mass.

Gr.

Namenregister.

Seite
Abakanowicz, B. Der Integrator 217
Abetti, A. Sulla determinazione del tempo coll'osservazione dei passagi delle stelle pel verticale della polare 867
Adair, J. J. To find the velocity potential for a liquid contained between a fixed ellipsoid and a moving confocal ellipsoid within the former 697
Adam, W. Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel 872
Adams, J. C. 1) Note on the constant of lunar parallax 864
2) Investigation of the secular acceleration of the moon's mean motion 864. 865
Airy, G. B. On the theoretical value of the acceleration of the moon's mean motion 865
Albrecht. Ueber die Umkehrung der Bessel'schen Methode der sphäroidischen Uebertragung 851
Allan, J. C. On some problems in the conduction of electricity . 795
Allman, G. J. Greek geometry from Thales to Euclid 35
Amagat. Note sur l'équation qui conduit à l'expression théorique de la vitesse du son 741
Ameseder, A. Ueber Regelflächen vierten Grades 516
Amigues, E. 1) Note sur la série de Taylor 174
2) Recherches sur deux modes de transformation des figures solides 625
Amodeo, F. Teorema di geometria proiettiva 467
Amthor, A. Das Problema bovinum des Archimedes 30
Anderson, A. Solutions of questions 80. 478
André, D. 1) Second mémoire sur la sommation des séries . . . 175
2) Intégration sous forme finie de trois espèces d'équations différentielles linéaires 246
3) Développements, par rapport au module, des fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$ et de leurs puissances 363
Andréeff, C. Ueber die Construction der Polaren in Bezug auf die geometrischen ebenen Curven 489
Anglin, A. H. Mathematical notes 63
Angot, A. Tables nouvelles pour calculer les hauteurs au moyen des observations barométriques 664
Anonym. 1) Fragments inédits de Pascal 12
2) Théorie mathématique du jeu de la bouillotte 156

Seite

Anonym. 3) Composition mathématique 462
4) Solution d'une question 477
5) Repetitorium der analytischen Geometrie 568
6) Relazione intorno alle memorie presentate pel premio d'idrodinamica teorica 712
Anthony, E. Notes on quaternions 531
Appell, P. 1) Sur les séries divergentes à termes positifs 185
2) Développement en série entière de $(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ 191
3) Sur les équations différentielles linéaires 249. 250
4) Sur les séries hypergéométriques de deux variables 296
5) Sur la série $F_3(\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma xy)$ 296
6) Sur quelques formules relatives aux fonctions hypergéométriques de deux variables 297
7) Sur une classe de polynômes 342
8) Intégration de certaines équations différentielles à l'aide des fonctions Θ 363
9) Sur les fonctions de deux variables à trois ou quatre paires de périodes 379
Arnaud, V. M. Solution d'une question 188
Aschieri, F. 1) Sulle forme collineari e reciproche nell'ordinaria geometria 490
2) Rappresentazione sullo spazio punteggiato di alcune forme di 3ª specie composte di rette 621
3) Di una particolare corrispondenza univoca fra elementi di spazi a tre dimensioni 626
Ascoli, G. Sulle serie trigonometriche a due variabili 185
August, F. Ueber eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Methode der mechanischen Quadratur 231

Bachmann, P. Ergänzung einer Untersuchung von Dirichlet . . . 126
Bäcklund, A. V. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen 290. 291
Badal. Études d'optique physiologique 775
Baillaud, B. Sur le calcul numérique des intégrales définies . . . 228
Baker, M. 1) The history of Malfatti's problem 35
2) Discussion of a geometrical problem 427
Ball, R. S. Notes on non-euclidean geometry 647
Bandke, B. Einwirkung eines entfernten Magnets und einer von ihm inducirten Eisenkugel auf eine parallelepipedische Magnetnadel 807
Barbarin, P. Note sur le planimètre polaire 233
Bardelli, G. Intorno ad alcune relazioni geometriche e meccaniche concernenti le linee gobbe 672
Bardey, E. Bemerkung 77
Basso, G. Cenni biografici su S. Gherardi 15
Bates, H. H. On the movement of a particle attracted towards a point 672
Battaglini, G. 1) Sull' equazione differenziale ellittica 350
2) Sui complessi di secondo grado 620
Bauer, G. Ueber eine Eigenschaft des geradlinigen Hyperboloids 506
Bauer, K. L. Zur Behandlung der Lehre von der gleichförmig beschleunigten Bewegung 671
Becker, J. K. Lehrbuch der Elementargeometrie 416
Bellati, M. Sul valore dell' effetto Peltier in una coppia ferreozinco 798

Seite
Bellavitis, G. 1) Quindicesima rivista di giornali 37
2) Transunto della 4ª parte delle considerazioni delle matematiche pure 54
3) Giuocco americano 106
4) Dei libri di ragione a scrittura doppia 341
5) Sviluppo in serie delle funzioni implicite e rami infiniti delle curve algebriche 341
6) Sulla statica 660
Beltrami, E. 1) Relazioni su di alcune memorie di G. Ascoli, G. B. Favero 185. 283
2) Intorno ad un teorema di Abel 213
3) Intorno ad alcune serie trigonometriche 213
4) Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. C. Neumann sulle funzioni potenziali 717
5) Sulla teoria dell' attrazione degli ellissoidi 720
Berchet, G. Il planisfero di G. Leonardo 7
Berg, F. J. v. d. 1) Oplossing eenede prijsvraag 656
2) Over de vergelijking des door drie gegeven richtlijnen bepaalde hyperboloïde 657
Berger, A. Sur quelques applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres 225
Bergold, E. Ebene Trigonometrie 424
Bertini, E. Sulle trasformazioni univoche piane ed in particolare sulle involutorie 621
Bertrand, J. Discours prononcé aux funérailles de M. Chasles . . 15
Bessel, F. Rationale sphärische Dreiecke 132
Besso, D. Elementi di trigonometria piana 425
Beyda, Th. Das Unendliche 49
Bianchi, L. 1) Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung 352
2) Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung 576
Bickerdike, C. Solutions of questions 564. 567
Biehler, Ch. 1) Sur une application de la méthode de Sturm . . 68
2) Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles 72
3) Sur un procédé d'élimination 103
4) Correspondance 103
5) Sur la transformation du déterminant de M. Sylvester en celui de Cauchy 103
6) Sur les équations linéaires 105
7) Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques . . 539
Bielmayr, J. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 869
Bienaymé, J. Lettre à M. Darboux 52
Binder, W. Ueber Projectiv-Constructionen der Curven zweiter Ordnung 464
Blackwood, E. Solution of a question 170
Böklen, O. Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle 617
Börsch, A. 1) Die einem Dreieck umschriebene Ellipse kleinsten Inhalts 552
2) Einfluss der Wahl verschiedener Nullrichtungen auf die Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen 864
Bois-Reymond, P. du. 1) Ueber den Satz $\lim f'(x) = \lim \frac{f(x)}{x}$ . . 208
2) Ein allgemeiner Satz der Integrirbarkeitslehre 211
3) Der Beweis eines Fundamentalsatzes der Integralrechnung . . 217
4) Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung . 299

Seite

Bois-Reymond, P. du. 5) Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen 336
Boltzmann, L. 1) Zur Theorie der elektrischen Ausdehnung . . . 789
2) Erwiderung gegen H. O. E. Meyer 813
3) Zur Theorie der Gasreibung 819
Boncompagni, B. Intorno ad un trattato di aritmetica del P. D. Smeraldo Borghetti Lucchesse 11
Bonsdorff, E. 1) Method att utreckte relationer emellan binäre Formers Kovarianter 90
2) Om binära Formers Discriminanter 90
3) Ueber cyklisch-projectivische Systeme 457
Borchardt, C. W. Remarque relative à un mémoire de M. Sylvester 108
Boschi, P. Ricerche sopra una questione di partizioni di numeri . 153
Boset, A. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 869
Bouquet. Discours prononcé aux funérailles de M. Chasles 15
Bourguet. Correspondance 566
Boussinesq, J. 1) Sur la manière dont les frottements entrent en jeu dans un fluide qui sort de l'état de repos. Considérations 701
2) Sur la manière de présenter la théorie du potentiel et des potentiels d'attractions dans l'hypothèse, généralement admise, de la discontinuité de la matière 719
3) Sur les problèmes des températures stationnaires 835
Brand, C. v. Grundriss der Differentialrechnung 206
Brassinne, E. Détermination de trois axes d'un corps solide . . 686
Braun, W. 1) Zur Berechnung der Doppelwurzel einer binären Form 86
2) Zur Integration gewisser Differentiale 212
Braunmühl, A. v. 1) Ein Verfahren zur Division ganzer Zahlen . 121
2) Ueber ein Problem des Minimums 581
Bremiker. Logarithmentafel 871
Bresse. Fonctions des vitesses, extension des théorèmes de Lagrange au cas d'un fluide imparfait. Réponse à une note de M. Boussinesq 701
Brill, A. 1) Ueber eine Eigenschaft der Resultante 104
2) Ueber das Additionstheorem und das Umkehrproblem der elliptischen Functionen 353
3) Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Curvenspecies 539
4) Ueber die Wendepunkte der Curven 4[ter] Ordnung mit Doppelpunkten 547
5) Mathematische Modelle 610. 616
Brioschi, F. 1) Sur les équations différentielles linéaires 251
2) Sopra una classe di equazioni differenziali integrabili per funzioni ellittiche 253
3) Di una proprietà delle funzioni differenziali lineari del secondo ordine 254
Brocard, H. Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers 32. 120
Bruno, F. de. 1) Sur un théorème général dans la théorie des covariants 83
2) Sur quelques théorèmes relatifs au développement des fonctions et aux covariants 83
3) Notes on modern algebra 83
Bruno, G. Sopra i tetraedri trirettangoli 518
Bruns. Ueber die Umkehrung der Bessel'schen Methode der sphäroidischen Uebertragung 851
Bucchia, G. Sulle proprietà meccaniche delle ruote a schiaffo . . 714

Seite

Buchbinder, F. Behandlung der Kegelschnitte auf Schulen nach Steiner 442
Budde, E. Das Clausius'sche Gesetz und die Bewegung der Erde im Raume 777
Burmester, L. 1) Ueber das bifocal-veränderliche System 643
2) Ueber die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten . 652
Buys, L. La science de la quantité 40

Cabanellas, G. Sur un nouveau théorème électrodynamique . . . 806
Callandreau, O. 1) Sur la formule de quadrature de Gauss . . . 230
2) Sur des transcendantes qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des perturbations planétaires 394
3) Détermination du mouvement de la planète Héra 863
Candèze. Sur une règle de M. Laguerre 70
Canevazzi, S. Sopra una formola della resistenza dei materiali . 738
Cantor, G. 1) Zur Theorie der zahlentheoretischen Functionen . . 127
2) Bemerkungen über trigonometrische Reihen 184
3) Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten 404
Cantor, M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 16
Capel, N. H. Solution of a question 420
Capelli, A. Sopra le forme ternarie a più serie di variabili . . . 99
Carnoy, J. 1) Théorèmes sur les coniques 469
2) Propriétés descriptives nouvelles des coniques 469
Caron. Sur l'épure des 27 droites d'une surface du troisième degré 513
Carr, G. S. Solution of a question 687
Casey, J. On cubic transformations 535
Casey, W. P. Solutions of questions 172. 420
Casorati, F. 1) Sull' equazione fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali lineari 243
2) Il calcolo delle differenze finite 305
Cassani, P. 1) Tra fisica e metafisica 52
2) Intorno ad alcune generazioni della retta e del piano 407
3) La quadrica dei dodici punti 507
Catalan, E. 1) Lettre à M. Hermite 122
2) Théorème de Staudt et de Clausen 128
3) Un nouveau théorème empirique 137
4) Remarque sur une série 190
5) Sur la quadrature des courbes paraboliques 231
6) Sur la cyclide 517
7) Rapport sur un mémoire de M. Saltel 546
Cayley, A. 1) On finite groups of linear transformations of a variable. Correction 86
2) On the theorem of the finite number of the covariants of a binary quantic 88
3) On a formula of elimination 104
4) On a binomial equation 128
5) On the theorems of the 2, 4, 8 and 16 squares 133
6) Note on Riemann's: „Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation" 206
7) On the Schwarzian derivative and the polyhedral functions . . 262
8) Table of $\Delta^m o^n : \Pi(m)$ up to $m = n = 20$ 341
9) A memoir on the single and double theta-functions 380
10) On a theorem relating to the multiple theta-functions 382
11) A theorem in spherical trigonometry 430
12) On Schubert's method of the contacts of a line with a surface . 520
13) A geometrical construction relating to imaginary quantities . . 531

Seite

Cayley, A. 14) On the number of constants in the equation of a surface $PS - QR = 0$ . . . 596
15) On a theorem relating to conformable figures . . . 627
Cazzaniga, P. Sulla integrazione delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e di 1° grado mediante funzioni algebriche . . . 236
Cesaro, E. 1) Sur la série harmonique . . . 189
2) Une démonstration de la formule de Stirling . . . 190
3) Sur l'existence de certains polyèdres . . . 413
Challis. On Newton's Regula tertia philosophandi . . . 54
Charve, L. De la réduction des formes quadratiques ternaires positives . . . 145
Chéfik-Bey. Solution d'exercices sur le tétraèdre . . . 434
Christie, A. S. Solution of a question . . . 433
Chrystal, G. 1) Non-Euclidian geometry . . . 406
2) On Minding's system of forces . . . 655
Clausius, R. 1) Ueber die Vergleichung der elektrodynamischen Grundbegriffe mit der Erfahrung . . . 777
2) Anwendung des elektrodynamischen Potentials zur Bestimmung der ponderomotorischen Kräfte . . . 780
3) Neuere Untersuchungen über die mittlere Weglänge der Gasmolecüle . . . 818
4) Ueber das Verhalten der Kohlensäure in Bezug auf Druck, Volumen und Temperatur . . . 829
Claussen, A. P. L. Trigonometrische Auflösung der quadratischen und cubischen Gleichungen . . . 78
Clifford. Solution of a question . . . 478
Cochez. Solutions de questions . . . 420. 437
Cockle, J. 1) On a certain definite integral . . . 227
2) On the relations of certain symbols . . . 268
3) On a binomial biordinal . . . 270
4) Supplement to „Exercises" . . . 271
5) Supplementary paper on primary forms . . . 271
6) Solution of a question . . . 285
Cointe, Le. Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une conique et à un cercle . . . 556
Collet, J. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre . . . 284
Consentius, R. O. 1) Ueber die Bestimmung der schiefen Lage zweier projectivischer Strahlenbüschel in der Ebene . . . 458
2) Der cubische Kreis . . . 512
Cornu, A. 1) Sur la vitesse de propagation de la lumière . . . 749
2) Sur le spectre normal du soleil . . . 775
Courbe, H. Solution d'une question . . . 604
Courcel, G. de. Avertissement . . . 14
Craig, Th. 1) Determination of a sphere which cuts five given spheres at the same angle . . . 604
2) Orthomorphic projection of an ellipsoid upon a sphere . . . 630
3) On steady motion in an incompressible viscous fluid . . . 702
4) On certain possible cases of steady motion in a viscous fluid . 702
Crocchi, L. Una relazione fra le funzioni simmetriche semplici e le funzioni simmetriche complete . . . 119
Crofton. Solutions of questions . . . 164. 172
Crone, C. Bevis for en Sätning af Taltheorien . . . 121
Curioni, G. Sulla equazione dei momenti inflettenti nelle sezioni correspondenti a tre appoggi successivi . . . 737

Seite
Curtis, A. H. On free motion under the action of several central forces 675
Curtze, M. 1) Kurze Replik an H. Zebrawski 6
2) Die Ausgabe von Jordanus' „De numeris datis“ durch Prof. P. Treutlein 6
Czuber, Em. Zur Theorie der Fehlerellipse 156

Daddi, G. B. Comenti ad un opuscolo 850
Dahl, C. Bevis for en Sätning af Invarianttheorien 82
Dainelli, U. Sul movimento per una linea qualunque 678
Darboux, G. 1) Notice biographique sur M. Chasles 16
2) Sur les systèmes formés d'équations linéaires à une seule variable indépendante 271
3) Sur deux intégrales elliptiques qui se présentent sous forme indéterminée 360
4) Sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique 370
5) Sur les transcendantes qui jouent un rôle important dans la théorie des perturbations planétaires 394
6) Sur le théorème fondamental de la géométrie projective 447
7) Correspondance 557
8) Sur le contact des coniques et des surfaces 590. 596
9) Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps . . 683
Darwin, G. H. 1) On the secular changes in the elements of the orbit of a satellite 863
2) On the secular effects of tidal friction 865
Daubrawa, H. Ueber allgemeine Transformationssymbole für Auffassung der plinotesseralen Gestalten als tetragonale rhombische und hexagonale Combinationen 532
David. 1) Sur la partition des nombres 133
2) Sur la transformation des fonctions Θ 366
Day, G. H. Solutions of questions 170. 172. 420
Dedekind, R. 1) Vorlesungen über Zahlentheorie von P. Lejeune-Dirichlet 120
2) Réponse à une remarque de M. Sylvester 124
3) Sur la théorie des nombres complexes idéaux 129
Delsaux, J. Sur la loi de force de M. Clausius entre des courants élémentaires 779
Deprez, M. 1) Sur un nouvel indicateur dynamométrique 687
2) Sur le rendement économique des moteurs électriques 805
3) Sur le mesureur d'énergie 811
Desboves, A. Théorème sur les équations cubique et biquadratique 135
Desmartres. Sur les surfaces à génératrices circulaires 569
Despeyrous. Sur la thermodynamique 811
Dewulf, C. Correspondance 489
Dickson, J. D. H. A new method of investigating relations between functions of the roots of an equation and its coefficients 65
Diekmann, J. Die Grundtypen der lösbaren quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten 77
Dillner, G. Sur une classe d'équations différentielles linéaires de divers ordres à coefficients rationnels 247
Dini, U. Serie di Fourier 177
Dötsch, G. Zum Unterrichte in der Determinantenlehre 115
Dorn, E. Ueber die Fortführung der Elektricität durch strömendes Wasser in Röhren 796

Seite

Dostor, G. 1) Questions sur les nombres 129
2) Sommation des cubes d'un certain nombre d'impairs consécutifs 130
3) Propriété de la suite naturelle des nombres impairs 130
4) Somme des carrés et somme des cubes des $n+1$ nombres entiers consécutifs 186
5) Surfaces des triangles dont les sommets sont les pieds des bissectrices d'un triangle donné 418
6) Distances mutuelles entre les pieds des six bissectrices d'un triangle 418
7) Distances des trois sommets d'un triangle au centre d'un cercle 419
8) Les trois quadrilatères d'Albert Girard 420
9) Extension du théorème d'Hippocrate 423
10) Relations entre les lignes trigonométriques des angles d'un triangle 426
11) Formules de réduction trigonométrique 427
12) Théorie générale des polygones étoilés 458
13) Lieu des centres des cercles tangents à un demi cercle 550
14) Détermination algébrique très simple du centre de gravité du trapèze 657

Drasch, H. 1) Die Stellung der synthetischen Geometrie zur darstellenden 437
2) Zur Construction der Schmiegungsebene der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiter Ordnung 507
3) Tangentenconstruction für die Berührungslinie zwischen einer windschiefen Fläche und ihrer Leitfläche 508

Drinkwater, A. E. Solution of a question 170

Drobisch, M. W. Ueber die nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwartende Dauer der Ehen 165

Droz, A. Solutions de questions 424. 567

Dühring, E. Robert Mayer 16

Dufaure. Solution d'une question 478

Dumas. Discours prononcé aux funérailles de M. Chasles 15

Duport. Sur un mode particulier de représentation des imaginaires 304

Durège, H. 1) Ueber die Hoppe'sche Knotencurve 411
2) Ueber die von Möbius gegebenen Kriterien für die Art eines durch fünf Punkte oder fünf Tangenten bestimmten Kegelschnittes 468

Dvorsky, F. Neues über J. Kepler 11

Dyck, W. 1) Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen 315
2) Ueber eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlechte 3 . 319

Dziwiński. Allgemeine Gleichung der Berührungscylinder und der Berührungskegel der Flächen zweiten Grades 602

Earnshaw, S. On the integral of Laplace's equation in finite terms 298

Eastwood, G. Solutions of questions 137. 420. 437

Eddy, Th. Neue Constructionen aus der graphischen Statik . . . 660

Edwardes, D. Solutions of questions 478. 563. 738

E. G. Démonstration géométrique d'une propriété des foyers extérieurs au plan d'une conique 475

Elliot. 1) Généralisation de deux théorèmes sur les fonctions Θ . 368
2) Sur le problème de l'inversion 369
3) Sur la transformation des intégrales abéliennes 382

Elliott, E. B. 1) The construction of the government sinking fund. 165
2) Solutions of questions 170. 172. 437

Seite

Elliott, E. B. 3) An expansion for $\int_0^\infty \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x^n}dx$, n being a positive integer . . . 233
4) Calendar formulae . . . 868
Emsmann, H. Zum vieraxigen Coordinatensystem . . . 530
Eneström, G. 1) Cartas inéditas de Bernoulli à Euler . . . 13
2) Om Matematikens historia . . . 23
Englert, F. Die Anzahl S_n der innerhalb eines n-Eckes fallenden Schnittpunkte seiner Diagonalen . . . 422
Enneper, A. 1) Eine Gleichung zwischen Thetafunctionen . . . 365
2) Ueber ein Problem aus der Lehre vom Maximum und Minimum 432
3) Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien . . . 579
Ermakoff, W. 1) Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . 294
2) Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei Variabeln . . . 294
Escary. 1) Sur quelques remarques, relatives à l'équation de Lamé 256
2) Remarque relative à deux intégrales obtenues par Lamé . . . 336
Escherich, G. v. Die Determinanten höheren Ranges . . . 109
Evans. Solution of a question . . . 562
Exner, K. Ueber die Newton'schen Staubringe . . . 773

Fabritius, W. Ueber den Fall des grössten Kreises bei Bahnbestimmungen aus drei beobacheten Oertern . . . 859
Fais, A. Sulle principali proprietàt delle traiettorie ortogonali delle generatrici delle superficie rigate . . . 574
Fambri, P. Tra fisica e metafisica . . . 52
Farkas, J. 1) Die Summe gleichartiger Potenzen von den Wurzeln einer algebraischen Gleichung als Function der Coefficienten derselben Gleichung und umgekehrt . . . 63
2) Sur l'application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires . . . 260. 346
3) Sur la théorie des sinus des ordres supérieurs . . . 346. 347
4) Sur une classe de deux fonctions doublement périodiques . . . 361
5) Sur les fonctions elliptiques . . . 362
6) Mittlerer verticaler Druck des symmetrischen Pendels auf seine Axe . . . 682
Fauquembergue, E. Solutions de questions . . . 139. 420. 567
Fauré, J. M. Solution d'une question . . . 420
Favaro, A. 1) Sulla interpretazione matematica del papiro Rhind 1
2) Le aggiunte autografe di Galileo al dialogo sopra i due massimi sistemi . . . 9
3) Ragguaglio dei manoscritti Galileiani nella biblioteca nazionale di Firenze . . . 10
4) Le matematiche nello studio di Padova dal principio del secolo XIV alla fine del XVI . . . 28
5) Sulla elica calcolatoria di Fuller . . . 33
6) Appendice alle notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni . . . 33
7) Sopra alcuni esercizii di statica grafica . . . 660
Faye. 1) Sur les variations séculaires de la figure mathématique de la terre . . . 852
2) Sur la réduction des observations du pendule au niveau de la mer . . . 852
Ferreira, L. F. M. 1) Sur l'équation du deuxième degré . . . 77

Seite
Ferreira, L. F. M. 2) Sur un problème 82
3) Solution d'une question de géométrie 505
Ferrero, A. Sur un procédé pratique pour établir l'accord entre plusieurs bases d'une triangulation 854
Ferrers, N. M. 1) Note on elliptic functions 357
2) On the motion of water contained in certain cylindrical vessels 697
Ferrini, R. Sull' aberrazione di sfericità nelle lenti 776
Feussner. Ueber die Theorie der Interferenzerscheinungen 774
Finger, J. Ueber den Einfluss der Rotation des Erdsphäroids auf terrestrische Bewegungen 707
Fitzgerald, G. F. On the electrodynamic theory of the reflexion and refraction 751
Fleck. Factoren, grösster gemeinschaftlicher Theiler und kleinster gemeinschaftlicher Dividend 120
Floquet, G. Sur quelques équations différentielles linéaires 259
Folie, F. 1) Rapports sur des mémoires de MM. C. le Paige et Saltel 89. 546
2) Mémoire sur les courbes du 3me ordre 545
Forest, E. L. de. 1) On unsymmetrical adjustments and their limits 156
2) On a theorem in probability 157
3) On some properties of polynomials 157
Forestier, Ch. Sur les diverses équations d'une courbe en coordonnées polaires par rapport au même pôle et au même axe . 531
Formenti, G. Sul problema delle tautocrone 680
Forsyth, A. R. 1) The symmetric functions of the roots of an equation 119
2) On certain integrals 396
3) On the motion of a viscous incompressible fluid 700
Foster, G. C. Lösungen von Aufgaben 811
Fouret, G. 1) Sur quelques questions concernant les cycloïdes et les épicycloïdes 568
2) Sur la construction de la tangente à une certaine courbe . . . 568
Franke. Ueber Gleichungen dritten und vierten Grades 79
Franklin, F. 1) On the calculation of the generating function and tables of groundforms for binary quantics 86
2) Note on the intersection of two curves 542
Frattini, G. 1) Un teorema aritmetico 128
2) Risoluzione di sei equazioni fra nove quantità 566
Freeman, A. Note on the value of the least root of an equation . 82
Freyberg, J. Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curven 4ter Ordnung 547
Frisby, E. 1) On magic squares 139
2) On a series for the determination of the number expressing the ratio of the circumference to the diameter 190
Frobenius, G. 1) Ueber die Leibniz'sche Reihe 188
2) Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen 331
3) Zur Theorie der Transformation der Thetafunctionen 367
4) Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln 385
Fröhlich, J. Zu den elektrodynamischen Grundgesetzen von Clausius, Riemann und Weber 777
Frost, P. 1) General expression for the radius of curvature in dipolar coordinates 533
2) On the potential and attractions of an ellipsoidal shell at an external point 721

Seite

Frost, P. 3) On the potential of the electricity on two charged spherical conductors 787

Fuchs, L. 1) Ueber eine Classe von Functionen mehrerer Variabeln 241

2) Ueber die Functionen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen entstehen . 241

3) Auszug aus einem Schreiben an H. Borchardt 243

Fürstenau, E. Beiträge zur Theorie der Determinanten 108

Gaillot, A. Sur les tables du mouvement de Saturne de Le Verrier 862

Gall, v. 1) Das vollständige Formensystem einer binären Form achter Ordnung 93

2) Auszug aus einem Briefe 93

Gallenkamp, W. 1) Algebraische Analysis und analytische Geometrie 173. 533

2) Synthetische Geometrie I. und II. 442

Gambey. Solution d'une question 604

Gascheau. Note sur les conditions de continuité et de discontinuité des fonctions algébriques 331

Gasparis, A. de. 1) Intorno ad una memoria di G. Celoria . . . 37

2) Sopra una relazione di distanze nel problema dei tre corpi . . 859

3) Verificazione ed uso di una formola pel calcolo delle perturbazioni planetarie 860

4) Sulla variazione della eccentricità nelle orbite planetarie . . . 861

5) Sur la variation de la longitude, du noeud, de l'inclinaison et du demi-paramètre dans les orbites planétaires 862

6) Sur la variation du demi grand axe des orbites planétaires . . 862

7) Sulla variazione dell' area descritta dalla luna intorno alla terra, prodotta dall' azione solare 864

Gauss, F. G. Logarithmentafel 871

Gautero, G. 1) Sul movimento di una superficie che ne tocca costantemente un altra fissa 649

2) Di una classe di meccanismi a tre membri 654

Geelmuyden, H. Die conische Pendelbewegung 681

Gegenbauer, L. 1) Ueber Sturm'sche Reihen 67

2) Ueber eine specielle symmetrische Determinante 112

3) Ueber das cubische Reciprocitätsgesetz 124

4) Algorithmen zur Bestimmung des verallgemeinerten Legendre'schen Symbols 125

Geisenheimer, L. Beziehung zwischen den Krümmungsradien reciproker, collinearer und inverser ebener Curven 643

Geiser, C. F. Ueber einen fundamentalen Satz aus der kinematischen Geometrie des Raumes 645

Genese, R. W. 1) Solutions of questions . . . 437. 478. 562. 598. 738

2) On the equation to the real and to the imaginary directrices and latera recta of a conic 549

Genocchi, A. 1) Il carteggio di S. Germain e Gauss 14

2) Sur la loi de réciprocité de Legendre étendue aux nombres premiers 123

Genty. Constructions diverses et solutions de problèmes graphiques relatifs aux coniques 471

Gerbaldi, F. 1) Nota sopra il significato geometrico del covariante di 9° ordine di una forma cubica ternaria 95

2) Nota sopra alcune applicazioni di una formola combinatoria . . 151

3) Sui sistemi di cubiche gobbe 609

Gerlach, H. Ueber reciproke Gleichungen 78

Seite
Germain, S. Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques 14. 728
Gerrans, H. T. Solution of a question 478
Gessner, Th. Das Abstimmen im Lichte der Durchnitts- und Wahrscheinlichkeitsmethode 169
Gierster, J. Ueber Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante 141
Giese, W. Ueber den Verlauf der Rückstandsbildung in Leydener Flaschen 790
Gilbert, P. 1) Examen des publications récentes sur G. Galilée . 10
2) Extrait d'une lettre à M. Darboux 11
3) Note sur quelques intégrales définies 220
4) Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre 283
5) Sur une propriété de la fonction de Poisson 290
6) Note sur la formule d'addition des fonctions elliptiques 354
7) Rectification aux formules sur les mouvements relatifs 667
8) Sur l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités des aiguilles d'une montre 689
Giletta, L. 1) Intorno ai fondamenti del principio dei minimi quadrati 163
2) Bibliografia 850
Gilles, J. 1) Bedenkliche Richtungen in der Mathematik, nebst Erwiderung 54
2) Die Newton'sche Anziehungskraft ist auf Bewegung nicht zurückführbar 636
Girard, H. La philosophie scientifique 38
Glaisher, J. W. L. 1) On some algebraical expressions which are unaltered by certain substitutions 116
2) On the method of least squares 162
3) Note on a point in the method of least squares 164
4) Algebraical proof of the fractional series for the cotangent and cosecant 195
5) Note on an algebraical identity 341
6) Systems of formulae in elliptic functions 356
7) On the deduction of trigonometrical from elliptic function formulae 357
8) On some elliptic function and trigonometrical theorems 358
9) A system of trigonometrical formulae 358
10) On the addition equation for the third elliptic integral 359
11) A chapter in elliptic functions 362
12) Note on a method of obtaining the q-formula for the sine-amplitude in elliptic functions 363
13) Theorem connected with a certain figure inscribed in a cercle . 422
14) On trigonometrical identities involving products of four sines . 428
15) On algebraical expansions of which the fractional series for the cotangent and cosecant are the limiting forms 429
16) Theorems in elementary trigonometry, with addition 429
17) Trigonometrical theorems involving the products of four sines and four cosines 429
Glashan, J. C. Change of the independent variable 210
Glazebrook, R. F. 1) On the reflexion and refraction of light . . 763
2) Note on Nicol's prism 771
3) Double refraction and dispersion in Iceland spar 772
Glinzer, E. Lehrbuch der Elementar-Geometrie 417
Glotin, P. 1) Navigation orthodromique 853

Seite
Glotin, P. 2) Résolution des triangles sphériques par des triangles rectilignes sur une projection gnomonique 854
Göbel, J. B. Ueber einige Eigenschaften des Cylindroids 608
Götting, R. Einleitung in die Analysis 173
Gordan, P. 1) Ueber das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ 96
2) Typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ 96
Gosiewski, W. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 870
Goupillière, H. de la. Correspondance 36
Gouy. 1) Sur la propagation de la lumière 749
2) Sur la théorie des phénomènes d'interférence 771
Govi, G. 1) Quelques lettres inédites de Lagrange 13
2) Nouvelle méthode pour déterminer la longueur du pendule simple 683
Gräfe, F. 1) Kurze Ableitung der Additionstheoreme der elliptischen Integrale aus der Gleichung $\frac{da}{\Delta a} + \frac{db}{\Delta b} = 0$ 353
2) Einige Notizen und Erweiterungen über das Pascal'sche Sechseck 470
Graetz, L. 1) Wirbelbewegungen in compressiblen Flüssigkeiten . 698
2) Ueber die Bewegung von Flüssigkeiten in Röhren 704
Graf, J. H. Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche . . . 408
Graham, R. Solution of a question 564
Grassi, G. Sulla trasmissione del calore tra due fluidi in movimento separati da una parete solida 845
Greenhill, A. G. 1) Integrals expressed by inverse elliptic functions 360
2) The application of elliptic coordinates and Lagrange's equations of motion to Euler's problem of two centres of forces 685
3) On the general motion of a liquid ellipsoid under the gravitation of its own parts 696
4) On the steady motion of a top 696
5) On the differential equation of the ellipticities of the strata in the theory of the figure of the earth 722. 852
Gribodi, G. Nota sopra una proprietà dei poli di un fascio di rette in involuzione 464
Griffiths, G. J. 1) Solution of a question 164
2) Two notes 355
Grinwis, C. H. C. De dubbellading eener centrobarische massaverdeeling 798
Grosscurth. Factorentabelle 120
Gruber, J. Quotient und Bruch 54
Grunert, J. A. Ueber Newton's Methode zur Beschreibung eines Kegelschnittes durch fünf und vier gegebene Punkte . . . 465. 466
Gruss, G. Ueber Beziehungen zwischen mehreren projectivischen Curvenbüscheln und deren Erzeugnissen 542
Gudila-Godlewski. Factorentabelle 120
Guébhard, A. 1) Sur une méthode à déterminer les lignes de niveau dans l'écoulement stationnaire de l'électricité 796
2) Sur les lignes équipotentielles d'un certain plan 796
Günther, S. 1) Ein mathematisch-geographisches Dokument aus dem 10ten Jahrhundert 4
2) Der Wapowski-Brief des Coppernicus 9
3) Eine didaktisch wichtige Lösung trinomischer Gleichungen . . 76
4) Bemerkungen zu einem Aufsatz von v. Schäwen 76
5) Ueber einen Satz von den symmetralen Determinanten 112
6) Die merkwürdigen Linien im sphärischen Dreieck 431

Seite

Günther, S. 7) Anwendung schiefwinkliger Coordinaten auf ein Problem der Potentialtheorie 722
Guidi, C. Sulla determinazione grafica delle forze interne nelle trace omogenee e reticolari 659
Guldberg, C. M. Étude sur les mouvements de l'atmosphère . . 709
Gustafsson, F. De codicibus Boëtii de institutione arithmetica librorum Bernensibus 2
Gyldén, H. 1) Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre 260
2) Sur l'orbite que parcourt un point matériel attiré par un sphéroïde 674
3) Ueber die Bahn eines materiellen Punktes, der sich unter dem Einfluss einer gewissen Centralkraft bewegt 675
4) Versuch einer mathematischen Theorie zur Erklärung des Lichtwechsels der veränderlichen Sterne 866

Haag. Sur une classe d'équations différentielles 276
Haan, D. B. de. 1) Geluksspelen met dobbelsteenen 154
2) Sur la différentiation de quelques intégrales elliptiques par rapport au module 363
Häbe. Die Hülfsmittel des mathematischen Unterrichts 55
Hain, E. 1) Ueber das Gesetz der Säulenverjüngung 435
2) Zur Construction symmetrischer Punktsysteme 547
3) Neue Herleitung der Kreistangentengleichung 550
Hall, A. 1) Parallel chords in an ellipse 553
2) Solution of a question 564
3) On a curve of the fourth degree 564
Halphén, G. 1) Sur une formule d'analyse 209
2) Observations sur la théorie des caractéristiques 521
3) Sur certains cas particuliers du déplacement d'un corps solide 647
Halsted, B. 1) Statement and reduction of syllogism 44
2) Algorithmic division in logic 44
Hammond, J. 1) Solutions of questions 170. 660
2) On general differentiation 209
Handl, A. Neue Art der elementaren Ableitung der Formel für die Fliehkraft 671
Hansemann, G. 1) Versuche über stehende Schwingungen des Wassers 699
2) Leitungsfähigkeit des Eisens 839
Hansen, P. C. V. Bemärkninger om algebraisk Integration af specielle lineäre Differentialligninger 248
Hansted, B. 1) Trois théorèmes relatifs à la théorie des nombres 117. 122. 148
2) Nogle Methode til at integrere visse lineare Differentialligninger ved bestemte Integraler 249
3) Quelques transformations de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants 251
Hardy, G. F. Notes on the practical application of Mr. Makeham's formula to the graduation of mortality tables 167
Harkness. The number of lenses required in an achromatic objective 776
Harnack, A. Ueber die trigonometrische Reihe 176
Hart, H. 1) A trigonometrical identity, with Addition 428
2) On the criteria for determining the nature of a conic represented by the general equation in areal coordinates 548
3) On the focal conics of a bicircular quartic 565

Seite
Hart, H. 4) On the path of a projectile 671
5) Integration of the rectangular equations of motion in the case of a central force varying inversely as the square of distances 673
Hartmann, J. Lehrbuch der Zeitbestimmung und Zeitrechnung . . 858
Haussner, A. Constructionsaufgaben 418
Hazzidakis, J. N. 1) Ueber eine Eigenschaft der Systeme von linearen homogenen Differentialgleichungen 274
2) Ueber eine Differentialgleichung zweiter Ordnung 277
Heen, de. Détermination des dimensions réelles des molécules . . 724
Heger, R. 1) Eine Construction von Curven dritter Ordnung aus conjugirten Punkten 482
2) Zur Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten 504
Heiberg, J. L. Die Kenntnisse des Archimedes über die Kegelschnitte 1
Heine, E. Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy 392
Helm, G. Beiträge zur geometrischen Behandlung der Mechanik . 665
Helmert. 1) Zur Frage der Beweiskraft der Gradmessungen für die Existenz der näherungsweisen rotationsförmigen Gestalt des Geoids 853
2) Zusatz zu einer Arbeit von Jordan 353
Helmholtz, H. Ueber Bewegungsströme am polarisirten Platina . 797
Hempel, A. Wärmezustand der Erde 848
Hennessy, H. Sur la figure de la planète Mars 862
Henry, Ch. 1) Prologus N. Ocreati in Helceph ad Adelardum Batensem 7
2) Mémoire de L. Euler 12
3) Lettre à M. Darboux 32
4) Sur une valeur approchée de $\sqrt{2}$ 32
5) Généralisation d'un théorème d'arithmétique 134
6) Remarque 138
Heppel, G. Solutions of questions 155. 164. 567
Heringa, P. M. Considérations sur la théorie des phénomènes capillaires 738
Hermes. Rechenschema für die Verwandlung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch 149
Hermite, Ch. 1) Sur la série de Fourier 177
2) Sur une intégrale 219
3) Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé 254
4) Sur une formule d'Euler 349
5) Sur une proposition de la théorie des fonctions elliptiques . . 360
6) Sur quelques applications des fonctions elliptiques 370
Herrmann, E. Compendium der mechanischen Wärmetheorie . . 811
Hertz, H. R. Versuch zur Feststellung einer oberen Grenze für die kinetische Energie der elektrischen Strömung 800
Herwig, H. Bemerkungen zu einer Arbeit des H. H. F. Weber . . 842
Herz, N. 1) Zur Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen 330
2) Einige Eigenschaften von Kugelbüscheln und Kugelschaaren . . 603
3) Die lebendige Kraft eines bewegten Körpers 668
Hess, E. Anwendungen und Erweiterungen des Steiner-Lindelöf'schen Satzes 413
Hess, W. Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariabeln Ebene 649
Hesse, O. Die Determinanten 106
Hesse, O. Untersuchungen über das Dispersionsgesetz 760

Seite

Hettner, G. 1) Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen 326
2) Ueber die Reduction der Integrale einer besonderen Classe von algebraischen Differentialen auf die hyperelliptischen Integrale . 372
3) Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen 373
Hicks, W. M. 1) On the motion of two spheres in a fluid 694
2) On the problem of two pulsating spheres in a fluid 695
3) On the condition of steady motion of two cylinders in a fluid . 696
Hill, J. M. Some properties of the equations of hydrodynamics . . 690
Himstedt, F. Versuche über Induction in körperlichen Leitern . 804
Hirst, A. On the complexes generated by two correlative planes . 619
Hoöevar, F. Ueber die Erweiterung eines geometrischen Lehrsatzes von Varignon 597
Hochheim, A. Al Kâfi fil Hisâb 3
Hofer, R. Modelle zur Demonstration der Reflexion 767
Hoffmann, J. C. V. 1) Determinanten oder nicht? 58
2) Neue Beiträge zu den Incorrectheiten 59
3) Erwiderung 77
Hoffmann, K. E. Ueber die Auflösung der trinomischen Gleichungen durch kettenbruchähnliche Algorithmen 75
Holst, E. Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions à des recherches purement géométriques 533
Holzmüller, G. Ueber die conforme Abbildung mittels ganzer und gebrochener Functionen 628
Hoppe, R. 1) Elemente der Determinantentheorie 106
2) Rationales Dreieck, dessen Seiten auf einander folgende ganze Zahlen sind 132
3) Bemerkung über trigonometrische Reihen 184
4) Ueber einige principielle Punkte der Infinitesimaltheorie 207
5) Excentrischer Kugelsector 216
6) Ueber die zweite Speciallösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung 264
7) Bemerkung betreffend die Auflösung eines Knotens in 4ter Dimension 411
8) Planimetrische Aufgabe 422
9) Lehrbuch der analytischen Geometrie 582
10) Ueber die Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel 582
11) Ueber Parallelen geschlossener Curven 582
12) Ueber dreifach gekrümmte Curven und deren Parallelen . . . 586
13) Elementarer Beweis für die Existenz eines Mittelpunktes gleichgerichteter Kräfte 657
14) Schwerpunkt eines Vielecks 658
15) Ueber die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze 672
16) Ueber die freie Bewegung eines Körpers ohne Einwirkung eines Kräftepaares 684
17) Potential der sphärischen Dreiecke 723
Houël, J. Cours de calcul infinitésimal 205
Hovestadt, H. Zur Krümmungstheorie 572
Howe, H. A. Three approximate solutions of Kepler's problem 673. 859
Hoza, F. Elemente der ebenen Geometrie 415
Humbert, G. 1) Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions 148. 332

Seite
Humbert, G. 2) Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques 148. 334
3) Sur l'équation hypergéométrique 261
4) Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme 334
Hummel, J. H. Evolution by subtraction 121
Hunyady, E. 1) Der Satz von Desargues über perspectivische Dreiecke 116. 457
2) Ueber die von Möbius gegebenen Kriterien in der Theorie der Kegelschnitte 468
3) Beitrag zur Theorie der Flächen zweiten Grades 503
Husmann. Ueber äquipotentiale Massenvertheilungen 719
Hyde, E. W. 1) Proof of a proposition in solid geometry 596
2) Mechanics by quaternions 654

Jadanza, N. Sulla latitudine, longitudine ed azimut dei punti di una rete trigonometrica 850
Jamin, J. 1) Sur la formule d'Ampère 786
2) Compléments à la théorie de la rosée 846
Jeffery, H. M. 1) On plane and spherical curves of the fourth class with quadruple foci 566
2) On spherical curves of the third order with three single foci . 610
Jenkins, J. S. Solution of a question 478
Jenkins, M. Solution of a question 657
Jeřábek, V. 1) Zur Theorie der confocalen Kegelschnitte 475
2) Beitrag zur Ellipse, nebst Anmerkung 476
3) Ueber den geometrischen Ort des Centrums der Collineation zwischen einer Nichtregelfläche zweiter Ordnung und einem System von Kugelflächen 510
Jettmar, H. v. Ueber das Metacentrum 664
Igel, B. 1) Wann ist eine binäre Form m^{ter} Ordnung Theiler einer binären Form n^{ter} Ordnung? 94
2) Zur Theorie der Determinanten 109
Imchénetzky, V. G. Détermination en fonction des coordonnées de la force qui fait mouvoir un point matériel sur une section conique 677
Ingalls, J. M. Curves of pursuit 568
Johnson, W. W. Solutions of questions 122. 433
Jolmen, P. Schwerpunkt des Vierecks 658
Jordan, C. 1) Sur la réduction des substitutions linéaires 105
2) Sur l'équivalence des formes 145
Jordan, W. 1) Elementare Begründung des Fundamentalsatzes über die geodätische Linie auf einer Umdrehungsfläche 853
2) Ueber die günstigste Seitengleichung im Viereck 854
Joubert, J. Sur la loi des machines magnéto-électriques 804
Israel, C. Ueber die theoretisch möglichen Fälle der Polhöhenbestimmung 867
Juel, C. En geometrisk Fremstilling af Hovedegenskaber ved Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit 514
Julius, V. A. Beschouwingen over de grondslagen der natuurkunde 52
Jung, G. 1) Statica grafica 164
2) Soluzione geomeccanica di alcune problemi d'interpolazione . . 660
Jung, W. 1) Ein neuer Kettenbruch für π 149
2) Bemerkungen über die Bernoulli'schen Zahlen 196
3) Zur Theorie der Kegelschnitte 549
4) Zur Theorie der Rotationsflächen 569

Seite

Kantor, S. 1) Geometrische Untersuchungen 419
2) Metrische Formel für das Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten 478
3) Ueber gewisse Curvenbüschel dritter und vierter Ordnung . . . 488
4) Ueber cyklische Gruppen in der quadratischen und Cremona'schen Transformation 623
5) Ueber successive lineare Transformationen 623
6) Sur les transformations linéaires successives dans le même espace de r dimensions 623
7) Zur Theorie der successiven quadratischen Transformationen in der Ebene 623

Kapteyn, W. 1) Neuer Beweis 218
2) Théorème de géométrie plane 639

Karlinski, F. Berechnungsmethode der Coefficienten in der bei den meteorologischen Untersuchungen gebrauchten Bessel'schen Formel 196

Kealy, J. A. Solutions of questions 170. 424

Keller, J. Die einander doppelt conjugirten Elemente in reciproken Systemen 456

Kessler, F. Beiträge zur Geometrie des Zirkels 459

Ketteler, E. 1) Theorie der absorbirenden anisotropen Mittel . . 758
2) Das Dispersionsgesetz 758
3) Constructionen zur anomalen Dispersion 760
4) Zur Vervollständigung der Reflexion 760
5) Theorie der Interferenzerscheinungen 772

Kjeldgaard, A. En tilnärmelsesvis Beregning af de reelle Rödder i Ligningen $x^n + px + q = 0$ 76

Kilbinger, G. Problem der homologen Kreise in collinearen Räumen 492

Killing, W. 1) Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie . . . 405
2) Die Rechnung in den nicht-Euklidischen Raumformen 406

King, G. Notes on the practical application of Mr. Makeham's formula to the graduation of mortality tables 167

Kirchhoff, G. 1) Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit 699
2) Versuche über stehende Schwingungen des Wassers 699
3) Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt 731
4) Bemerkung zu einer Arbeit des H. W. Voigt 744
5) Ueber die Messung elektrischer Leitungsfähigkeiten 791
6) Leitungsfähigkeit des Eisens 839

Kirkman, T. P. Solution of a question 154

Kirsten. Beitrag zu den Untersuchungen im Gebiete des logarithmischen Potentials 718

Kitchin, J. L. Solutions of questions 82. 154. 155. 417. 564

Kleiber. Ableitung eines Systems von Formeln für die elliptischen Functionen 356

Klein, F. 1) Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung 351
2) Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen 365
3) On the transformation of elliptic functions 365
4) Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Functionen 367
5) Ueber die geometrische Definition der Projectivität auf den Grundgebilden erster Stufe 447

Klempt, D. A. Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra 60

Kneser, A. Ueber atmosphärische Schallstrahlenbrechung 742

Kniseley. Solutions of questions 82. 139

Knowles, R. Solutions of questions 562. 563. 564. 567

Seite
Köhler, C. Ueber die Integration 211
König, J. Ueber Reihenentwickelung nach Bessel'schen Functionen 408
Königs, G. Propriété des courbes ou des surfaces du second ordre homofocales 505
Königsberger, L. 1) Ueber algebraisch-logarithmische Integrale nicht homogener linearer Differentialgleichungen 237
2) Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen von Differentialgleichungen 237
3) Erweiterung des Abel'schen Theorems 319
4) Allgemeine Bemerkungen zum Abel'schen Theorem 320
5) Erweiterung eines Abel'schen Satzes 322
6) Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf niedere Integralformen 370
Kohn, G. Ueber algebraische Raumcurven 597
Korkine, A. Sur l'impossibilité d'une relation algébrique 134
Korteweg, D. J. 1) Oplossingen der vraagstukken vorkomende in Briot et Bouquet „Leçons de géométrie analytique" 548
2) Zur Theorie der elektrischen Kräfte 782
3) Ueber das ponderomotorische Elementargesetz 782. 783
4) Ueber die Veränderung der Form und des Volumens diëlektrischer Körper 788
Krammer, G. Ueber zwei in einer Ebene liegende Curven zweiter Ordnung 559
Krankenhagen. 1) Transformationen zweier Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 275
2) Zur Theorie der partiellen linearen Differentialgleichungen . . . 286
Krause, M. 1) Ueber die Transformation fünften Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 375
2) Ueber die lineare Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 375
3) Ueber die Multiplication der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 376
Krey, H. Ueber Hermite's Auflösung der Gleichung fünften Grades 81
Kröber. Ueber die Aehnlichkeitspunkte der Kugeln einer Dupin'schen Kugelschaar 510
Kröhncke, G. H. A. Handbuch zum Abstecken von Curven . . . 442
Kronecker, L. 1) Ueber die Irreductibilität von Gleichungen . . 65
2) Ueber die symmetrischen Functionen 117
3) Ueber den vierten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste 123
4) Sur la loi de réciprocité 123
5) Ueber die Potenzen gewisser complexer Zahlen 125
Krummbiegel, R. Das Problema bovinum des Archimedes . . . 30
Krumme. Lehrsätze für Rechnen, Mathematik und geometrisches Zeichnen 58
Küttner, W. Zur mathematischen Statistik 166
Kuhn, M. Modelle zur Demonstration der Reflexion 767
Kummell, C. H. 1) Proof of some remarquable relations in the method of least squares 162
2) Solution of a problem 855
Kummer, E. Ueber die cubischen und biquadratischen Gleichungen 79
Kunerth, A. Berechnung der ganzzahligen Wurzeln unbestimmter quadratischer Gleichungen 132
Kurz, A. Aus der Schulmappe 873
Kutter, W. K. Die neuesten Formeln für die Bewegung des Wassers 713

Seite

Ladd, Ch. 1) On De Morgan's extension of the algebraical processes 45
2) Solutions of questions 154. 170. 567
3) The nine-line conic 475

Lagrange, C. Recherches sur l'influence de la forme des masses dans le cas d'une loi quelconque d'attraction 724

Laguerre, E. 1) Sur quelques propriétés des équations algébriques qui ont toutes leurs racines réelles 68
2) Théorèmes généraux sur les équations algébriques 69
3) Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation 69
4) Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique 71
5) Sur la détermination d'équations numériques ayant un nombre donné de racines imaginaires 72
6) Sur la réduction en fractions continues 148
7) Remarques sur les équations différentielles linéaires du second ordre 266
8) Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynôme entier 332
9) Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels 332
10) Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$ 332
11) Sur quelques théorèmes de M. Hermite 335
12) Sur les équations algébriques dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre 336
13) Sur la fonction exponentielle 344
14) Sur l'approximation des fonctions circulaires au moyen de fonctions algébriques 345
15) Sur une propriété des polynômes X_n de Legendre 396
16) Sur la géométrie de direction 445
17) Sur les coniques qui passent par trois points et ont un double contact avec un cercle donné 561

Laisant, A. 1) G. Bellavitis 15
2) Remarques sur les fonctions 1^x et $(-1)^x$ 344

Lamb, H. Note on a theorem relating to quadratic expressions . . 344

Landré, C. L. 1) Eene stelling omtrent determinanten 115
2) By de sommatie formule van Euler 175
3) Over de perspectief van den bol 441

Landry. Décomposition de $2^{64}+1$ 121

Lang, V. v. Bemerkungen zu Cauchy's Theorie der Doppelbrechung 749

Lannes. Solutions de questions 420. 564

Laplace. Oeuvres complètes 635

Laquière, M. 1) Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier 154
2) Note sur deux problèmes de probabilité 171
3) Théorie géométrique des courbes anallagmatiques 517

Laske, C. Messungen über das Mitschwingen für den Fall starker Dämpfung 803

Lasseur, Le. Autres décompositions 121

Laurent, H. 1) Correspondance 70
2) Sur la théorie des équations différentielles ordinaires 238
3) Théorie élémentaire des fonctions elliptiques 348
4) Réduction des polynômes au 2ième degré 598

Laussedat. Discours prononcé aux funérailles de M. Chasles . . 15

Seite
Lazarski. 1) Studien über verschiedene Probleme der darstellenden und neueren Geometrie 438
2) Linearperspective 438
Léauté, H. 1) Développement d'une fonction à une seule variable 330
2) Note sur le calcul approché par la méthode de Poncelet . . . 342
3) Sur l'établissement des équations données par M. Résal pour présenter le mouvement d'une courbe funiculaire plane 683
4) Équations des petites oscillations d'un fil inextensible en mouvement dans l'espace 683
5) Détermination des torsions moyennes développées aux extrémités d'une corde pesante oscillante autour d'une position de repos apparent 683
6) Recherche du coefficient de régularité du mouvement dans les transmissions par câbles 689
7) Règles pratiques pour l'établissement des transmissions télodynamiques 689
Lecornu. Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles 729
Lederer, M. 1) Ueber eine Auflösung einer biquadratischen Gleichung 81
2) Einige neue Beziehungen im regulären Zwölfeck 421
Leféburе. Sur la résolution de l'équation $x^n+y^n=z^n$ en nombres entiers 134
Legebeke, G. J. 1) Quelques propriétés générales d'une couche matérielle qui a le même potentiel qu'une masse donnée . . . 721
2) Ueber einen allgemeinen Satz von Clausius 787
Legoux, A. Sur les trajectoires d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale 676
Lehmann, E. Ueber die Einwirkung ruhender und rotirender Kugelflächen 786
Lehmann-Filhés. 1) Schreiben an den Herausgeber der Astr. Nachrichten 861
2) Bestimmung des Radiationspunktes eines Sternschnuppenschwarms 865
3) Ueber die Vertheilung der Radiationspunkte an der Himmelskugel 866
Leinekugel, A. Solutions de questions 420. 437
Leithold, R. Solution of a question 660
Lemoine, E. Quelques théorèmes sur les tétraèdres dont les arêtes opposées sont égales deux à deux 436
Lengauer. Zum Beweise des Cayley'schen Satzes von den symmetralen Determinanten 112
Lépinay, A. M. de. Sur un lieu géométrique 555
Leudesdorf, C. Solution of a question 170
Lévy, L. Sur un théorème de M. Laguerre 70
Lie, S. 1) Theorie der Transformationsgruppen 292
2) Résumé einer Integrationstheorie 293
3) Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation 573
4) Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung . . . 576. 577. 578
Lieber. Solution d'une question 478
Ligowski, W. 1) Zurückführung der vollständigen Gleichung vierten Grades auf eine reciproke Gleichung zweiten Grades . . . 80
2) Bestimmung der Summe Σx^r 191
3) Directe Bestimmung eines Integrals 219
Lindelöff, L. Bidrag till läran om determinanter 107

Seite

Lindemann. Directe trigonometrische Berechnung der Aufgabe der unzugänglichen Distanz 856
Lindemann, F. Untersuchungen über den Riemann-Roch'-schen Satz 323
Lionnet, M. Note relative aux intersections intérieures des diagonales d'un polygone convexe 153
Liouville, J. Leçons sur les fonctions doublement périodiques . 347
Lipschitz, R. Principes d'un calcul algébrique 303
Lissençon, J. Solution d'une question 139
Lommel, E. 1) Zur Theorie der Bessel'schen Functionen . . 398. 773
2) Ueber Fluorescenz 772
Longchamps, G. de. 1) Théorème d'algèbre 73
2) Sur les intégrales eulériennes de seconde espèce 224
3) Sur le centre de rayon de courbure en un point d'une conique 472
Lopes, C. H. C. Solution d'un problème de géométrie élémentaire 423
Lorentz, H. A. 1) Beziehungen zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts und der Körperdichte 753
2) De bewegingsvergelijkingen der gassen 814
Lorenz, L. Ueber die Refractionsconstante 767
Lorenz, N. v. Nachtrag zu einer Dreiecksaufgabe 418
Lorenzoni, G. 1) Un facsimile di alcune lettere inedite di Lagrange 13
2) Sul luogo sferico dei punti nei quali è minima la variazione dell'azimut rispetto al tempo 867
3) Sulla determinazione delle coordinate angolari mediante gli strumenti astronomici 868
Loudon, J. Notes on relative motion 667
Lowry, W. H. Solutions of questions 77. 155
Lucas, E. 1) Sur un théorème de M. Laguerre 70
2) Sur l'extension du théorème de Descartes 71
3) Sur les fonctions cyclotomiques 129
4) Sur un théorème d'Euler 131
5) Théorèmes généraux sur l'impossibilité des équations cubiques indéterminées 131
6) Sur les cas d'impossibilité d'une certaine équation indéterminée 132
7) Sur un problème de Diophante 133
8) Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern, concernant les nombres de Bernoulli 194
9) Sur la construction des normales à l'ellipse 553
10) Sur un théorème de M. Chasles 559
11) Sur trois coniques confocales deux à deux 560
Lucas, F. Géométrie des polynômes 626
Lüroth, J. Ein Problem der Fehlertheorie 156
Luke, A. Ableitung der Poisson'schen Differentialgleichung für die Potentialfunction für rechtwinklige, krummlinige Coordinaten . 715

Macdonald, W. J. Solution of a question 170
Macnie, J. Introduction to differentiation 208
McAlister, D. On the law of the geometric mean in the theory of errors 156
McClintock, E. Note on a theorem for expanding functions of functions 330
McColl, H. 1) Calculus of equivalent statements 45
2) Solution of a question 170
Mckenzie, J. Erreurs dans les tables mathématiques 871
McMurchy, A. Solutions of questions 437. 738

Seite
Maggi, G. A. 1) Sulla storia delle funzioni cilindriche 34
2) Sopra un problema di elettrostatica 788
Mahler, Ed. Das Erzeugnis zweier gewisser Systeme von Kegelschnitten, die mit einander projectivisch sind 561
Mailly, E. Notice sur E. Quetelet 14
Maiss, E. Graphische Methode zur Erklärung des Kern- und Halbschattens 746
Malagola, C. Der Aufenthalt des Coppernicus in Bologna 9
Malet, J. C. On a limit to the number of curves belonging to a plane curve of any order 529
Maleyx, L. Sur l'évaluation de certains volumes 436
Mannheim, A. 1) Cours de géométrie descriptive 636
2) Construction de la normale à la surface de Glaisher 650
3) La surface de l'onde considérée comme surface limite 650
4) Nouvelle génération de la surface de l'onde 652
Mansion, P. 1) Toute équation algébrique a une racine 63
2) Démonstration d'une relation 206
3) Dérivées des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire . 206
4) Intégration d'une équation différentielle d'Abel 271
5) Rapports sur des mémoires de MM. Gilbert, Turquan et Carnoy 283. 289. 469
6) Sur l'expression du rayon de courbure de la section normale d'une surface 572
Marek. Ueber approximative trigonometrische Berechnungen . . 853
Margules, M. 1) Ueber discrete Wirbelfäden 698
2) Ueber die Rotation einer Flüssigkeit in einem rechtwinkligen vierseitigen Prisma 696
Markoff, A. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies . . . 143
Marre, A. 1) Dos reglas de la aritmética de los Indos 1
2) Deux nouvelles lettres mathématiques inédites du P. Jaquemet de l'Oratoire 9
3) Extrait d'un manuscript 31
Martin, A. Solutions of questions 172. 738
Martus, H. C. E. Astronomische Geographie 856
Marx. Ueber einige geometrische Oerter 475
Marx, W. Synthetischer Nachweis des Euler'schen Satzes über Krümmungsradien 473
Masi, F. Dei giunti derivati del quadrilatero sferico 654
Mathieu, E. 1) Sur les intégrations relatives à l'équilibre d'élasticité 731
2) Sur l'équilibre d'élasticité d'un prisme rectangle 732
3) Réflexions sur les principes mathématiques de l'électrodynamique 781
Matthiessen, L. Ueber die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren der Satelliten der Erde und des Jupiter 661
Matz. Solutions of questions 155. 164. 170. 172. 687. 738
Maximowitch, W. de. Conditions pour que les constantes arbitraires d'une expression générale soient distinctes entre elles 338
Mayer, A. 1) Zur Pfaff'schen Lösung des Pfaff'schen Problems . 279
2) Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen 666
Mayer, E. Ueber Küstenaufnahmen 856
Mayer, J. Zur Trisection des Winkels 563
Maynz, A. Einige Lehrsätze aus der analytischen Geometrie . . . 598
Mees, R. A. De voortplanting van vlakke geluidsgolven in gassen 741

Seite

Mehmke, R. Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise 460
Meissel, E. 1) Merkwürdige Eigenschaft des Integrals einer gegewissen Gleichung 275
2) Beiträge zur Sphärik 365
3) Lösung einer Classe von Aufgaben der Sphärik 431
Mensbrugghe, G. v. d. 1) Rapport sur un mémoire de M. C. Lagrange 724
2) Sur l'application du second principe de la thermodynamique aux variations d'énergie potentielle des surfaces liquides 812
3) Du rôle de la surface libre de l'eau 812
4) Voyages et métamorphoses d'une gouttelette d'eau 812
Méray, Ch. Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles 283
Mercadier, E. Sur la détermination des éléments d'un mouvement vibratoire 740
Mertens, F. 1) Ueber die Bedingungen der algebraischen Theilbarkeit eines ganzen Ausdruckes von n^2 willkürlichen Elementen durch die Determinante der letzteren 109
2) Zur Theorie der symmetrischen Functionen 118
3) Zur Lehre von den quadratischen Formen mit positiver Determinante 140
4) Zwei Berührungsaufgaben 600
Meyer, O. E. Ueber eine veränderte Form eines Beweises für das Maxwell'sche Gesetz 813
Michaelis, G. J. Over het beginsel van het behoud der energie . 669
Milinowski, A. Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung 480. 514
Miller, A. Einige neue Beziehungen im regulären Zehneck . . . 421
Miller, Th. Fire insurance 169
Miller, W. J. C. Solutions of questions 420. 424. 660
Millosewich, E. Riflessioni sulla navigazione astronomica 858
Mittag-Leffler, G. 1) Sur la théorie des équations différentielles linéaires 245
2) Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques 257
3) Sur les équations différentielles linéaires du second ordre . . . 258
4) Funktions teoretiska studier 312
5) Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce . 361
Mohn, H. Étude sur les mouvements de l'atmosphère 709
Moncourt. Solution of a question 660
Monro, J. C. Solutions of questions 164. 170. 172. 657. 687
Monteiro, A. Sch. 1) Solution d'un problème au moyen de la méthode des équipollences 424
2) Sur l'aire latérale et le volume d'un coin conique 433
3) Recherche sur le cercle variable assujetti à couper continuellement deux cercles donnés sous des angles donnés 463
Morera, G. 1) Sopra una nuova costruzione geometrica del teorema dell' addizione degli integrali ellittici 355
2) Sul moto di un punto attratto da due centri fissi colla legge di Newton 676
Moret-Blanc. 1) Solutions de questions . . . 139. 186. 437. 478. 563
2) Questions proposées par M. H. Faure 601
Morgan, C. Solution of a question 437
Morley, T. Solution of a question 564
Moutard. Sur le contact des coniques et des surfaces 596

Seite

Müller. Eine neue Ableitung des Additionstheorems für elliptische Integrale 354
Müller, C. Ueber barytrope und tautobaryde Curven 680
Mukhopadhyay, A. Proof of Euclid I. 25 417
Murphy, H. Solutions of questions 420. 478. 564
Myjkowski. Lösung von zwei Aufgaben aus der analytischen Geometrie 532

Nagel, A. Mittheilungen aus dem Gebiet der Geodäsie 856
Narducci, E. Notizie ad un opera del Conte G. M. Mazzuchelli . 12
Nash. Solutions of questions 164. 218. 564
Netto, E. Zur Theorie der Discriminanten 60
Neuberg, J. 1) Sur le nombre des sphères qui touchent quatre plans donnés 435
2) Sur les normales à l'ellipse 553
Neumann, C. 1) Neue Sätze über das logarithmische und Newton'sche Potential 715
2) Die Principien der Elektrodynamik 777
Neumayr, P. E. Ueber die Begründung der projectiven Beziehung der reellen Elemente zweier Grundgebilde erster Stufe in der reinen Geometrie 491
Newcomb, S. A method of developing the perturbative function of planetary motion 861
Niemöller, F. 1) Formeln zur numerischen Berechnung des allgemeinen Integrals der Bessel'schen Differentialgleichung 397
2) Ueber die Schwingungen einer Saite, deren Spannung eine stetige Function der Zeit ist 743
3) Deformation eines elastischen geknickten Stromleiters unter Einwirkung des Erdmagnetismus 801
Niewenglowski. Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima. 619
Niven, C. 1) On the vector potential 798
2) On the conduction of heat in ellipsoids of revolution 836
Niven, W. D. 1) On the potential at any point of space due to a solid sphere 723
2) Application of Lamé's coordinates 788
Nöggerath, E. Ueber den Schwerpunkt des Vierecks 658
Nöther, M. 1) Ueber eine Classe symmetrischer Determinanten . 112
2) Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen . . 323
3) Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten 389
Nordmann. Ueber eine Art der Centralbewegung, welche die Planetenbewegung als Specialfall einschliesst 672. 856

Oberbeck, A. Strömungen von Flüssigkeiten in Folge ungleicher Temperatur innerhalb derselben 847
Ocagne, M. d'. 1) Remarque sur un problème d'analyse combinatoire 158
2) Démonstrations de théorèmes 419
3) Applications de géométrie cinématique 645
4) Sur la composition des forces dans le plan 655
Oehler, E. Beitrag zur mechanischen Theorie der Wärme 36
Openshaw, J. Solutions of questions 420. 478
Oppolzer, Th. v. Bestimmung grosser wahrer Anomalien in parabolischen Bahnen 869
O'Regan, J. Solutions of questions 77. 420. 478
Ovidio, E. d'. 1) La relazione fra gli otto invarianti fondamentali di due forme binarie biquadratiche 91

Seite

Ovidio, E. d'. 2) Sopra due covarianti simultanei di due forme binarie biquadratiche 91
3) Il resultante di due forme binarie biquadratiche espresso mediante i loro invarianti fondamentali 91
4) Nota sui covarianti lineari fondamentali di due cubiche binarie 92
5) Nota sulle forme binarie del 5° ordine 93

Paci, E. Sulle posizioni geografiche 851
Paci, P. Sopra una trasformazione delle equazioni fondamentali della idrodinamica 692
Paige, C. Le. 1) Note sur certains covariants des formes algébriques binaires 89
2) Sur la représentation géométrique des covariants d'une forme biquadratique 90. 541
3) Sur l'élimination 104
4) Sur les déterminants bordés 110
5) Sur quelques propriétés des déterminants 110
6) Rapport sur un mémoire de M. Carnoy 469
7) Ueber eine Relation zwischen den singulären Elementen cubischer Involutionen 484
8) Ueber cubische Involutionen 511
9) Mémoire sur les courbes du 3me ordre 545
Panek, A. 1) Ueber die Berechnung der Dreiecksfläche aus den Seitenlängen 418
2) Zur Lehre vom Viereck 420
Pasch, M. 1) Ein algebraischer Satz 105
2) Ueber gewisse Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen 115
Pazienti, A. Considerazioni generali intorno alla termodinamica . 812
Pechüle. Dérivation de certaines formules de réduction 868
Pegado, L. P. M. Théorie générale des combinaisons avec répétitions 152
Peiper, R. Fortolfi Rythmimachia 32
Peirce, D. S. On the algebra of logic 41
Pellet, A. E. 1) Sur une classe d'équations 66
2) Sur les fonctions linéaires 67
3) Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier . . . 129
4) Sur les intégrales de fonctions algébriques 212
Pelz, C. 1) Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie 438
2) Zur Construction der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Flächen zweiten Grades 441
3) Zur Construction der Schnittpunkte von Geraden mit Kegelschnitten 468
4) Die Krümmungshalbmesser-Constructionen der Kegelschnitte als Corollarien eines Steiner'schen Satzes 473
5) Ueber die Focalcurven des Quetelet 512
Pepin, Th. 1) Sur les lois de réciprocité relatives aux résidus des puissances 122
2) Démonstration d'un théorème de M. Sylvester 129
3) Nouveaux théorèmes sur une certaine équation indéterminée . . 131
4) Sur diverses tentatives de démonstration du théorème de Fermat 134
5) Sur quelques équations biquadratiques et indéterminées 136
6) Sur la réduction d'une formule biquadratique à un carré . . . 136
7) Nouvelles formules pour réduire à un carré la valeur d'un polynôme rationnel du 4me degré 136

Seite
Pepin, Th. 8) Sur quelques équations indéterminées du second degré et du quatrième 137
9) Solution d'un problème de Frénicle 139
10) Composition des formes quadratiques binaires 143
Percin, A. Note sur une application de la loi de probabilité du tir 165
Périssé, S. Des causes qui tendent à gauchir les poutres de pont à fer 737
Peschka. 1) Normalenflächen längs ebener Flächenschnitte . . . 509
2) Zur Theorie der Normalenflächen 526
Petersen, J. 1) Om binäre Formers Kovarianter 90
2) Die Steiner'sche Lösung der Malfatti'schen Aufgabe 461
Pfannstiel, O. Methode, die Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus zu bestimmen 809
Pfaundler, L. Ueber die Berechnung der Temperaturcorrection bei calorimetrischen Messungen 834
Philipps. De la compensation des températures dans les chronomètres 688
Picard, E. 1) Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques 256
2) Sur une classe d'équations différentielles linéaires 257
3) Sur certaines équations différentielles linéaires du second ordre 263
4) Sur les équations linéaires simultanées 273
5) Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable, liées par une relation algébrique 326
6) Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable et sur une classe d'équations différentielles 326
7) Sur les fonctions entières 327
8) Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes . 328
9) Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques 328
10) Sur une propriété des fonctions et des courbes algébriques . . 534
11) Sur l'équation aux dérivées partielles du potentiel 715
Picart, A. Sur l'attraction des ellipsoïdes 720
Pick, A. J. Elementare Ableitung der Formel für die östliche Abweichung frei fallender Körper 671
Pick, G. Grundzüge einer Theorie von einer Classe Abel'scher Integrale 379
Pictet, R. Équation donnant la relation qui existe pour tous les liquides entre leur température et la tension maximum de leurs vapeurs à cette température 825
Pillai, C. K. Solution of a question 564
Pincherle, S. 1) Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. Weierstrass . . . 307
2) Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome 308. 349
Pisani, F. Solution d'une question 137
Poincaré, H. 1) Sur les formes cubiques ternaires 144
2) Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire 144
3) Sur les courbes définies par une équation différentielle 568
Polignac, De. Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications 409
Pollexfen, H. Solution of a question 139
Presson, E. Solution d'une question 478
Provenzali, P. F. S. Sulla conservazione del moto 806

Seite
Ptaszycki, J. Extrait d'une lettre à M. C. Neumann 372
Pujet, A. Sur la fonction résolvante de l'équation trinomiale . . . 74

Radau, R. 1) Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur d'une intégrale définie 229
2) Sur les formules de quadrature à coefficients égaux 230
3) Remarques sur la formule de quadrature de Gauss 230
4) Sur la réfraction de Bessel 866
Radicke, A. 1) Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen 193
2) Zur Theorie der Euler'schen Zahlen 193
3) Démonstration du théorème de Staudt et de Clausen 194
4) Démonstration d'un théorème de Stern 194
Rawson, R. Solutions of questions 80. 564
Rayleigh, Lord. 1) On the stability or instability of certain fluid motions 711
2) Investigation in optics 769
3) On the minimum aberration of a lens for parallel rays 769
4) On reflexion of vibrations at the confines of two media 770
Razzaboni, C. Sul moto dell' acqua per alvei a fondo orizzontale 713
Re, O. de **Rossi**. Intorno alla costruzione delle curve intercalari nelle superficie rappresentate per le lore linee di livello . . . 855
Réalis, S. 1) Correspondance 74
2) Sur quelques questions se rattachant au problème de Pell . . 133
Recknagel, G. Ueber Luftwiderstand 710
Řehořowský, W. Ueber developpable Flächen 569
Rembach. Linearperspective 438
Résal, H. 1) Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite 589
2) Note sur les différentes branches de la cinématique 636
3) Sur quelques théorèmes de cinématique 641
4) Théorie élémentaire des brachistochrones 679
5) Du problème inverse du mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution 681
6) De l'influence de la température et de l'élasticité sur les câbles des ponts suspendus 737
7) Astronomie nautique 858
Réthy, M. 1) Zur Theorie der Reflexion und Brechung 763
2) Polarisation des gebeugten Lichtes 770
Ribaucour, A. Sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères 463
Ricart, L. C. y. 1) Applicacion de las determinantes à lar esolucion de las ecuaciones de cuarto grado 117
2) Applicaciones de las determinantes à la trigonometria 117
Ricordi, E. I circoli nella geometria non-euclidea 407
Riecke, E. 1) Ueber die elektrischen Elementargesetze 785
2) Ueber die unipolare Induction 801
Righi, A. Contribuzioni alla teoria della magnetizzazione dell' acciaio 809
Ritter, A. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre . . . 828
Ritter, F. À propos d'une lettre de Fermat 11
Robaglia. Solution d'une question 564
Roberts, J. A useful theorem in the theory of attractions 719
Roberts, S. 1) Note on a problem of Fibonacci's 130

Seite
Roberts, S. 2) Note on the integral solution of $x^3-2Py^3=-z^3$ or $\pm 2z^3$ in certain cases . . . 130
3) Additional note on the impossibility of the general extension of Euler's theorem . . . 133
4) On certain series . . . 190
Roberts, W. R. 1) On the periods of the first class of hyperelliptic integrals . . . 374
2) On the satellite of a line meeting a cubic . . . 609
Rochetti, M. Solutions de qüestions . . . 138. 139
Rodet, L. Le Souan-pan des Chinois . . . 8
Röllner, F. 1) Ueber einfach und mehrfach zusammenhängende Polyederflächen . . . 413
2) Ueber Reflexe auf Kreisen . . . 441
Roger, E. Théorie des phénomènes capillaires . . . 739
Rolland. Discours prononcé aux funérailles de M. Chasles . . . 15
Romilly, W. de. Note sur certaines équations différentielles . . . 295
Rosanes, J. Zur Theorie der Kegelschnitte . . . 545
Rosenthal, L. H. Solution d'une question . . . 478
Rosner, J. Ueber Wärmeleitung und die Methoden, das Wärmeleitungsvermögen zu bestimmen . . . 838
Roth, F. 1) Ueber die Zusammendrückbarkeit der Gase . . . 824
2) Erwiderung . . . 848
Rouché, E. Sur la machine pneumatique . . . 664
Routh, E. J. On functions analogous to Laplace's functions . . . 397
Rowe, R. C. Memoir on Abel's theorem . . . 322
Rowland, H. A. 1) On the motion of a perfect incompressible fluid when no solid bodies are present . . . 691
2) On the general equations of electro-magnetic action . . . 799
Rozé, C. Études de la chronométrie de la compensation . . . 686
Rüthnick, O. Ueber zwei auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegende Kegelschnitte . . . 603
Ruffini, F. P. Di alcune singolarità nei fasci e nelle rete di linee piane algebriche . . . 534
Russell, W. H. L. On the integration of differential equations . . . 277
Rutter, E. Solutions of questions . . . 420. 478. 660
Rysselberghe, F. v. Description d'un régulateur elliptique isochrone 687

Saalschütz. Der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft . . . 733
Sachse, A. 1) Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen 35. 336
2) Anzeige einer Schrift von H. P. du Bois-Reymond . . . 336
Sailer, E. Geometrische Aufgabe . . . 421
Saint-Germain, A. de. 1) Des courbes algébriques qui ont plusieurs axes de symétrie . . . 542
2) Sur le parallélogramme de Watt . . . 653
Saltel, L. Conférences de géométrie supérieure . . . 518
Salvert, de. Sur l'expression du rayon de courbure de la section normale d'une surface . . . 572
Sampson, C. H. Solution of a question . . . 562
Sanderson, T. J. Solution of a question . . . 170
Santomauro, E. Solution d'une question . . . 139
Saporetti, A. Metodo teorico pratico per iscoprire gl'istanti del nascere e tramontare della luna . . . 868
chäwen, v. Zur Lösung trinomischer Gleichungen . . . 76

Seite
Schaper, W. Aequipotentiale Vertheilung der magnetischen Fluida in cylindrischen Stahlstäben 808
Schapira, H. Mischnath Ha-Midoth 3
Schaposchnikoff, N. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1ter Ordnung 283
Scheibner, W. 1) Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in der Entwickelung einer beliebigen Potenz des Radiusvector nach der mittleren Anomalie 337. 338
2) Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form 350
Schell, W. Theorie der Bewegung und Kräfte 635
Scheller, F. E. Zur Behandlung der Linsentheorie 767
Schering, E. 1) Briefe von Lagrange 13
2) Briefe der S. Germain an Gauss 13
3) Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen 315
Schering, K. 1) Allgemeine Theorie der Dämpfung, welche ein Multiplicator auf einen Magnet ausübt 802
2) Neue Anordnung der Magnete eines Galvanometers 807
Schier, O. Zur Theorie der Potenzsummen 135
Schilling, C. Die Minimalfläche fünfter Classe 617
Schlegel, V. 1) Bemerkungen zu einem Aufsatze von Gilles . . . 54
2) Lehrbuch der elementaren Mathematik 414
Schlemüller, W. 1) Der Zusammenhang zwischen Höhenunterschied, Temperatur und Druck 827
2) Vier physikalische Abhandlungen 828
Schlömilch, O. 1) Ueber gewisse periodische Decimalbrüche . . 130
2) Zur Schuldentilgungs- und Rentenrechnung 165
3) Ueber den verallgemeinerten Taylor'schen Satz 174
4) Ueber den Quotienten zweier Gammafunctionen 221
5) Bemerkungen über den reciproken Werth der Gammafunctionen 222
6) Ueber eine Verwandte der Gammafunction 223
7) Nachschrift zu einer Arbeit von E. Schröder 225
8) Ueber das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel aus beliebig vielen positiven Zahlen 340
Schlosser. Vom Studirtische 421
Schmidt, C. Ueber die Eigenchaften des aus einer Quadratwurzel hervorgehenden Kettenbruches 145
Schmitz, A. Bemerkungen über die französische Methode zur Auflösung linearer Gleichungen 108
Schnack, G. Foreläsninger over grafisk Statik 659
Schönemann. Construction von Normalen und Normalebenen gewisser krummer Flächen und Linien 646
Schottky, F. Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln 383
Schoute, P. H. 1) Over het projecteeren op oppervlakken 494
2) Sur une transformation géométrique d'un problème de la théorie des enveloppes dites „courbes de sureté" 517
Schrader, W. Mathematisches Formelbuch 870
Schröder, E. 1) Ueber die Eigenschaften der Binomialcoefficienten, welche mit der Auflösung der trinomischen Gleichung zusammenhangen 74
2) Bestimmung des infinitären Werthes des Integrals $\int_0^1 (u)_n\, du$. 225
Schröter, H. Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurve dritter Ordnung 494

Seite
Schubert, H. 1) Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden 454
2) Réponse à des observations de M. Halphén 521
3) Sur l'évaluation du nombre des coniques faisant partie d'un système et satisfaisant à une condition simple 522
4) Ueber die ein-zweideutige Beziehung zwischen den Elementen einstufiger Grundgebilde 522
5) Ueber die Erhaltung des Geschlechtes bei zwei-eindeutig auf einander bezogenen Plancurven 524
6) Ueber dreipunktige Berührung von Curven 524
7) Anzahlgeometrische Behandlung des Dreiecks 525
8) Bemerkung zu der Bestimmung der Torsallinien einer Regelfläche 526
Schubring, G. Gleichgewicht einer Kette in einem besonderen Falle 659
Schumann, Ad. Ueber die Flächenräume und Bogenlängen, welche bei der Bewegung eines starren Systems von einer Geraden umschrieben werden 648
Schur, F. 1) Ueber den Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie 448
2) Ueber die gemeinsamen Tangenten zweier Flächen zweiten Grades, welche ein windschiefes Viereck gemein haben 505
3) Zur Theorie der Strahlencomplexe zweiten Grades 620
Schwarz, H. A. Essai d'une démonstration d'un théorème de géométrie 535
Schwering, K. 1) Ueber eine Art Curven, deren Bogen durch ein elliptisches oder hyperelliptisches Integral erster Gattung ausgedrückt wird 369
2) Ueber eine eigenthümliche Deformation der Kegelschnitte . . . 605
Scott, R. F. 1) Solutions of questions 77. 137. 424. 478. 564
2) A treatise on the theory of determinants 107
3) On cubic determinants 110
4) Note on a determinant theorem of Mr. Glaisher's 111
Seeliger, H. 1) Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über die Vertheilung zufälliger Fehler 158
2) Bemerkungen über die allgemeine Cauchy'sche Interpolationsmethode 159
Seewald, E. Ueber die gerade Pyramide 434
Seitz, E. B. Solutions of questions 164. 172. 433
Selby, A. L. Solutions de questions 420. 478
Sharp, J. C. Solution of a question 660
Sharp, W. J. C. 1) On some formulae in the theory of equations 62
2) Solutions of questions 154. 170. 189. 277. 567
3) On Fourier's theorem 184
Siacci, F. 1) Un teorema di meccanica analitica 285
2) Sopra una proposizione di Jacobi 286
3) Nota intorno ad una legge di reciprocità dinamica 667
Sidersky, D. Neuer Ellipsograph 442
Siebel, A. Untersuchungen über algebraische Gleichungen 73
Silva, J. A. M. da. Sur une formule du calcul intégral 345
Simonides, J. Ueber die Krümmung der Flächen 572
Simony, O. 1) Ueber jene Flächen, welche aus ringförmig geschlossenen, knotenfreien Bändern durch in sich selbst zurückkehrende Längsschnitte erzeugt werden 410
2) Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen einiger allgemeiner Sätze der Mechanik 668

Seite
Sinram, Th. Beitrag zu den Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades mit rationalen Wurzeln 78
Sluginoff, N. Folgerungen aus der mechanischen Theorie der Wärme 833
Smith, H. J. S. 1) On the kind of periodicity presented by some elliptic functions 361
2) On the distribution of circles on a sphere 434
3) On inverse figures in geometry 457
4) On skew surfaces of the third order 514
Sohncke, L. Neue Untersuchungen über die Newton'schen Ringe . 774
Sondat. Solution d'une question 138
Sonine, N. Recherches sur les fonctions cylindriques 400
Sorley, J. Observations on the graduation of mortality tables . . 167
Souchon, A. Sur un point de la théorie analytique du système du monde 862
Souillart. Théorie analytique des satellites de Jupiter 863
Sourander, E. Sur le discriminant de l'équation dont dépendent les inégalités séculaires des planètes 861
Sous, G. Phakomètre et optomètre 776
Spitzer, S. 1) Ueber lineare Differentialgleichungen 266
2) Construction einiger linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung 267
3) Integration einiger linearer Differentialgleichungen 267. 268
Sprague, Th. B. Explanation of a new formula for interpolation . 166
Stabenow, H. Solution of a question 218
Stahl, H. Zur Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems 376
Stearn, H. On some cases of the varying motion of a viscous fluid 703
Steck, F. X. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 869
Steen, A. Om Differentialligningers Integration ved bestemte Integraler 240
Stefan, J. Ueber die Tragkraft der Magnete 806
Steggall, J. E. A. Solutions of questions 170. 564. 567. 738
Steinschneider, M. Abraham Ibn Esra 5
Stéphanos, C. Sur la théorie des connexes conjugués 619
Stieltjes. Ueber einen elementaren Algorithmus 189
Stier, K. Ueber die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren und die Umdrehungsgeschwindigkeit einer flüssigen Masse bei gegebener Energie 662
Stoll. Ueber den Schwerpunkt des Vierecks 658
Stolz, O. 1) B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung 34
2) Bemerkung über einen Satz des Herrn Picard 330
Stone, O. A quasi proof of the arithmetical mean 155
Streintz, H. Beweis eines Satzes 721
Streissler, J. 1) Zur orthogonalen Axonometrie 439
2) Zur Transformation der Kegelschnitte 475
Stringham, W. J. 1) Regular figures in n-dimensional space . . . 405
2) On vector ratios considered as trigonometric functions of angles 426
Strnad, A. Ueber die Kegelfläche zweiten Grades 607
Studnička, F. J. 1) Notiz über einige Determinanten, in welchen Binomialcoefficienten als Elemente auftreten 113
2) Ueber eine neue Determinantentransformation 113
3) Ueber einen neuen Determinantensatz, nebst Bemerkung . . . 114
4) Ueber eine neue Formel der Combinatorik 152

Seite
Studnička, F. J. 5) Allgemeine algebraische Formenlehre 174
6) Notiz zur Polynomialformel 187
7) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 870
Sturm, R. Ueber die ebenen Curven dritter Ordnung 479
Sylvester, J. J. 1) Solutions of questions 82. 567. 872
2) On certain ternary cubic form equations 95
3) On an exact relation 104
4) Sur la loi de réciprocité dans la théorie des nombres 124
5) Sur les diviseurs des fonctions cyclotomiques 129
Symons, E. W. Solutions of questions 82. 564. 660
Szajkart. Kurzer Abriss der Mathematik 414

Tait, P. G. 1) Mathematical notes 154
2) On the colouring of maps 408
3) Note on the theorem of the geometry of position, with remarks 409
4) Solution of a question 409
5) On Minding's theorem 656
Talayrach. Extrait d'une lettre 460
Tanner, H. W. L. 1) On a generalization of Pfaff's problem . . . 281
2) On a general method of solving differential equations of the first order 284
3) On powers of functions of the form $\frac{ax+b}{cx+d}$ 340
Tanner, L. Solutions of questions 155. 218
Tannery, P. L'arithmétique des Grecs dans Pappus 28
Taylor, C. 1) On the history of geometrical continuity 35
2) On Gaskin and Plücker's properties of the orthocyle 460
3) On a section of Newton's Principia in relation to modern geometry 465
4) On Newton's organic description of curves 465
5) On the directrice of a parabola inscribed in a triangle 477
6) Tangential coordinates 549
7) Insigniores orbitae cometarum proprietates 816
Taylor, H. M. On the equation of the two planes which can be drawn through two given points to touch a quadric 602
Taylor, W. B. On the nature and origine of force 53
Tebay, S. Solutions of questions 170. 687
Teixeira, F. G. 1) Notice nécrologique de G. Bellavitis 15
2) Sur les principes du calcul infinitésimal 206
3) Sur les dérivées d'ordre quelconque 210
4) Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires du deuxième ordre 295
Terry, T. R. 1) Solutions of questions . . 82. 218. 562. 660. 687. 738
2) Notes on a class of definite integrals 220
Tesař. Der orthogonal-axonometrische Verkürzungskreis 439
Tetmajer, J. 1) Auflösungen der trinomischen Gleichungen . . . 75
2) Trigonometrische Auflösung binomischer Gleichungen 82
3) Eine neue Formel zur Integration durch Reihen 215
Thiele, T. N. 1) Analytiske Studier om den rene Mathematiks Principer 46
2) Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systématiques par la méthode des moindres carrés 160
3) En Konstruktion af Ellipsens Axer ved et Par konjugerte Diametre 477
Thomae, J. 1) Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen 306

Seite
Thomae, J. 2) Convergenz der Thetareihen 364
Thomson, F. D. Solution of a question 424
Thomson, J. J. On Maxwell's theory of light 752
Thomson, W. 1) On vortex statics 697
2) Vibrations of a columnar vortex 698
3) On gravitational oscillations of rotating water 711
Tilly, J. M. de. 1) Correspondance 162
2) Rapport sur un mémoire de M. Saltel 546
Tirelli, F. Solution of a question 478
Tissérand, F. 1) Sur le développement d'une fonction quelconque du rayon vecteur dans le mouvement elliptique 195
2) Sur des transcendantes qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des perturbations planétaires 394
3) Sur un développement particulier de la fonction perturbatrice . 860
Tissot, A. Sur la représentation des surfaces 632
Tomeš, F. 1) Ellipsenconstructionen 476
2) Das Sechseck mit eingeschriebenem und umschriebenem Kegelschnitt 477
Townsend. Solutions of questions 478. 564. 660. 687. 738
Trebitscher, M. Ueber Beziehungen zwischen Kegelschnittbüscheln und rationalen Curven dritter Classe 479
Trépied, Ch. Sur la méthode de Cauchy pour le développement de la fonction perturbatrice 860
Tresca. Discours prononcé aux funérailles de M. Morin 15
Tribulski, W. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 870
Trowbridge, D. On the quadrature of curves and the cubature of solids by means of infinite series 228
Tucker, R. Solution of a question 417
Tumlirz, O. Fortpflanzung von Kugel- und Cylinderwellen endlicher Schwingungsweiten 692. 741
Turazza, D. Delle formole più appropriate pel calcolo degli scoli delle basse pianure 713
Turner, H. H. On the curves represented by the equation $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$ and their envelopes . 356
Turquan, L. V. 1) Intégration d'un nombre quelconque d'équations simultanées 289
2) Intégration d'un système particulier de deux équations simultanées 289
Turriff, G. Solutions of questions 564. 567
Turrill, J. H. Solution of a question 77

Ungar, M. Grundzüge einer Theorie von einer Classe Abel'scher Integrale 379

Vaněček, J. S. 1) Ueber die Verschiebung geometrischer Gebilde 457
2) Schiebung eines Winkels in seiner Ebene 563
Venant, de St.-. Sur celle des déformations des corps soit élastiques, soit plastiques, soit fluides 728
Vénard, Ch. Sur une règle de M. Laguerre 70
Venn, J. 1) On the various notations adopted for expressing the common propositions of logic 44
2) On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions 45
Ventéjol. Correspondance 103

Seite

Veronese, G. Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e di superficie di 2° ordine 502
Vietor, A. Die Polarkreispaare einer Cykloide 567
Villarceau, Y. 1) Sur l'intégration des équations linéaires, au moyen des sinus des ordres supérieurs 261
2) Application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires 345
3) Note sur la théorie des sinus des ordres supérieurs 345
4) Sur les régulateurs à ailettes 687
Viry, C. Méthode synthétique rapide pour établir les formules fondamentales relatives aux changements d'état 831
Vogler, Ch. A. Erwiderung auf einige Fragen des H. Lalanne . . 871
Voigt, W. 1) Theorie des leuchtenden Punktes 744
2) Zur Fresnel'schen Theorie der Diffraction 747
Volkmann, P. Ueber den Einfluss der Krümmung der Wand auf die Constanten der Capillarität bei benetzenden Flüssigkeiten . 740
Voss, A. 1) Geometrische Interpretation einer Differentialgleichung 278
2) Zur Untersuchung der Fläche der Centra 528
3) Zur Theorie des Riemann'schen Krümmungsmasses 570
4) Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke 570

Waals, J. D. v. d. 1) Eenige opmerkningar naar aanleiding van de algemeene theorie der ponderomotorische krachten van D. J. Korteweg 783
2) Onderzäkningen omtrent de overeenstemmende eigenschappen der normale verzadegden damp- en vloeistof-lijnen 821
3) Over de coefficienter van uitrekting 821
4) De betrekking tuschen spanning, volumen en temperatuur bij dissociatie 834
Wagner, F. Grundträk af Ligerägtstlären og deres Anvendelse paa Byggearbejder 659
Wagner, G. Ueber geometrische Constructionsaufgaben 417
Walker, J. J. 1) On theorems in the calculus of operations . . . 339
2) Solutions of questions 564. 567. 598. 660. 687. 738
Wallentin, J. G. Zur elementaren Ableitung der allgemeinen Gleichungen der oscillatorischen Bewegung 678
Walter, A. Theoretische Bestimmung der Gesetze, wonach bei vollkommenen Gasen die Molecularsphären etc. von der Temperatur abhängen 813
Wangerin, A. Ueber die Newton'schen Ringe 774
Warburg, E. Ueber die Torsion 734
Warren, J. W. Elementary investigation of Legendre's theorem concerning the attraction of an ellipsoid on an external point . 721
Wassilieff, A. Ueber rationale den doppelt-periodischen analoge Functionen 326
Webb, R. R. 1) Some applications of a theorem in solid geometry 573
2) The brachistochrone problem of a system 679
Weber, H. F. 1) Die wahre Theorie der Fresnel'schen Interferenzerscheinungen 774
2) Beziehung zwischen dem Wärmeleitungsvermögen und dem elektrischen Leitungsvermögen der Metalle 793
3) Ueber die Wärmeleitung in Flüssigkeiten 841
4) Erwiderung 842
Websky. Ueber die Berechnung der Elemente einer monoklinischen Krystallgattung 433

Seite
Wedekind, L. 1) Das Doppelverhältnis und die absolute Invariante binärer biquadratischer Formen 87
2) Lagenbeziehungen bei ebenen perspectivischen Dreiecken . . . 457
Weierstrass, C. 1) Zur Functionenlehre 310
2) Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler 311
3) Untersuchungen über die $2r$-fach periodische Function mit r Veränderlichen 313
Weiler. Das Problem der drei Körper in der neuen Störungstheorie 859
Weill. 1) Théorème sur les polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux circonférences 462
2) Note sur le triangle inscrit et circonscrit à deux coniques . . 471
3) Sur le cercle qui passe par les pieds des trois normales abaissées d'un point de l'ellipse sur la courbe 551
4) Théorèmes sur la parabole 554
Weingarten, J. Zur Theorie der isostatischen Flächen 725
Weinmeister, J. Ph. Die Flächen zweiten Grades nach elementar-synthetischer Methode 500
Weissenborn, H. Die Uebersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelhard von Bath 2
Werner, W. Bestimmung und Untersuchung einer Curve, die durch Reflexion entsteht 774
Wernicke, A. Die Entdeckung der endlichen Lichtgeschwindigkeit durch Olaf Römer 36
West, E. Sur les équations algébriques 62
Westphal, G. Ueber das simultane System zweier quaternärer Formen zweiten Grades 597. 607
Wex, C. Aufgaben aus der rationellen Mechanik 677
Weyr, E. Ueber Polargruppen 453
Weyr, Ed. 1) Construction der Osculationshyperboloide windschiefer Flächen 509
2) Ueber die äquivalente Abbildung zweier Flächen 628
Weyr, Em. 1) Beiträge zur Curvenlehre 449
2) Ueber Projectivitäten und Involutionen auf ebenen rationalen Curven dritter Ordnung 483
3) Ueber Involutionen bei Curven dritten Grades 484
4) Bemerkung zu einer Abhandlung von Herrn Le Paige 484
5) Ueber biquadratische Involutionen zweiter Stufe und ihre typischen Curven 486
6) Ueber vollständig eingeschriebene Vielseite 487
7) Ueber harmonische Mittelpunkte eines Quadrupels 514
8) Ueber eine recurrente Formel zur Herstellung von Involutionsgleichungen 544
9) Sur l'existence de l'évolution dans les courbes du 3me et du 4me ordre 546
Whitworth, W. A. Solutions of questions 170. 172
Wiecke, P. 1) Bemerkungen über die Fehlergrenze bei Anwendung der Simpson'schen Regel 227
2) Zur Theorie des Watt'schen Parallelogramms 653
Wiener. Zusatz zu einer Arbeit von Jordan 853
Wiener, Ch. Die Abhängigkeit der Rückkehrelemente einer unebenen Curve von der Curve selbst 439
Wild, H. Vollständige Theorie des Bifilarmagnetometers 810
Wilkins, W. Solution of a question 437
Wilkinson, M. M. V. An elliptic function identity 358

Seite
Winckler, A. Ueber den letzten Multiplicator eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung 287
Winkelmann, A. Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn H. F. Weber 841
Winter, E. Ueber das simultane Formensystem einer binären Form zweiter Ordnung 90
Winterberg. Ueber die Anziehung von Massenpunkten . . . 722. 852
Wiskočil, E. Stereometrische Begründung der zwölf Constructionsaufgaben der Geometrie der Lage aus der Bestimmung der Curven zweiter Ordnung aus fünf reellen Elementen 467
Witkowski, A. Ueber den Verlauf der Polarisationsströme . . . 797
Wittek, H. Ueber den Begriff der geraden Pyramide 434
Wittenbauer, F. 1) Theorie der Beschleunigungscurven 640
2) Theorie der Bewegung auf developpabeln Flächen 681
Wittwer, W. C. Grundzüge der mathematischen Chemie 872
Witz, A. Essai sur l'effet thermique des parois d'une enceinte sur les gaz qu'elle renferme 844
Wohlwill, E. Erklärung und Abwehr 11
Wolstenholme. 1) A form of the equation determining the foci and directrices of a conic 298
2) Solutions of questions 437. 478. 562 564. 567. 660. 738
Wood, V. Quaternions 531
Worpitzky, J. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung . 199
Wright, W. E. Solution of a question 564
Wronski, H. Einleitung in den mathematischen Unterricht 56
Wüllner, A. Specifische Wärme des Wassers 834

Zahradnik, K. Ueber das Normalenproblem für die Parabel . . . 554
Zajaczkowski, W. 1) Ueber eine gewisse Eigenschaft der Pfaff'schen Function 280
2) A theorem relating to Pfaffians 281
Zeuthen, H. G. 1) Bevis for at Ligningen $f(x, y, y') = 0$ har et fuldständigt Integral 234
2) Sur la détermination d'intégrales algébriques de différentielles algébriques 235
3) Konstruktion af det ottende Skjäringspunkt mellem de Fladen af anden Orden 506
4) Nogle tilsyneladende Paradoxer i Lären om Centralbevogelse . 675
5) Grafisk Behandling af en Bjalkes bevaegelige Belastning . . . 736
Zöppritz, K. Ueber Schwankungen des Meeresspiegels infolge von geologischen Veränderungen 663
Zolotareff, G. Sur la théorie des nombres complexes 125







